

## Simulacija vrtložnog brzinomera metodom konačnih elemenata

---

*Predstavljena je numerička simulacija interakcije magnetnog dipola i beskonačnog tankog ravnaskog provodnika. Ovaj problem je odabran kao pojednostavljen model vrtložnog brzinomera (Lorentz force velocimetry – LFV). LFV metoda se zasniva na izlaganju provodnika spoljašnjem magnetnom polju i merenjem sile koja deluje na izvor magnetnog polja. U slučaju ispitivanja zavisnosti sile od brzine, sila je razložena na tri komponente: x-komponentu (vučna sila), koja deluje u pravcu kretanja provodnika, y-komponentu (transverzalna sila) i z-komponentu (sila levitacije). Za vučnu silu se dobija da u određenom opsegu brzina linearno zavisi od brzine provodnika, dok se za veće brzine oblik zavisnosti menja. Vrednosti za transversalnu silu su 2 do 3 reda veličine manje od vrednosti druge dve komponente, tako da se ona može zanemariti. Sila levitacije pri malim brzinama zavisi od kvadrata brzine, dok se za veće brzine ponaša nalik vučnoj sili. Takođe, pokazano je da je vučna sila obrnuto srazmerna trećem stepenu rastojanja između provodnika i dipola. Dobijene zavisnosti se kvalitativno poklapaju sa eksperimentima i simulacijama koje zahtevaju 3D simuliranje ili ne uvode aproksimaciju tankog provodnika.*

---

### Uvod

Vrtložni brzinomer (Lorentz force velocimetry – LFV) je tehnika koja se primenjuje u metalurgiji za beskontaktno određivanje brzine provodnika ili tečnih metala. Korišćenje magnetnih polja za određivanje brzine fluida datira

od 1832. godine kada je Majkl Faradej pokušao da odredi brzinu reke Temze (Thess *et al.* 2006). Njegov metod je našao veliku primenu u hemijskoj industriji pri merenju brzine fluida na sobnim temperaturama.

Međutim, ovaj metod zahteva kontakt sa tečnim fluidom, što nije moguće u slučaju otopljenog metala koji je na znatno višim temperaturama od sobne. Umesto toga, LFV bazira svoj rad na sledećem principu: provodnik se dovede u blizinu magnetnog polja, a kao posledica relativnog kretanja magnetna i provodnika, po Faradejevom zakonu, u provodniku se indukuju struje. Usled interakcije tih struja (poznatih kao vrtložne stuje) sa spoljašnjim magnetnim poljem stvara se Lorencova sila koja usporava provodnik. Indukovane struje takođe poseduju svoje magnetno polje koje interaguje sa magnetom, delujući silom na isti. Merenjem te sile moguće je odrediti brzinu provodnika. Takođe, jedna od primena ove tehnike jeste određivanje oštećenja u materijalu: oštećenje utiče na tok vrtložnih struja, pa samim tim i na silu kojom provodnik deluje na magnet; merenjem razlike te sile u odnosu na slučaj bez oštećenja, može se odrediti njegova lokacija.

Dosadašnja analiza LFV zasnivala su se na analitičkim izvođenjima koja su ili dosta pojednostavljena (Thess *et al.* 2006) ili zahtevaju opsežan račun (Votyakov i Thess 2011). Pored njih postoji par numeričkih metoda za opisivanje LFV (Brauer i Ziolkowski 2008; Zec *et al.* 2011), međutim u njima nije dat jasan opis uticaja brzine provodnika i njegove udaljenosti od magnetna na silu kojom on deluje na magnet. Shodno tome, naš cilj je bio da pojednostavljenim 2D modelom

---

*Strahinja Nikolić (2002), Loznica, učenik 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu*

*Tara Stepanović (2002), Loznica, učenica 2. razreda Gimnazije „Vuk Karadžić” u Loznici*

*MENTOR: Daniel Silađi, Institut de Recherche en Informatique Fondamentale, Université de Paris*

dobijemo rezultate za prethodno navedene zavisnosti koristeći metod konačnih elemenata.

Simulacija je urađena metodom konačnih elemenata (engl. finite element method – FEM), koji predstavlja jedan od načina numeričkog rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina. Ovaj numerički metod je našao veliku primenu u raznim granama inženjerstva; zasniva se na diskretizaciji, odnosno deljenju početnog sistema na veliki broj delova koji su jednostavniji za rešavanje – tako izdelfjen sistem naziva se mesh. Ti delovi su za 2D probleme najčešće u vidu trouglova.

## Metod

### Teorijski deo

Po uzoru na referentni rad (Bilicz 2015), vrtložni brzinomer je modelovan beskonačnom provodnom pločom debljine  $a$ , električne provodnosti  $\sigma$  i magnetnim dipolom na visini  $h$  iznad ploče koji se kreće brzinom  $\vec{v} = \vec{e}_x v$  (slika 1).

Zbog relativnog kretanja provodne ploče kroz linije magnetnog polja dipola, indukuje se struja u ploči. Kako je ploča tanka, možemo pretpostaviti da struja ne teče u  $z$ -smeru, tj. da je  $J_z = 0$ . Dalje se izraz za površinsku gustinu struje:

$$\vec{K} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \vec{J}(x, y, z) dz$$

može zameniti izrazom:

$$\vec{K} = a \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

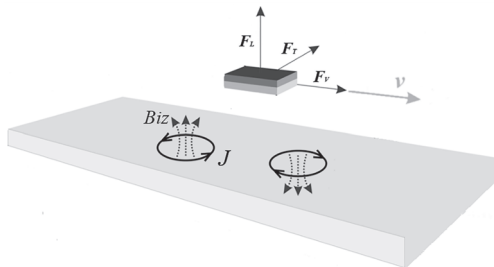
koristeći činjenicu da je gustina struje data kao:

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.1)$$

gde su  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  ukupno električno i magnetno polje, respektivno, a  $\vec{v}$  je brzina kretanja ploče. Električno polje potiče od statičkih naelektrisanja u provodniku i može se izraziti preko skalarnog potencijala (Bilicz 2015):

$$\vec{E} = -\nabla_t \phi \quad (2)$$

gde je  $\nabla_t$  tangencijalni gradijent u  $xy$  ravni. Magnetno polje je kombinacija polja koje potiče od dipola ( $\vec{B}_0$ ) i polja indukovano od strane vr-



Slika 1. Model vrtložnog brzinomera

- $v$  – brzina provodnika
- $F_v$  – vučna sila
- $F_T$  – transverzalna sila
- $F_L$  – sila levitacije
- $J$  – gustina indukovane struje
- $B_{iz}$  –  $z$  komponenta indukovano magnetnog polja

Figure 1. The model of LFV

- $v$  – velocity of conductor
- $F_v$  – drag force
- $F_T$  – transverse force
- $F_L$  – lift force
- $J$  – density of induced current
- $B_{iz}$  –  $z$ -component of induced magnetic field

tložnih struja ( $\vec{B}_i$ ). Polje dipola ima analitički oblik:

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{m})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

gde  $\vec{r}$  označava vektor položaja tačke u kojoj se određuje indukcija polja u odnosu na dipol ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2}$ ), a  $\vec{m}$  je magnetni moment dipola.

Indukovano polje može se izračunati preko Bio-Savarovog zakona znajući površinsku gustinu struje  $\vec{K}$ . Primenu Bio-Savarovog zakona ćemo označiti operatorom  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{B}\{\vec{K}(x, y)\} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\vec{K}(x', y') \times [(x-x')\vec{e}_x + (y-y')\vec{e}_y]}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{\frac{3}{2}}} dS'$$

pri čemu  $[(x-x')\vec{e}_x + (y-y')\vec{e}_y]$  predstavlja vektor položaja od posmatrane tačke do elementa  $d$

$S'$ ,  $dS'$  predstavlja površinski element, a  $\mu_0$  je magnetna permeabilnost vakuuma.

Indukovano polje se može izračunati po formuli:

$$\vec{B}_i(x, y) = \vec{e}_z B_{iz}(x, y) = \mathcal{B}\{\vec{K}(x, y)\} \quad (3)$$

(indukovano polje ima samo  $z$  komponentu zato što površinska gustina struje ima samo  $x$  i  $y$  komponente).

Kako je struja  $\vec{K}$  bezizvorna, važi relacija  $\nabla \cdot \vec{K} = 0$ , koja se koristeći (1) i (2) može zapisati kao:

$$\nabla \cdot (-\nabla_t \phi + \vec{v} \times \vec{e}_z (B_{iz} + B_{0z})) = 0 \quad (4)$$

Treba napomenuti da se u prethodnoj jednačini ne pojavljuju  $x$  i  $y$  komponente  $\vec{B}_0$  pošto ne uzrokuju elektromotornu silu u ravni ploče.

U prvom, aproksimativnom slučaju koji se ponekad koristi u literaturi (Wiederick *et al.* 1987), možemo zanemariti intenzitet indukovano polja (pri malim brzinama ono ima minimalan doprinos). Tada se (4) svodi na Poasonovu jednačinu:

$$-\nabla \cdot \nabla_t \phi = v \frac{\partial \vec{B}_{0z}}{\partial y} \quad (5)$$

Naš model takođe rešava „pravi” slučaj koji uračunava doprinos indukovano polja. U tom slučaju jednačina (4) ima sledeći oblik:

$$-\nabla \cdot \nabla_t \phi = v \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} + v \frac{\partial B_{iz}}{\partial y} \quad (6)$$

Da bi se izračunalo indukovano polje potrebno je raspisati izraz (3), pa se, koristeći linearnost operatora  $\mathcal{B}$ , dobija:

$$\vec{e}_z B_{iz} + a\sigma \mathcal{B}\{\vec{e}_y v_x B_{iz}\} = a\sigma \mathcal{B}\{-\nabla_t \phi - \vec{e}_y v_x B_{0z}\} \quad (7)$$

pri čemu je  $\vec{K}$  zamenjeno izrazom iz (1).

Jedan od ciljeva ovog rada jeste izračunavanje sile kojom magnet deluje na ploču (ova sila je jednaka po intenzitetu, a suprotna po smeru sili kojom ploča deluje na magnet; Zec *et al.* 2011). Mogući način da se ta sila odredi jeste primena formule za Lorencovu silu  $\vec{F} = \iiint \vec{J} \times \vec{B} dV$ , s tim što se u našem slučaju ovaj integral može svesti na:

$$\vec{F} = a \iint \vec{J} \times \vec{B} dx dy \quad (8)$$

## Numerički deo

Sve jednačine su rešavane u okviru MatLab PDE Toolbox-a. U postavci problema je navedeno da je provodnik koji se kreće ispod dipola beskonačan. Ovakva postavka nije pogodna za numeričko rešavanje, te je ploča predstavljena kao kružni provodnik iznad čijeg centra se nalazi magnetni dipol, a za poluprečnik je uzeta vrednost  $R = 0.5$  m. Na ovakvoj ploči je formiran trougaoni mesh. Pri rešavanju jednačine (6) potrebno je zadati granične uslove za  $\phi$ . Ovde je postavljen uslov  $\phi = 0$  po obodu kruga koji predstavlja provodnik.

Označimo broj noda (čvorova) sa  $n$  i broj trouglova sa  $m$ . Takođe, za svaki trougao obeležimo koordinate njegovog težišta sa  $(\chi_l, \psi_l)$ , površinu sa  $S_l$ , a koordinate  $k$ -te node sa  $(x_k, y_k)$ . Da bi se odredili koeficijenti u jednačini (6), potrebno je rešiti jednačinu (7), a za to je potreban operator  $\mathcal{B}$ . Pretpostavljajući da je na jednom trougaonom elementu površinska gustina struje  $\vec{K}_l$  konstanta, prethodno definisani operator  $\mathcal{B}$  možemo raspisati u diskretizovanom obliku, koji je pogodniji za numeričko računanje (Bilicz 2015):

$$\begin{aligned} \vec{e}_z B_{iz}(x_k, y_k) &= \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{l=1}^m \frac{\vec{K}_l \times [(x_k - \chi_l) \vec{e}_x + (y_k - \psi_l) \vec{e}_y]}{[(x_k - \chi_l)^2 + (y_k - \psi_l)^2]^{\frac{3}{2}}} S_l \end{aligned} \quad (9)$$

Koristeći prethodnu jednakost zajedno sa (7), može se uspostaviti sistem od  $n$  linearnih jednačina na sledeći način:

1. Operator  $\mathcal{B}\{\vec{e}_y v_x B_{iz}^k\}$  se predstavi kao linearna kombinacija po svim nodama:

$$\mathcal{B}_y\{v_x B_{iz}^k\} = \sum_{j=1}^n A_{kj} B_{iz}^j;$$

2. Jednačina (7) se napiše za  $k$ -tu nodu, s tim što je desna strana poznata, pa će biti označena matricom ( $D$ ):

$$B_{iz}^k + a\sigma \sum_{j=1}^n A_{kj} B_{iz}^j = D_{k1} \quad (9.1)$$

3.  $\mathcal{B}_y\{v_x B_{iz}^k\}$  se izrazi preko (9), pomoću oznaka

$$\Delta x_k = x_k - \chi_l \text{ i } \Delta l_k = [(x_k - \chi_l)^2 + (y_k - \psi_l)^2]^{\frac{3}{2}};$$

$$\mathcal{B}_y\{v_x B_{iz}^k\} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{l=1}^m \frac{-v \frac{B_{iz}^{l_0} + B_{iz}^{l_1} + B_{iz}^{l_2}}{3} \Delta x_k}{\Delta l_k} S_l \quad (9.2)$$

4. Suma iz (9.2) se pretvori u sumu po nodama da bi se dobili koeficijenti  $A_{kj}$ :

$$\sum_{j=1}^n A_{kj} B_{iz}^j = \frac{\mu_0 v}{12\pi} \sum_{j=1}^n B_{iz}^j \sum_q \frac{\Delta x_k S_l}{\Delta l_k} \quad (9.3)$$

gde  $q$  označava one trouglove koji sadrže nodu  $j$ .

5. Iz (9.3) se očitaju koeficijenti:

$$\frac{\mu_0 v}{12\pi} \sum_q \frac{\Delta x_k S_l}{\Delta l_k} \quad (9.4)$$

s tim što iz (9.1) sledi da koeficijentima na dijagonalu treba dodati 1.

6. Na kraju, jednačina (9) se u matricnom obliku može zapisati kao:

$$(A)(B_{iz}) = (D) \quad (10)$$

Jednačina (10) predstavlja sistem  $n$  linearnih jednačina sa  $n$  nepoznatih. Vrednosti dobijene za  $B_{iz}$  na ovaj način zavise od  $\nabla_i \phi$  (njegove vrednosti ulaze u matricu  $(D)$ ). One se mogu zameniti u jednačinu (6), međutim tako dobijene vrednosti za  $B_{iz}$  se menjaju pri svakoj iteraciji komande pdesolve. Iz tog razloga potrebno je „ručno“ dodati iteracije, gde se pri svakoj iteraciji ažuriraju vrednosti  $B_{iz}$ .

MatLab PDE Toolbox ima mogućnost rešavanja jednačina oblika:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = 0$$

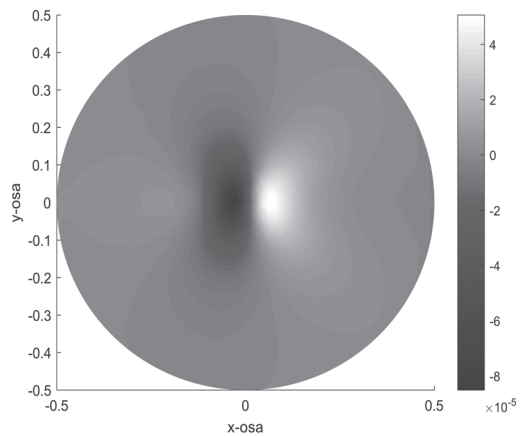
gde su u našem slučaju (jednačina 6) koeficijenti  $m$ ,  $d$  i  $a$  svi jednaki nuli, a koeficijent  $f$  predstavlja desna strana jednačine (6). Ceo program se može predstaviti pseudokodom navedenim u prilogu obog članka.

## Rezultati i diskusija

Pri prolasku ploče ispod magneta, vrtložne struje će se indukovati u dva smera. Ovo se objašnjava Lencovim zakonom: pošto se ploča kreće u pozitivnom smeru  $x$ -ose, struje levo od dipola ( $x < 0$ ) se indukuju u oblasti u kojoj raste magnetni fluks (približavaju se magnetu), stoga smer struja mora biti takav da teže da ponište porast fluksa. Struje desno od dipola ( $x > 0$ ) se udalja-

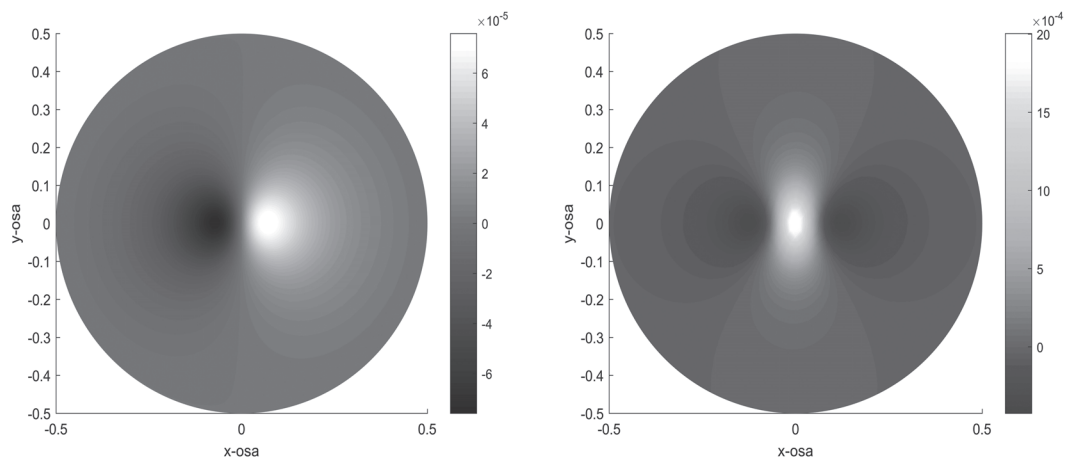
vaju od njega, tj. magnetni fluks opada, pa se struje indukuju u takvom smeru da nadoknade opadanje fluksa. Kako je komponenta magnetnog polja dipola koja dovodi do indukovanja struja ( $z$  komponenta) istog smera za obe strujne konture (i levo i desno od dipola), ove struje će biti usmerene međusobno suprotno. Slika 2 demonstrira navedeno tvrđenje da indukovane struje teku u međusobno suprotnim smerovima, jer su njihova magnetna polja suprotnog smera – na grafiku je to prikazano pozitivnim i negativnim intenzitetom indukcije magnetnih polja strujnih kontura. Takođe, indukcija magnetnog polja struja levo od dipola je po apsolutnoj vrednosti većeg intenziteta nego indukcija polja koje potiče od struja sa desne strane dipola. Superpozicijom ta dva polja dobija se magnetno polje koje teži da poništi magnetno polje dipola, što dovodi do uspenja ploče.

Grafik prikazan na slici 2 dobijen je za brzinu 20 m/s. Za vrednost magnetnog momenta uzeta je vrednost  $m = 1 \text{ Am}^2$ , mada ova vrednost može da se menja u zavisnosti od toga koliko jak magnet želimo da modeliramo. Shodno tome, sve prikazane rezultate treba tumačiti samo kvalitativno. Vrednost za električnu provodnost je  $\sigma = 5.7 \cdot 10^7 \text{ S/m}$  (ova vrednost odgovara bakru; kao i magnetni moment, ovaj parametar može da se menja).



Slika 2. Indukovano magnetno polje

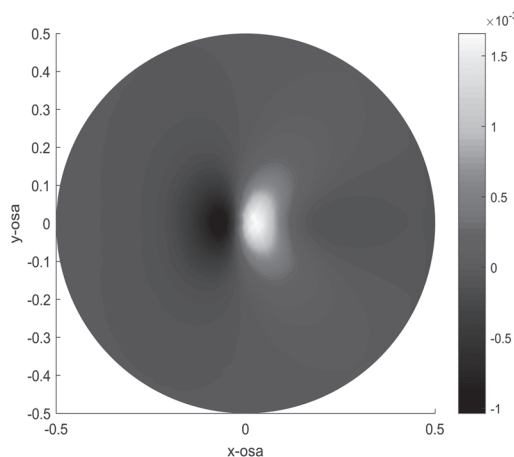
Figure 2. The induced magnetic field



Slika 3. Intenzitet električnog potencijala  $\phi$  (levo);  $y$  komponente električnog polja (desno).

Figure 3. The intensity of electric potential  $\phi$  (left); the intensity of the  $y$ -component of the electric field vector (right).

Električno polje se računa kao gradijent potencijala  $\phi$ , i potiče od statičkih naelektrisanja u provodniku, na koje ne utiče kretanje ploče što se i može videti sa slika 3, koje su simetrične u odnosu na centar ploče, za razliku od rezultata za indukovano magnetno polje sa slike 2. Koristeći



Slika 4. Intenzitet  $y$  komponente gustine indukovane struje

Figure 4. The intensity of the  $y$ -component of the induced current density

jednačinu (1.1) i kombinujući rezultate predstavljene na slikama 2 i 3 dobijamo gustinu indukovane struje. Grafik  $y$  komponente gustine indukovane struje prikazan je na slici 4.

Presekom grafika sa slike 4 ravni  $y = 0$  dobijaju se grafici prikazani na slici 5. Grafik na slici 4 dobijen je za brzinu od 20 m/s.

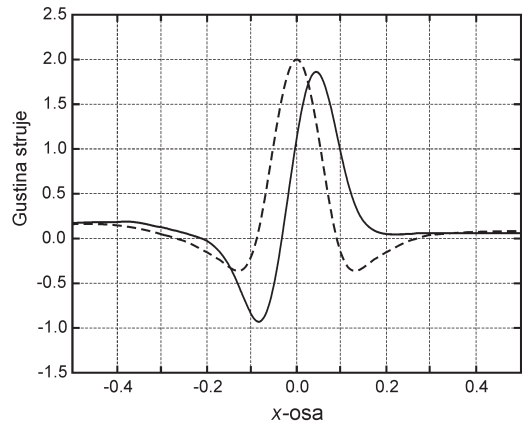
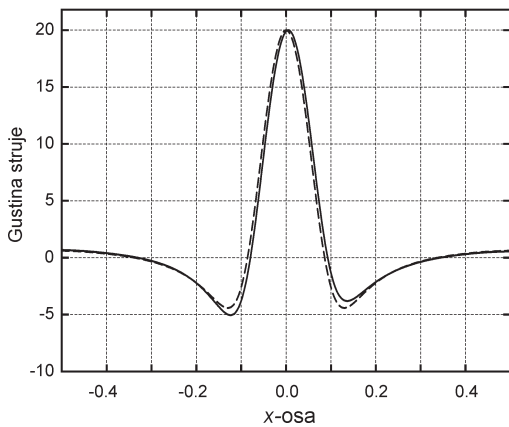
Sa slike 5 se može zaključiti da je efekat vrtložnih struja, odnosno odstupanje aproksimativnog od realnog slučaja, veći ukoliko je brzina ploče veća.

Na slici 6 uočava se simetrija u odnosu na  $x$  osu, što je ispravno, zbog simetrije problema po toj osi. Asimetrija po  $y$ -osi objašnjava se međusobnom interakcijom kontura indukovanih struja (objašnjenje vezano za sliku 2).

Iz jednačine (8) vidimo da će Lorencova sila imati tri komponente:

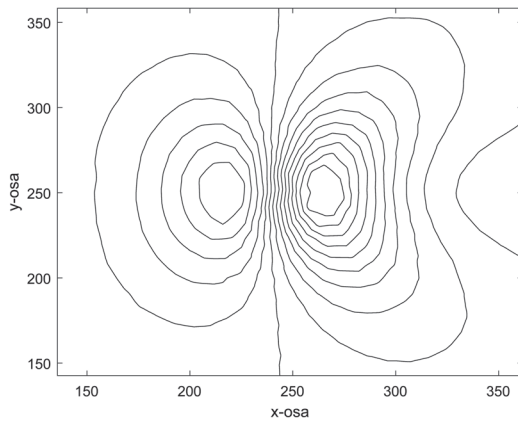
- Vučna sila ( $x$  komponenta), deluje na magnet u smeru kretanja ploče (usporava ploču)
- Sila levitacije ( $z$  komponenta), deluje u smeru  $z$ -ose.
- Transverzalna sila ( $y$  komponenta), u idealnom slučaju je jednaka nuli zbog simetrije problema

Na slici 7 su prikazane dve od tri komponente (vučna i levitaciona). Za intenzitet transverzalne



Slika 5. Komponenta y gustine struje za  $y = 0$  za brzine 2 m/s (levo) i 20 m/s (desno); isprekidana linija – aproksimativni slučaj, puna linija – realni slučaj.

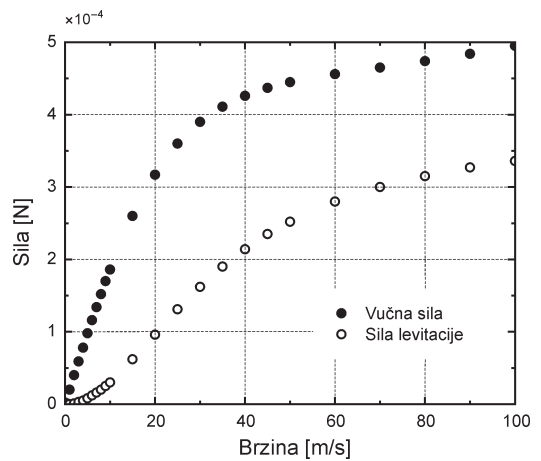
Figure 5. The y-components of current density in  $y = 0$  for velocities of 2 m/s (left) and 20 m/s (right); dashed line – approximation, solid line – the real case.



Slika 6. Konture indukovane struje u ploči

Figure 6. The contours of the induced current in the plate

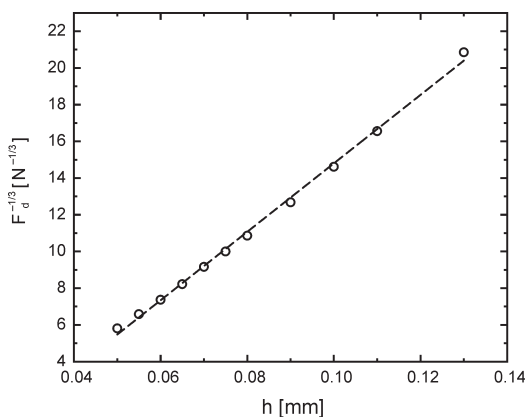
komponente je dobijeno da je 2-3 reda veličine manji od intenziteta ostalih komponenti, što bi i trebalo da bude slučaj s obzirom na simetriju problema (zbog greške numeričkog računa njena vrednost nikada neće biti jednaka nuli, ali mo-



Slika 7. Vučna sila i sila levitacije u zavisnosti od brzine

Figure 7. The dependence of the drag force (black circles) and the levitation force (white circles) on the velocity

žemo se zadovoljiti time da je manja od 1% ukupne sile). Za vučnu silu dobijamo da raste sa porastom brzine, što je očekivano. Takođe vidimo da se može aproksimirati linearnom funk-



Slika 8. Linearizovan grafik zavisnosti vučne sile od rastojanja magnetnog dipola i provodnika; isprekidana linija predstavlja linearni fit.

Figure 8. The linearised dependence of drag force on the distance between the magnetic dipole and the conductor; the dashed line represents the linear fit.

cijom za određeni opseg brzina (brzine do 15 m/s), kao što je slučaj u nekim primerima iz literature (Thess *et al.* 2006; Uhlig *et al.* 2011; Wiederick *et al.* 1987). Za silu levitacije vidimo da sporo raste pri malim brzinama dok nakon toga nastavlja rastom približnim kao i vučna sila. Za opseg malih brzina njen rast se može predstaviti kvadratnom funkcijom, što se poklapa sa eksperimentalnim rezultatima iz referentnog rada (Uhlig *et al.* 2011).

Pošto je zavisnost  $F_d^{-1/3}(h)$  linearna, vučna sila zavisi od  $h$  kao  $F_d \propto h^{-3}$ . Ista zavisnost dobijena je analitičkim izvođenjem u radu Thess *et al.* (2006). Odstupanja koja postoje na grafiku možemo pripisati tome što su rezultati dobijeni pod različitim pretpostavkama, kao i greški numeričke simulacije. Kako sila brzo opada sa porastom  $h$ , zaključujemo da je potrebno magnet što više približiti provodniku radi lakšeg registrovanja sile. Minimalno rastojanje  $h$  je u praksi najčešće ograničeno zbog potrebe da se mere brzine tečnih metala koje su na velikim temperaturama, pa dolazi do efekta Kirijeve temperature

(magneti gube svojstvo namagnetisanosti pri visokim temperaturama).

Zbog proizvoljnog broja iteracija bilo je potrebno utvrditi konvergentnost rešenja. To je postignuto oduzimanjem vrednosti gustine struje u svakom čvoru za dve susedne iteracije i određivanjem maksimalne vrednosti u tako dobijenom nizu. Pokazalo se da u početku rešenje veoma brzo konvergira, te se nakon 4 iteracije stabilizuje. Svi navedeni rezultati dobijeni su za 10 iteracija, pa se može smatrati da su dovoljno precizni.

## Zaključak

U ovom radu predstavljen je jednostavan 2D model vrtložnog brzinoera. Model čine magnetni dipol i tanka provodna ploča koja se kreće ispod njega. Dobijene su zavisnosti sve tri komponente sile koja deluje na magnetni dipol, kao i zavisnost te sile od rastojanja između dipola i ploče. Pokazalo se da vučna sila u opsegu brzina 0–15 m/s zavisi linearno od brzine provodnika, a da se u blizini nule sila levitacije može aproksimirati kvadratnom funkcijom. Dobijene vrednosti za transversalnu silu su nekoliko redova veličine manje od intenziteta prostale dve komponente, pa se mogu zanemariti, što je u skladu sa simetrijom modela. Sila koja deluje na magnet je obrnuto srazmerna trećem stepenu rastojanja između dipola i ploče. Svi rezultati se poklapaju sa rezultatima eksperimenata i simulacija (Brauer i Ziolkowski 2008; Zec *et al.* 2011), kao i jednostavnijim analitičkim izvođenjima (Thess *et al.* 2006). Model se dalje može nadograditi tako da se umesto dipola uvede stalni magnet konačnih dimenzija. Još jedna od mogućih nadogradnji za model jeste uvođenje oštećenja u provodnik, po uzoru na rad Brauera i Ziolkovskog (Brauer i Ziolkowski 2008). Glavna promena u kodu bi bila ta da se promeni geometrija modela, dok bi ostatak koda i jednačine koje opisuju sistem ostali slični.

**Zahvalnost.** Zahvaljujemo se mentoru Danielu Siladžiju, saradniku seminara fizike u IS Petnica, na ukazanoj podršci i nesebičnoj pomoći prilikom realizacije ovog projekta.

## Literatura

- Bilic S. 2015. Approximate and proper electromagnetic modelling in moving conductors. *Periodica Polytechnica Electrical Engineering and Computer Science*, **59** (2): 43.
- Brauer H., Ziolkowski M. 2008. Eddy current testing of metallic sheets with defects using force measurements. *Serbian Journal of Electrical Engineering*, **5** (1): 11.
- Thess A., Votyakov E., Kolesnikov Yu. 2006. Lorentz Force Velocimetry. *Physical review letters*, **96**: 164501.
- Uhlig R.P., Zec M., Ziolkowski M., Brauer H. 2011. Lorentz force eddy current testing: Validation of numerical results. *Proceedings of Electrotechnical Institute*, **251**: 135.
- Votyakov E., Thess A. 2011. Interaction of a magnetic dipole with a slowly moving electrically conducting plate. *Journal of Engineering Mathematics*, **77**: 147.
- Wiederick H., Gauthier N., Campbell D., Rochon P. 1987. Magnetic braking: Simple theory and experiment. *American Journal of Physics*, **55**: 500.
- Zec M., Uhlig R., Ziolkowski M., Brauer H. 2011. Lorentz force eddy current testing: two-dimensional numerical study. *Proceedings of Electrotechnical Institute*, **252**: 55.

---

*Strahinja Nikolić and Tara Stepanović*

## Finite Element Method Simulation of Lorentz Force Velocimetry

Lorentz force velocimetry is based on the principle of electromagnetic induction: when a conductor is put into the magnetic field, as a consequence of the relative motion of the magnet and the conductor, and according to Faraday's law, currents are induced in the conductor. Due to the interaction of these currents (eddy currents) with an external magnetic field, a Lorentz force is created, which, according to Lenz's law, slows down the conductor. The induced currents also have their magnetic fields that interact with the magnet by acting on it. It is possible to determine the speed of the conductor by measuring the force that acts on the magnet. This way, we

can determine the location of damage in material: the damage affects the flow of eddy currents, and therefore the force exerted by the conductor on the magnet. The location of the damage can be determined by measuring the difference of that force with that of the non-damaged case.

Simulation was done using the Finite Element Method (FEM), which is one of numerical ways for solving partial differential equations. FEM is based on discretization, i.e. on dividing the initial system into a large number of parts (mesh) that are easier to solve.

So far, the analysis of LFV has been based on analytical derivations that are either too simplified (Thess *et al.* 2006) or demand an extensive calculation (Votyakov & Thess 2011). There are a few other numerical methods that describe LFV (Brauer & Ziolkowski 2008; Zec *et al.* 2011), although they do not state clearly how the speed of the conductor and the distance between the magnet and the conductor influence the force that the conductor exerts on the magnet. Therefore, we aim to obtain the results for the aforementioned dependences by using a simplified 2D model of LFV.

In this paper, LFV is modeled by an infinite conductive plate of thickness  $a$  and a magnetic dipole at a height  $h$  above the plate. The plate moves at a velocity  $v$  in the direction of the  $x$ -axis.

The main equation solved in the paper is:

$$-\nabla \cdot \nabla_i \cdot \phi = v \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} + v \frac{\partial B_{iz}}{\partial y}$$

where  $\phi$  stands for electric potential,  $B_{0z}$  is the  $z$ -component of the magnetic field of the dipole and  $B_{iz}$  is the  $z$ -component of the induced magnetic field. The equation was solved in two cases: approximate (the influence of eddy currents is neglected, which is reasonable for low speeds – therefore the second term on the right is ignored) and real (the effect of eddy currents is taken into account). The equation was solved numerically in Matlab, using the PDE toolbox package. The formula for the Lorentz force in the 2D case is:

$$\vec{F} = a \iint \vec{J} \times \vec{B} dx dy$$

where  $\vec{J}$  is the density of induced current and  $\vec{B}$  is the total magnetic field.



**Results.** The drag force is obtained as the  $x$ -component of the Lorentz force, while the lift force is obtained as its  $z$ -component. These components are shown in Figure 7. We can see that the drag force depends linearly on the velocity in the range 0–15 m/s, which can often be found in the literature. There is also a  $y$ -component of the Lorentz force, which is not represented in Figure 7 because its value is supposed to be zero (due to the symmetry of the problem, the plate does not move along the  $y$ -axis).

Numerically obtained, the intensity of that component is 100 to 1000 times less than the intensity of the other two components, so it can be neglected. Due to the arbitrarily chosen intensity of the magnetic moment of the dipole ( $1 \text{ Am}^2$ ), these results should only be taken qualitatively.

Since the dependence  $F_d^{-1/3}(h)$  is linear (Figure 8), the drag force depends on the distance as  $F_d \propto h^{-3}$ . The same expression has been obtained analytically in the paper by Thess *et al.* (2006). The deviations that exist in the graph are the consequence of the fact that these results have been obtained under various approximations, as well as the numerical deviations. Since the force decreases with  $h$ , we conclude that it is necessary to bring the magnet as close to the conductor as possible, to register the force more easily. However, the magnet cannot be placed at an arbitrarily chosen distance from the conductor (whose temperature is high) – there must be some minimum distance in order to avoid the Currie effect (a magnet placed too close to a source of heat loses its magnetization).

## Prilog: Pseudokôd

```
for i=1:BrojIteracija
    PravljenjeGeometrije('Krug poluprečnika 0.5m');
    KreiranjeMesha(veličina_mesha);
    PostavljanjeGraničnihUslova('fi',0);
    f=DesnaStrana(6);%u prvoj iteraciji ovo je jednako desnoj
    strani jednačine (5), pri svakoj sledećoj iteraciji update-
    uju se vrednosti Biz
    ZadavanjeKoeficijenata(m,'0',d,'0',a,'0',c,'1',f,'f');
    model=NapraviModel(geometrija,mesh,granični_uslovi,koficij
    enti);
    fi(i)=RešavanjePDE(model);
    A=ResenjeJednačine(9.4);
    D(i)=BioSavar( $-\nabla_t \cdot fi(i) - e_y v_x B_{0z}$ );%primena Bio-Savarovog
    zakona opisanog jednačinom (9)
    Biz(i)=A\D(i);%rešavanje jednačine (10)
    IndukovanoPolje=InterpoliranjePoProstoru(Biz(i));
    dBizdy(i)=RačunanjeIzvoda(IndukovanoPolje,'y');%izvod Biz
    po y je potreban za rešavanje jednačine (6), računa se u
    skladu sa FEM aproksimacijom. Biz je predstavljen kao
    linearna funkcija na okviru jednog elementa  $Biz^l = ax + by + c$ .
    Tada važi jednostavna relacija  $\frac{\partial Biz^l}{\partial y} = b$ .
    f =DesnaStrana(6)-dBizdy(i);
    ZadavanjeKoeficijenata(m,'0',d,'0',a,'0',c,'1',f,'f');
    fi(i+1)=RešavanjePDE(model);
end
F=a*PovršinskiIntegral(J,B);
```

