

## Ispitivanje uticaja šuma na probablističku detekciju kvantne spletenosti

---

*Jedan od većih savremenih problema u kvantnom računarstvu jeste detekcija korelacija kvantnog tipa između kubita (eng. qubit), čestica koje se koriste kao osnovne jedinice u kvantnim računarima. Najvažniji tip ovakvih veza jeste kvantna spletenost, i pronalaženje efikasnih metoda za detektovanje ove veze je aktuelan problem. Cilj ovog rada je ispitivanje probablističkih metoda detekcije kvantne spletenosti u sistemu sa 6 kubita. Razmatran je uticaj šuma na ove metode, radi približavanja simulacija realnim uslovima. Posebno stanje sa kojim su vršena ispitivanja je klaster stanje oblika  $H$  od 6 kubita. Za ovo stanje konstruisana je probablistička metoda iz operatora provere (eng. witness operator). Model šuma koji je korišćen u simulacijama je beli šum. Dobljeni rezultati pokazuju da je moguće detektovati spletenost koristeći probablističke metode sa više od 99% sigurnosti i sa prisustvom određenog nivoa šuma. Sa povećavanjem nivoa šuma, eksponencijalno raste broj kopija stanja koji je potreban za verifikovanje spletenosti u sistemu.*

---

### Uvod

Kvantno računarstvo se bavi korišćenjem fenomena kvantne mehanike u računarskim sistemima. Najveća prednost ovih računara i motivacija za njihovo razvijanje je veliki broj informacija koje oni mogu da obrade u kratkom vremenskom periodu. Osnovna jedinica u ovim sistemima, analogno bitu u klasičnom računarstvu, naziva se kubit (eng. qubit, kvantni bit).

Kubit se, za razliku od običnog bita koji može biti isključivo u stanju 0 ili 1, može naći u superpoziciji ova dva stanja, tj. u bilo kojem međustanju između osnovnih stanja. Iako se kubit može naći u proizvoljnom stanju između 0 i 1, pri merenju on se može naći isključivo u jednom od ova dva stanja. Kubit u superpoziciji možemo predstaviti verovatnoćama da ga pri merenju nađemo u stanju 0 ili 1 (Chuang i Nielsen 2010). Čisto kvantno stanje jednog kubita dato je linearnom kombinacijom:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

gde  $\alpha$  i  $\beta$  predstavljaju amplitude verovatnoće nalaženja kubita u stanjima  $|0\rangle$  i  $|1\rangle$  redom.

Moć ovih sistema ogleda se u broju informacija koju nose više kubita zajedno. Za potpuno opisivanje sistema od  $N$  komponentata u klasičnom računarstvu potrebno je samo  $N$  bitova, dok je za isti broj komponentata u kvantnom računarstvu potrebno  $2^N$  kompleksnih brojeva. Fizička implementacija kubita može biti polarizacija fotona, spin elektrona itd.

Najbitnije kvantno svojstvo koje se može javiti između kubita je kvantna spletenost. Kvantna spletenost je osobina da kvantne čestice mogu interagovati jedna sa drugom, i ne mogu se posmatrati zasebno, već isključivo kao ceo sistem. Jedan od primera kvantne spletenosti je slučaj spina dva elektrona, gde pri merenju spina jednog elektrona, odmah možemo da kažemo koji je spin drugog elektrona, bez merenja.

---

*Stefan Bukorović (2002), Šabac učenik 3. razreda Šabačke gimnazija*

*Marko Krstić (2001), Ruma, učenik 3. razreda Mitrovačke gimnazije*

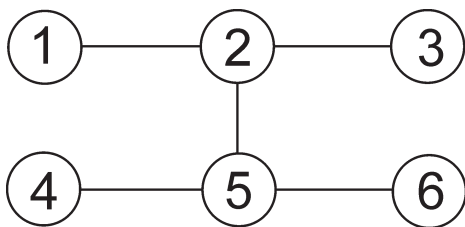
*MENTORKA: dr Aleksandra Dimić, Fizički fakultet Univerziteta u Beogradu*

Zbog velike važnosti spletenih sistema u kvantnom računarstvu, jako su bitne metode za verifikaciju spletenosti u nekom sistemu. Za detekciju spletenosti klasičnim metodama, zbog potrebe da se proveri svaki par kubita zasebno, potrebno je mnogo vremena i kopija istog kvantnog sistema, pa tako za neke veće sisteme ovakav način detekcije, iako najprecizniji, nije moguć. Zbog toga se razvijaju sve naprednije probabilističke metode detekcije kvatne spletenosti, kojima je potrebno znatno manje vremena i kopija istog sistema za verifikaciju postojanja spletenosti u sistemu. Ove metode nazivaju se probabilističke, pošto na pitanje da li u sistemu postoji spletenost, odgovor da ili ne daju sa određenim nivoom sigurnosti.

Cilj ovog rada je analiza probabilističke metode konstruisane iz operatora provere datih u referentnom radu (Saggio *et al.* 2018) za detekciju kvantne spletenosti između kubita. Krajnji cilj je ispitati uspešnost ove metode u detektovanju spletenosti u kvatnim sistemima, naći njene mane i pokazati da li je moguće ovu metodu koristiti u simulaciji realnih uslova u kojima postoji određen nivo šuma koji remeti merenja.

## Metod

Ispitivanja su vršena na klaster stanju oblika H od 6 kubita. Klaster stanje predstavlja posebno kvantno spleteno stanje koje spada u grupu graf stanja. Graf stanja su kvatna spletena stanja koje možemo predstaviti pomoću grafa u kojem svaki čvor predstavlja jedan kubit, a grana postojanje korelacija između neka dva kubita. Ispitivano klaster stanje predstavljeno je na slici 1. Ovo



Slika 1. Klaster stanje oblika H od 6 kubita

Figure 1. H-shaped 6 qubit cluster state

stanje je izabrano kao primer klaster stanja koja imaju široku primenu u kvantnom računarstvu.

Probabilistička metoda korišćena u ovom radu dobijena je translacijom operatora provere za klaster stanje od 6 kubita. Operatori provere (eng. witness operatori) u kvantnom računarstvu predstavljaju operatore koji za određeno stanje proveravaju da li je spleteno ili ne. Primenom operatora provere na bilo koje separabilno stanje dobijamo pozitivne vrednosti, dok se primenom na određena spletena stanja može dobiti i negativna vrednost. Korišćena su dva operatora provere, i iz svakog je konstruisana probabilistička metoda (Saggio *et al.* 2018):

$$W_1 = 3 \cdot \mathbf{1} - 2 \cdot \left( \prod_{k=1,3,5} \frac{\mathbf{1} + G_k}{2} + \prod_{k=2,4,6} \frac{\mathbf{1} + G_k}{2} \right)$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1} - |\text{Cl}_6\rangle\langle\text{Cl}_6|$$

U formulaciji operatora provere  $\text{Cl}_6$  predstavlja prvobitno klaster stanje,  $G$  različite generatore stanja, dok je sa  $\mathbf{1}$  označena jedinična matrica.

Metoda je ispitivana u uslovima gde je šum bio fiksiran, kao i kada je šum variran u određenom opsegu vrednosti. Pri svakoj iteraciji simulacije početnom idealnom stanju zadavan je drugačiji nivo šuma. Ovakvim varijacijama najbolje su simulirani realni laboratorijski uslovi merenja sa nepredvidivim nivoima šuma.

Model šuma koji je korišćen u ovom radu je beli šum, koji je izabran kao model koji je najpribližnji realnim uslovima (Dimić i Dakić 2018):

$$(1 - \lambda) \cdot \rho_{\text{target}} + \frac{\lambda}{2^n} \cdot \mathbf{1}$$

gde je  $\rho_{\text{target}}$  željeno kvantno stanje,  $\lambda$  nivo šuma, a  $n$  broj kubita u stanju.

Cilj rada je bio da se vidi, za određene vrednosti šuma, koliko je kopija stanja potrebno da bi metoda detektovala spletenost sa najmanje 99% sigurnosti. Ova zavisnost ispitana je za obe varijante, tj. oba operatora provere. Još jedna ispitivana veličina bila je vernost (eng. fidelity) stanja. Ova veličina pokazuje koliko stanje sa šumom odstupa od početnog idealnog stanja. Simulacije su rađene u programskom jeziku Matlab.

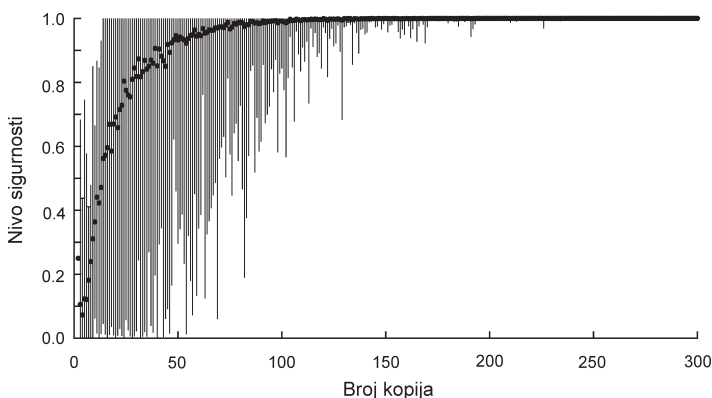
## Rezultati i diskusija

Pri odabiru u obzir uzete su dve vrste spletenosti, jedna u biseparabilnom (eng. biseparability), a druga u potpuno separabilnom stanju (eng. full-separability). Razlika između ove dve vrste je u tome što kod biseparabilnog stanja sistem ne može da se razloži na pojedinačne kubite, a kod potpuno separabilnog stanja sistem je razložen na pojedinačne kubite. Kod biseparabilnog stanja je mnogo teže detektovati spletenost, pa se ovaj rad bazira na tom tipu spletenosti.

Prvo je u simulacijama ispitan slučaj kada je šum fiksiran na 25%. Posmatrano je kako se menja procenat sigurnosti, koja predstavlja variranje rezultata metode pri ponavljanim merenjima pri čemu veća sigurnost označava manje variranje, sa porastom broja kopija. Očekivano, procenat sigurnosti kod obe metode raste sa porastom broja kopija, i kod obe metode se nakon

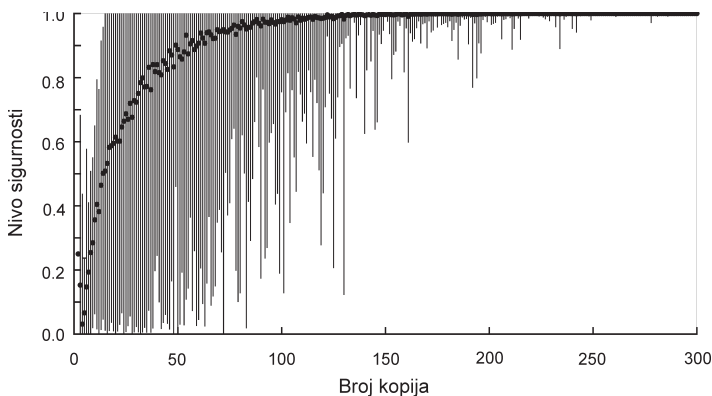
određenog broja kopija stabilizuje na 100%. Razlika se uočava u broju potrebnih kopija nakon kojeg dolazi do stabilizacije, gde vidimo da je prva metoda uspešnija. Kod prve metode potrebno je oko 100 kopija da bi došlo do stabilizacije (slika 2), dok je za isti rezultat potrebno oko 160 kopija kod druge metode (slika 3). Ova razlika je bila očekivana zbog veće složenosti prvog operatora provere. Za svaku tačku na grafiku izvršeno je 100 merenja i određena greška koja predstavlja apsolutnu razliku maksimalne i minimalne sigurnosti pri merenju. Ove greške su velike pri malom broju kopija, što je i očekivano, jer pri malom broju kopija ne možemo da kažemo gotovo ništa o sistemu, dok se pri povećanju broja kopija, i sa povećanjem nivoa sigurnosti, greška smanjuje.

U drugom delu istraživanja nivo maksimalnog šuma variran je između 5% i 30%. Ispitivana je zavisnost broja kopija koji je potreban da bi se



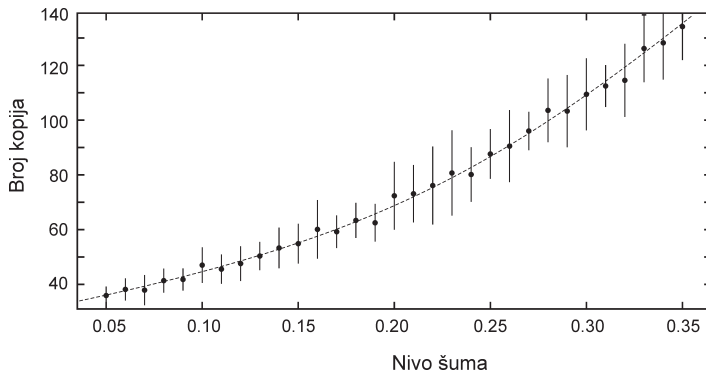
Slika 2. Grafik zavisnosti nivoa sigurnosti od broja kopija stanja, operator provere 1. Vertikalnim linijama je označena greška, određena razlikom između maksimalne i minimalne vrednosti.

Figure 2. Confidence level of method versus number of copies, entanglement witness 1. Vertical lines indicate a measurement error, determined by the difference between maximum and minimum values.



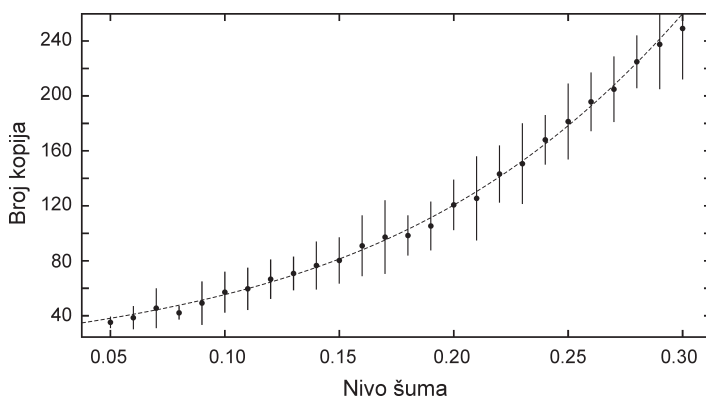
Slika 3. Grafik zavisnosti nivoa sigurnosti od broja kopija stanja, operator provere 2. Vertikalnim linijama je označena greška, određena razlikom između maksimalne i minimalne vrednosti.

Figure 3. Confidence level of method versus number of copies, entanglement witness 2. Vertical lines indicate a measurement error, determined by the difference between maximum and minimum values.



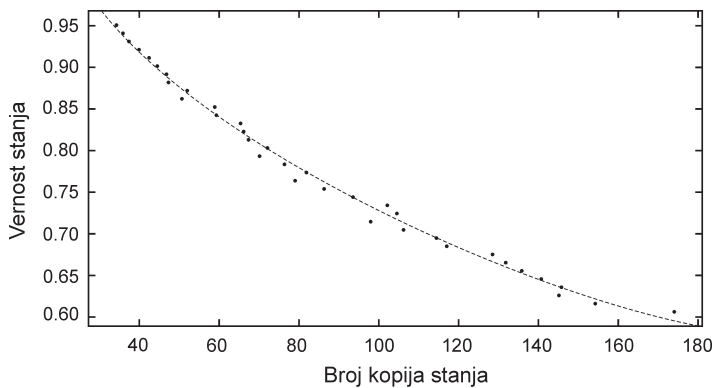
Slika 4. Zavisnost broja kopija potrebnih za stabilizaciju od nivoa maksimalnog šuma, operator provere 1. Označena greška je određena razlikom između maksimalne i minimalne vrednosti.

Figure 4. Number of copies needed for stabilization versus level of maximum noise, witness 1. Measurement error is determined by the difference between maximum and minimum.



Slika 5. Grafik zavisnosti broja kopija potrebnih za stabilizaciju od nivoa maksimalnog šuma, operator provere 2. Označena greška je određena razlikom između maksimalne i minimalne vrednosti.

Figure 5. Number of copies needed for stabilization versus level of maximum noise, witness 2. Measurement error is determined by the difference between maximum and minimum.



Slika 6. Grafik zavisnosti vernosti stanja od broja kopija stanja

Figure 6. Fidelity of a state versus number of states

nivo sigurnosti stabilizovao na vrednosti iznad 99% (slike 2 i 3) od maksimalnog nivoa šuma. Grafici prikazani na slikama 4 i 5 pokazuju ovu zavisnost za obe probabilističke metode. Uviđamo da je zavisnost eksponencijalna u oba slučaja, ali je za prvu metodu potrebno manje kopija za svaki nivo šuma, što je i bilo očekivano nakon dobijenih rezultata sa fiksnim nivoom šuma.

Još jedna bitna veličina je vernost stanja (slika 6). Ova veličina nam pokazuje odstupanje realnog stanja sa šumom od idealnog. Vernost zavisi od modela koji se koristi kao i od količine šuma u našem stanju. Dobijena je zavisnost ove veličine od broja kopija stanja potrebnih za verifikaciju spletenosti za različite nivoe šuma. Dobijena zavisnost pokazuje eksponencijalno

opadanje ove veličine sa brojem kopija, što je u korelaciji sa prethodno dobijenim zavisnostima nivoa šuma od broja kopija stanja. Za 100 kopija stanja vernost dobijen iz simulacija iznosi 0.73, što se poklapa sa eksperimentalnim rezultatima iz referentnog rada (Saggio *et al.* 2018).

## Zaključak

U ovom radu ispitivane su dve probabilističke metode za detekciju spletenosti u kvantnim sistemima koji se koriste u kvantnom računarstvu. Metode su ispitane u uslovima koji nisu idealni, tj. u kojima postoji neki nivo šuma. Korišćena probabilistička metoda primenjena je više puta na svako stanje, i rezultati koji su bili oblika 1 ili 0 u zavisnosti od toga da li spletenost postoji u sistemu ili ne, korišćeni su za dalju analizu.

Prvo su razmatrane zavisnosti sigurnosti probabilističke metode od broja kopija stanja koje pripremamo pri nivou šuma od 25%. Rezultati pokazuju da se za mali broj kopija gotovo ništa ne može reći zbog male sigurnosti i velikih grešaka, što je teorijski i očekivano. Uočeno je i konvergiranje sigurnosti ka 100% pri povećanju broja kopija stanja, i ono se dešava kod obe metode. Potreban broj kopija da se ovo desi jeste oko 100 za prvu metodu a 160 za drugu.

Zatim je nivo šuma variran u opsegu od 5% do 30% i posmatran je broj kopija stanja potrebnih za konvergiranje metode na preko 99% sigurnosti. Dobijeni rezultati pokazuju ekponencijalan rast potrebnih broja kopija sa porastom šuma za obe metode. Korišćenjem prve metode potrebno je manje kopija na svakom nivou maksimalnog šuma.

Na kraju ispitana je i vernost stanja, tj. veličina koja pokazuje odstupanje stanja sa šumom od idealnog stanja. Izračunata je zavisnost ove veličine od broja kopija stanja koje možemo poslati probabilističkoj metodi. U referentnom radu vernost stanja je ispitana za određen broj kopija stanja u metodi, i dobijeni rezultati u našem radu se slažu sa referentnim rezultatom (Saggio *et al.* 2018).

Dalja istraživanja mogla bi obuhvatati proširivanje ove metode na opštije kvantne sisteme.

## Literatura

Chuang I. L., Nielsen M. A. 2010. *Quantum computation and Quantum information*. Cambridge University Press

Dimić A., Dakić B. 2018. Single-copy entanglement detection. *npj Quantum Information*, **4**: 11.


Jungnitsch B., Moroder T., Gühne O. 2011. Entanglement witnesses for graph states: General theory and examples. *Physical Review A*, **84** (3): 032310.

Saggio V., Dimić A., Greganti C., Rozema L., Walther P., Dakić B. 2018. Experimental few-copy multi-particle entanglement detection. *Nature Physics*, **15** (9): 935.

---

*Stefan Bukorović and Marko Krstić*

## Influence of Noise on Probabilistic Methods of detecting Quantum Entanglement

One of the big problems in quantum computing is detecting quantum correlations between particles used as basic units in quantum computers (qubits). The most important correlation is called quantum entanglement and finding efficient methods of detecting it is a topical problem. The goal of this project is constructing these probabilistic methods in a system of 6 qubits and the examination of noise influence on these methods. The special state used in this research is an H-shaped cluster state of 6 qubits. Probabilistic methods are constructed using “witness” operators for this state. The model of noise used in this research is white noise. The results of simulations show that it is possible to detect entanglement in a system with the certainty being more than 99% even when some level of noise is added to the system. With the growth of noise level, the number of copies needed for detecting entanglement grows exponentially. The advantage of using this probabilistic method is a smaller number of copies needed for detecting entanglement in a system, thus this method has significant usage potential in quantum computation. 

## Karakteristike mreže poznanstava u populaciji sa izraženim podgrupama

---

*U ovom radu predstavljamo model rasta društvene mreže motivisan međusobnim upoznavanjem polaznika različitih seminara u Petnici, koju čine dve interagujuće podgrupe pojedinaca. U okviru modela, najpre generišemo mreže početnih podgrupa koristeći dva algoritma: Watts-Strogatz i Barabási-Albert. U prvom slučaju, rezultujuća mreža ima small-world strukturu, koju karakterišu kratak srednji put i visok koeficijent klasterovanja; u drugom slučaju se dobija mreža sa scale-free strukturom, za koju je karakteristično prisustvo dobro povezanih pojedinaca i čiji je koeficijent klasterovanja jednak nuli. Rast mreže se potom realizuje putem postepenog povezivanja pojedinaca iz različitih grupa, pri čemu smo dodatno razmatrale i efekat ostvarivanja novih poznanstava među pojedincima unutar početnih podgrupa logikom preferencijalnog povezivanja, što znači da čvorovi koji imaju više linkova lakše ostvaruju nove veze. Cilj rada je određivanje osobina mreža koje nastaju simulacijom ovih modela. Karakteristike koje se računaju uključuju koeficijent klasterovanja (broj koji opisuje koliko često su susedi prosečnog čvora i međusobno povezani), srednji najkraći put, srednji betweenness centrality (za svaki čvor broj najkraćih puteva koji prolazi kroz taj čvor). Na osnovu rezultata zaključujemo da struktura početnih podgrupa ne utiče na topološke karakteristike rezultujuće mreže u dugovremenskom limesu, već je važan samo ukupan broj ostvarenih veza.*

## Uvod

Mreže poznanstva su sastavni deo naših života. Mnogobrojni primeri uključuju škole, online društvene mreže, mreže citiranosti naučnika, saradnje glumaca, i dr. (Albert i Barabási 2002). Kod analize socijalnih mreža se kroz pristup zasnovan na teoriji kompleksnih mreža proučavaju interakcije među individuama od kojih se mreža sastoji. Pored analize podataka, važno je razviti matematičke modele kojim se te mreže mogu opisati. Razvoj pojednostavljenog modela za cilj ima uspostavljanje kontrolne mreže sa kojim bi realni podaci o društvenim mrežama mogli da se poredi u budućnosti.

Iako različite socijalne mreže imaju različite strukture, mogu se primetiti karakteristike koje su zajedničke za neke klase mreža. Tako se, na primer, mogu uočiti mreže kod kojih se izdvajaju grupe prijatelja koji su unutar sebe bolje povezani nego sa ostatkom mreže. Ovakvu strukturu mreže poznanstva imaju, između ostalog, škole u kojima se kao podgrupe izdvajaju odeljenja, ili Istraživačka stanica Petnica u kojoj su polaznici podeljeni po seminarima. Kod ovakvih populacija je velika verovatnoća da ćemo poznavati osobu ukoliko sa njom imamo puno zajedničkih prijatelja, ali pored toga svako ima dodatne prijatelje koji ne poznaju nikoga iz naše podgrupe (npr. prijatelji iz drugog mesta). Na nivou cele mreže, pojedinci interaguju kako sa pojedincima iz svoje grupe, tako i sa pojedincima iz drugih grupa, pri čemu pravila ostvarivanja linkova unutar i izvan grupe nisu nužno ista.

---

*Isidora Majkić (2002), Pančevo, učenica 2. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu*

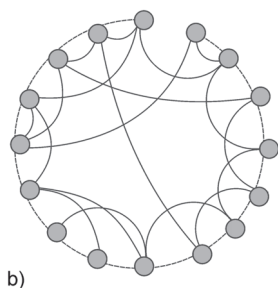
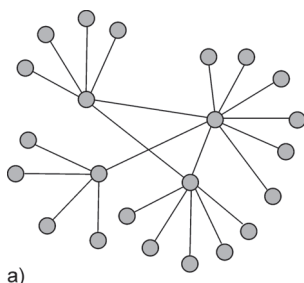
### MENTORKE:

*dr Aleksandra Alorić, Institut za fiziku u Beogradu*

*dr Iva Bačić, Institut za fiziku u Beogradu*

Među najpopularnijim matematičkim modelima mreža koji se koriste za opis socijalnih interakcija su:

- 1) *Scale-free mreže* (slika 1a) koje karakterišu prisustvo dobro povezanih pojedinaca (tzv. habovi) i distribucija broja suseda koja prati stepeni zakon (Albert i Barabási 1999, Barabási 2016),
- 2) *Small-world mreže* (slika 1b) koje karakterišu visok koeficijent klasterovanja i mali srednji najkraći put (Watts i Strogatz 1998, Barabási 2016).



Slika 1. Primeri scale-free (a) i small-world (b) mreže (prema Skorin-Kapov *et al.* 2009)

Figure 1. Examples of a scale-free (a) and a small world (b) network (adopted from Skorin-Kapov *et al.* 2009)

Pošto su prethodno uočene karakteristike ovih mreža, mi smo se bavile karakteristikama mreže koja se sastoji od dve interagujuće podmreže sa navedenim početnim topološkim strukturama. Odabrale smo da razmatramo slučaj dve podmreže, jer se one pojavljuju kao osnovni motiv koji se ponavlja u široj mreži koja se sastoji iz većeg broja podgrupa (Petnica). Poznanstva između takve dve podmreže, tj. pojedinaca iz razli-

čitih mreža, simuliraju se postepenim dodavanjem unapred zadatog broja veza između početnih podmreža.

Imajući u vidu da u realnim društvenim mrežama vremenom nastaju dodatna poznanstva i unutar pojedinačnih mreža, razmatrale smo i slučajeve podmreža kod kojih se u toku evolucije uvode novi linkovi u skladu sa pravilom preferencijalnog povezivanja. Kod preferencijalnog povezivanja, pojedinci koji imaju veći broj poznanstava imaju i veću verovatnoću da stiču nova poznanstva. Izbor ovog pravila je motivisan realnim društvenim procesima, gde neretko dobro povezani pojedinci lakše upoznaju nove osobe, dok pojedinci sa malim brojem poznanika teže stiču nova poznanstva. Najpoznatiji primer je bogati postaju bogatiji, gde će već bogati ljudi lakše i brže ostvarivati nove prihode.

Cilj ovog rada je razvoj algoritma za modeliranje evolucije opisane mreže poznanstava i kvantifikovanje tako dobijene mreže.

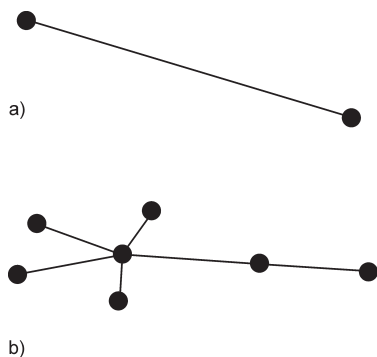
## Model

Model generiše dve podmreže (grupe) karakterističnih topologija, čiji agenti kroz višestruke iteracije ostvaruju međugrupne linkove. Dodatno razmatramo i scenarije u kojima se tokom iteracija i unutar početnih grupa vremenom ostvaruju novi linkovi. Početne podmreže se generišu na dva načina u zavisnosti od željene topologije: kao scale-free mreže i kao small world mreže.

1. **Scale-free mreže** se generišu Barabási-Albert (BA) modelom (Albert i Barabási 2002). BA model počinje od inicijalne mreže sa  $m$  potpuno povezanih čvorova. Opredelile smo se za uobičajenu vrednost parametra  $m = 2$  (slika 2a). Rast mreže se ostvaruje pojedinačnim dodavanjem novih čvorova koji uspostavljaju po jednu vezu sa nekim od čvorova iz postojeće mreže (slika 2b).

Svaki novi agent bira  $i$ -tog agenta u mreži. Sa  $k_i$  označava se broj njegovih suseda. Verovatnoća  $P(i)$  da će se novi čvor vezati za postojeći  $i$ -ti čvor je zadata formulom  $P(i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$ , gde

imenilac predstavlja ukupan broj suseda svakog pojedinca u mreži, što odgovara dvostrukom broju ostvarenih linkova. Pošto je verovatnoća



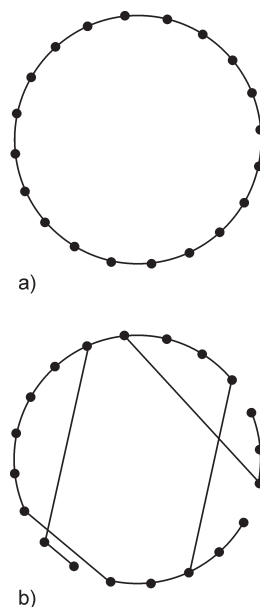
Slika 2. Vizualizacija BA modela: počinje se od mreže sa  $m = 2$  povezana agenta (a), nakon čega se novi agenti uključuju preferencijalnim povezivanjem (b). Slika ilustruje stanje posle 5 iteracija.

Figure 2. BA model visualization: starting from a network with  $m = 2$  connected agents (a), new agents are introduced by preferential attachment (b). The figure illustrates the state after 5 iterations.

direktno proporcionalna broju suseda, najverovatnije je da će se novi agent povezati sa čvorom koji ima najviše linkova, što rezultuje pojavom najpopularnijih agenata. Ovakvu raspodelu objašnjava i stepeni zakon kojim opisujemo distribuciju broja suseda, jer veliki broj čvorova ostvaruje mali broj veza, dok malobrojni „poznati” imaju veliki broj poznanika, kao na slici 1a.

2. **Small world mreže** se generišu Watts-Strogatz (WS) modelom (Watts i Strogatz 1998). U WS modelu se polazi od lanca u kojem svaki čvor ima  $k$  suseda (u našem slučaju  $k = 2$ , kao na slici 3a). Potom se nasumično odabrani linkovi prepovezuju sa verovatnoćom  $r \in (0.001, 0.1)$  (slika 3b). U radu smo fiksirale  $r = 0.05$ , ali očekujemo da su rezultati za druge vrednosti koje pripadaju pomenutom intervalu uporedivi sa našim.

Međugrupni linkovi se stvaraju u svakoj iteraciji nasumičnim povezivanjem agenata različitih grupa sa unapred zadatom verovatnoćom, kao na slici 4 gde su prikazana 2 međugrupna linka. Mi smo fiksirale vrednosti verovatnoće ostvarivanja linkova na dve vrednosti:  $p = \{0.001, 0.0001\}$ . Važno je da verovatnoća za međuseminarsko upoznavanje ne bude velika, jer se



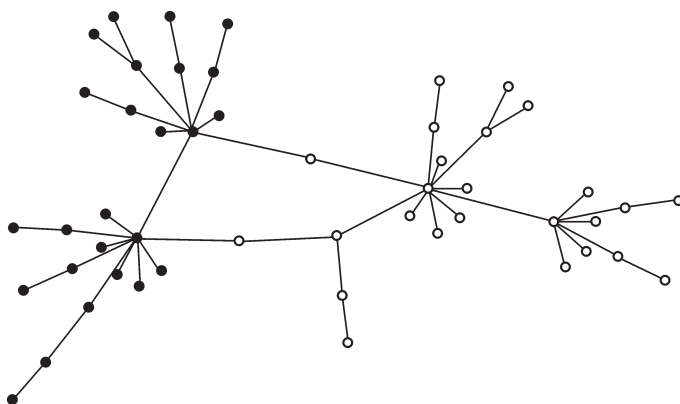
Slika 3. Vizualizacija WS modela: počinje se od regularnog lanca u kom svaki čvor ima dva suseda (a), nakon čega se linkovi prepovezuju sa unapred zadatom verovatnoćom  $r$  (b); na slici je ta verovatnoća  $r = 0.2$  (prema Cohen *et al.* 2009).

Figure 3. WS model visualization: starting from a regular ring lattice where each node has two neighbours (a), links are rewired with given probability  $r$  (b); in Figure  $r = 0.2$  (adopted from Cohen *et al.* 2009).

potpuna poveznost između dve podgrupe dobija ukoliko je  $p > \frac{(\text{broj agenata u podgrupi})^2}{2 \times (\text{broj vremenskih iteracija})}$ .

U slučajevima kada se stvaraju novi linkovi unutar početnih grupa, pojedinci se spajaju po logici preferencijalnog povezivanja, tj. „poznatiji” čvorovi lakše dobijaju nove susede. Ovaj proces smo implementirale B modelom, kod kojeg se čvorovima već postojeće mreže dodaju novi linkovi koji se ostvaruju sa nekim  $i$ -tim čvorom sa istom verovatnoćom kao u BA modelu,  $P(i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$ . Za razliku od scenarija koji odgovara BA modelu, kod B modela mreža ne raste. Kao rezultat te razlike, distribucija broja





Slika 4. Dve scale free mreže i prikaz nasumičnog međugrupnog povezivanja

Figure 4. Two scale free networks with randomly placed connections between them

suseda mreža generisanih samo B modelom ne prati stepeni zakon.

U svakoj od razmatranih varijanti, podmreže su jednake veličine i sastoje se od 1000 čvorova, tako da se cela mreža sastoji od 2000 čvorova. Broj termina je fiksiran na 100, gde pod *terminom* smatramo jednu priliku za upoznavanje, tj. jednu iteraciju.

Razlikujemo četiri modifikacije modela:

1. dve interagujuće scale-free podmreže (BA)
2. dve interagujuće scale-free mreže koje se menjaju kroz vreme (BA+B)
3. dve interagujuće small-world mreže (WS)
4. dve interagujuće small-world mreže koje se menjaju kroz vreme (WS+B)

## Rezultati i diskusija

Da bismo topološki okarakterisale dobijene mreže, posmatrane su sledeće tri veličine:

1. *Srednji najkraći put* – predstavlja srednju vrednost svih najkraćih rastojanja između svaka dva para čvorova mreže.
2. *Betweenness centrality* (BC) – za svaki čvor određuje koliko najkraćih puteva je prošlo kroz taj čvor; posmatrane su srednje vrednosti u svakoj iteraciji.
3. *Koeficijent klasterovanja* – odnos ostvarenih i mogućih broja tripleta agenata koji su međusobno povezani svaki sa svakim.

Predstavljeni su rezultati dobijeni usrednjavanjem pet realizacija svake modifikacije modela za iste parametre verovatnoće ostvarivanje međuseminarskih linkova, konkretno  $p = \{0.001, 0.0001\}$ .

## Srednji najkraći put

Predloženi model predstavlja jednostavan model rasta, koji jedan deo svojih veza, tj. međugrupne veze, ostvaruje nasumično. To nas je navelo da uporedimo vrednosti za srednji najkraći put za mreže generisane našim modelom i za uobičajene nasumične mreže (mreže kod kojih su sve veze među čvorovima raspoređene nasumično), i da istražimo da li su neke karakteristike novonastalih mreža drugačije od odgovarajućih nasumičnih kontrolnih mreža.

Važno je napomenuti da se nasumične mreže određuju brojem agenata i brojem linkova. Znamo da je broj agenata konstantan, ali broj linkova raste svakom iteracijom, i to različitom dinamikom ukoliko se uspostavlja dodatna preferencijalna povezivanja unutar podgrupa B modelom. Stoga razlikujemo dve nasumične mreže čiji trend pratimo:

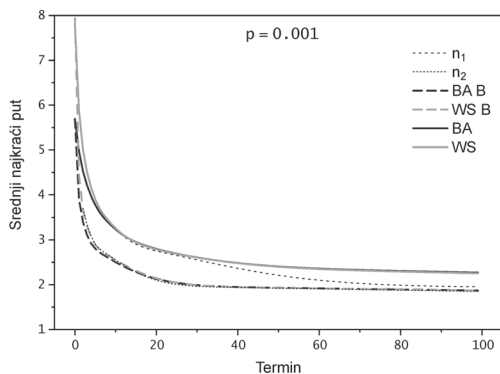
- nasumične mreže sa

$$n_1(t) = 2 \cdot 1000 + t \cdot p \cdot 1000^2 \quad (1)$$

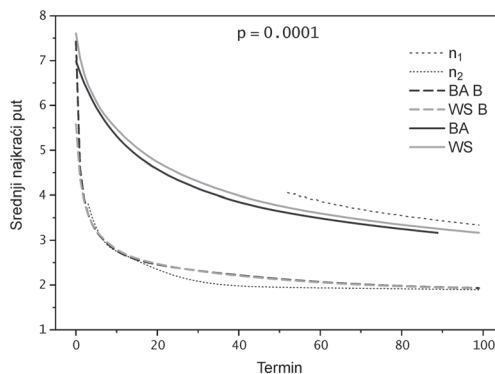
linkova ( $t$  označava vreme, odnosno termin); ovoliko linkova imaju mreže generisane našim modelom bez dodatnog povezivanja unutar grupe (po 1000 početnih linkova u inicijalnim podgrupama i u svakoj iteraciji se ostvaruje  $100 \cdot p$  procenata od svih mogućih linkova koji zahtevaju agente iz različitih podgrupa)

- nasumične mreže sa

$$n_2(t) = 2 \cdot 1000 + t \cdot p \cdot 1000^2 + (t-1) \cdot 2 \cdot 1000 \quad (2)$$



a)



b)

Slika 5. Srednji najkraći put u funkciji vremena, pri verovatnoćama ostvarivanja međugrupnih linkova  $p = 0.001$  (a) i  $p = 0.0001$  (b);  $n_1$  i  $n_2$  su određeni formulama (1) i (2), respektivno.

Figure 5. Average shortest path as a function of time, for inter-group link probabilities  $p = 0.001$  (a) and  $p = 0.0001$  (b);  $n_1$  and  $n_2$  are defined by (1) and (2), respectively.

linkova; ovaj broj linkova se javlja ukoliko postoji dodatno (preferencijalno) povezivanje unutar grupa (pored  $n_1$  linkova, tu su i linkovi ostvareni B modelom, svakom iteracijom po 1000 novih linkova u obe podgrupe, počev od druge po redu).

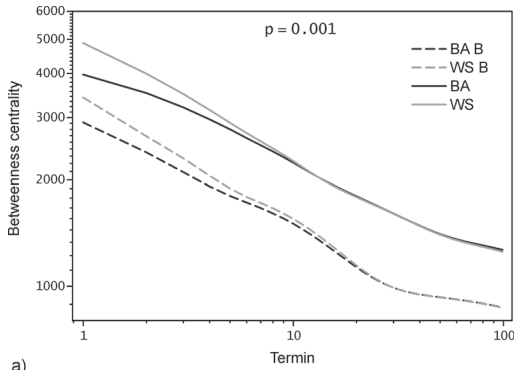
Sa slike 5 zaključujemo da nakon velikog broja povezivanja struktura, veza među čvorovima ne zavisi od toga kako su početno bile povezane podgrupe, pošto se krive koje odgovaraju mrežama čije su podgrupe generisane i BA i WS modelom poklapaju. Ipak, prisustvo B modela utiče na srednji najkraći put mreža. Ako B model nije uključen, unutar podgrupa se neće ostvarivati druge veze osim početnih, tako da će srednje najkraće rastojanje dostići neku najmanju graničnu vrednost ispod koje neće ići, koja nije 1, jer se inicijalno svi čvorovi unutar podgrupa neće međusobno povezati, pa će najkraći put između njih uvek morati da bude preko nekih drugih čvorova, bilo iz svoje, bilo iz druge podgrupe. Ovo svakako nije slučaj kod mreža gde postoji dodatno preferencijalno povezivanje, ili kod nasumičnih mreža, koje će u dugoročnom vremenskom limesu dostići topologiju u kojoj su svi povezani sa svima, što vodi tome da je najkraći put između svaka dva čvora 1, pa je i srednji najkraći put 1. Tako se mreže generisane našim modelom koji ne uključuje B model, u dugoročnom

vremenskom limesu značajno razlikuju od njihovih kontrolnih mreža. Ovo uočavamo na slici 5a, ali bi se isto uočilo i u slučaju manjeg  $p$ , samo posle većeg broja iteracija.

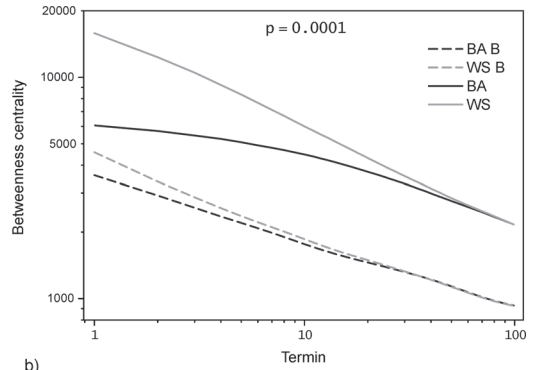
Razlike se javljaju i u kratkoročnom vremenskom limesu i to u kvalitativnom smislu, jer nasumične mreže ne mogu podstići da je mreža povezana, odnosno javljaju se odvojene komponente, pa srednji najkraći put kod takvih mreža ni ne postoji, što kod generisanih mreža našim modelom nije slučaj.

## Betweenness centrality (BC)

Na slici 6 prikazana je zavisnost srednjeg BC u funkciji vremena. Pošto na log-log graficima uočavamo linearnu zavisnost, zaključujemo da BC eksponencijalno opada kako se broj linkova povećava. Opadanje je očekivano jer kako se mreža zgušnjava, tako se najkraći put između dva proizvoljna čvora smanjuje, odnosno između njih postoji manji broj čvorova. Takođe, ponovo se javlja separacija slučajeva samo po tome da li je B model uključen ili ne, odnosno da li postoje dodatna preferencijalna povezivanja unutar podgrupa, dok topologija početnih podgrupa nema uticaj. Ovo se događa jer su kod mreža gde postoji dodatno preferencijalno povezivanje habovi još izraženiji, pošto u svakoj iteraciji dobijaju



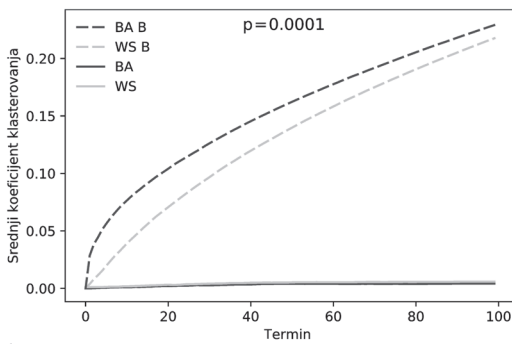
a)



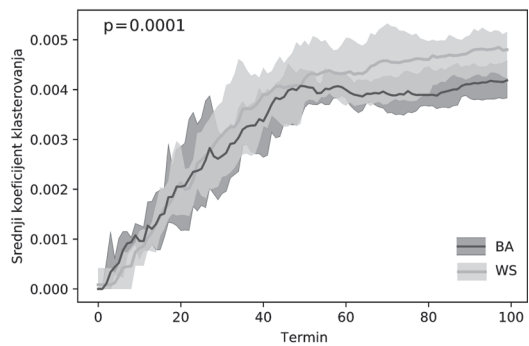
b)

Slika 6. Srednje vrednosti za betweenness centrality u funkciji vremena, pri verovatnoćama ostvarivanja međugrupnih linkova  $p = 0.001$  (a) i  $p = 0.0001$  (b)

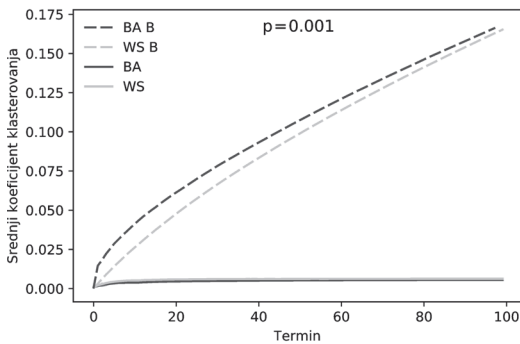
Figure 6. Average betweenness centrality as a function of time, for inter-group link probabilities  $p = 0.001$  (a) and  $p = 0.0001$  (b)



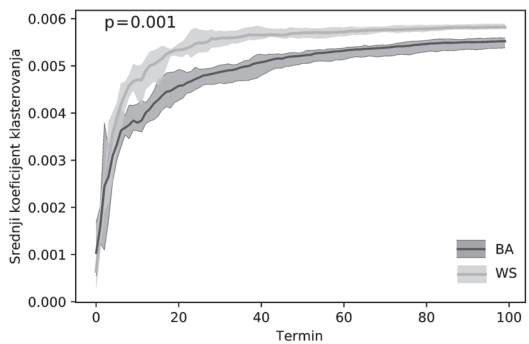
a)



b)

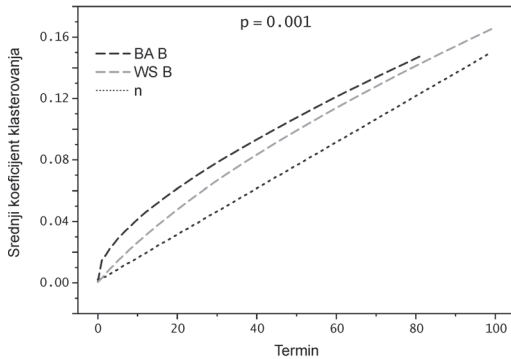


a)

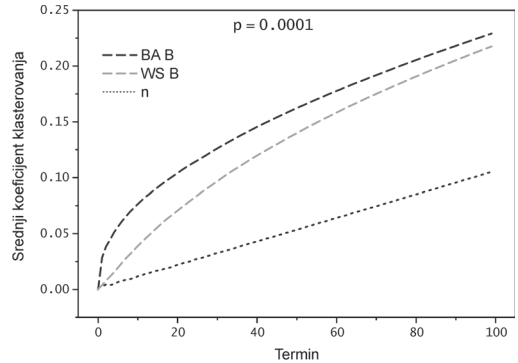


Slika 7. Srednji koeficijent klasterovanja u funkciji od vremena, pri verovatnoćama ostvarivanja međugrupnih linkova  $p = 0.001$  (a) i  $p = 0.0001$  (b). Sa desne strane su uvećani BA i WS grafici.

Figure 7. Average clustering coefficient as a function of time, for inter-group link probabilities:  $p = 0.001$  (a), and  $p = 0.0001$  (b). Magnified BA and WS plots are given on the right side.



a)



b)

Slika 8. Srednji koeficijent klasterovanja u funkciji od vremena za nasumičnu mrežu ( $n$ ), kod koje je broj linkova određen formulom (2), i mreža generisanih našim modelom (BA B i WS B), pri verovatnoćama ostvarivanja međugrupnih linkova  $p = 0.001$  (a) i  $p = 0.0001$  (b)

Figure 8. Average clustering coefficient as a function of time for a random network ( $n$ ), with the number of links defined by formula (2), and for networks generated by our model (BA B and WS B), for inter-group link probabilities  $p = 0.001$  (a) and  $p = 0.0001$  (b)

veliki broj novih suseda. To dovodi do toga da većina najkraćih puteva prolazi kod njih, dok većina ostalih čvorova nema puno najkraćih puteva koji prolaze kroz njih, što samim tim dovodi do manje srednje vrednosti.

## Srednji koeficijent klasterovanja

Sa slike 7 vidimo da kada postoji dodatno povezivanje unutar podgrupa (B model), koeficijent klasterovanja raste sa vremenom, dok bez B modela nakon nekog broja iteracija koeficijent klasterovanja dostiže stabilnu vrednost (grafici desno). Uočavamo da konačna vrednost koeficijenta klasterovanja u dugovremenskom ne zavisi od početne topologije mreže.

Poređenjem slika 7a i 7b vidimo da se stabilna vrednost koeficijenta klasterovanja mreža bez dodatnog povezivanja unutar podgrupa brže postiže za veće verovatnoće sklapanja međugrupnih linkova (što ima smisla s obzirom na to da očigledno brže dolazi do zatvaranja svih mogućih trouglova).

Dodatno smo poredile koeficijent klasterovanja naših mreža sa B modelom sa nasumičnim mrežama sa odgovarajućim brojem linkova, tj. sa  $n_2$  linkova (slika 8). Zanimljivo je što je koeficijent klasterovanja veći kod mreža generisanim našim

modelom nego kod nasumičnih mreža, čak i kod onih sa početnom topologijom podgrupa koji odgovara scale free mrežama, koje same po sebi nemaju koeficijent klasterovanja, a i da on raste i značajnije se razlikuje od koeficijenta klasterovanja njene kontrolne nasumične mreže kada je  $p$  manje (slika 8).

Konačno, možemo sumirati da polazna struktura ima svoju ulogu samo u početnim terminima, i to se posebno očitava kod koefijenta klasterovanja. Međutim, nakon dovoljno dugog vremenskog perioda posmatrane mreže se razlikuju samo na osnovu toga da li postoji dodatno povezivanje unutar grupa. Interesantno za naš model je da generiše mreže sa većim koeficijentom klasterovanja od nasumičnih mreža sa istim brojem čvorova i veza.

## Zaključak

Motivisane mrežama poznanstava koje se sastoje od dobro povezanih podgrupa, kao što je Petnica, bavile smo se modelom rasta mreže sa dve izražene podgrupe i karakteristikama tako generisanih mreža. Polazna tačka našeg modela su dve razdvojene podgrupe čije inicijalne topologije mogu biti scale-free ili small-world. Zatim

se, sa određenom verovatnoćom, u iteracijama dodaju nove međugrupne veze kojima se simulira postepeno upoznavanje osoba iz različitih podgrupa. Takođe, razmatramo slučaj kada se i unutar podgrupa kroz iteracije ostvaruju nova poznanstva logikom preferencijalnog povezivanja, i poredimo ishode ova dva scenarija.

Rezultati pokazuju da topologija početnih podgrupa utiče na karakteristike mreže samo u početnim iteracijama, dok njen uticaj vremenom slabi, kako raste broj linkova u celoj mreži.

S druge strane, ukoliko se istovremeno preferencijalnim povezivanjem uvode nove veze i unutar podgrupa (B model), rezultujuća topologija povezanosti će se kvalitativno razlikovati.

Srednji najkraći put u svakom od razmatranih scenarija eksponencijalno opada, ali je povezanost cele mreže veća ukoliko postoji dodatno povezivanje unutar podgrupa. Sličan zaključak je i za betweenness centrality – ovaj parametar pokazuje da je protok informacija efikasniji ukoliko uključimo B model. Pomenuta kvalitativna razlika se najbolje ogleda u ponašanju koeficijenta klasterovanja: kada se novi linkovi uspostavljaju samo između podgrupa, a ne i unutar njih, koeficijent klasterovanja ostaje blizak nuli, dok dodatno povezivanje unutar podgrupa znatno pospešuje klasterovanje.

Poređenjem mreža generisanih našim modelom sa nasumičnim mrežama, zaključujemo da je trend ponašanja srednjeg najkraćeg puta isti ako nema dodatnog preferencijalnog povezivanja, ali drugačiji ako B model nije uključen. Koeficijent klasterovanja se svakako razlikuje.

Očekujemo da se rezultati mogu generalizovati na mreže sa većim brojem podgrupa. Realnije modeliranje petničke mreže poznanstava svakako bi podrazumevalo razvoj mreže sa većim brojem podgrupa, pri čemu podgrupe interaguju postepeno, a ne istovremeno, odražavajući činjenicu da se seminari održavaju u različitim terminima, i da prilika za upoznavanje ima manje.

**Zahvalnost.** Zahvaljujem se svojim mentorima Ivi Bačić i Aleksandri Alorić na ogromnoj pomoći i još većoj posvećenosti prilikom rada na ovom projektu.

---

## Literatura

Albert R., Barabási L. A. 2002. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, **74** (1): 47.

Albert R., Barabási L. A. 1999. Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, **286** (5439): 509.

Barabási L. A. 2016. *Network Science*. Cambridge: Cambridge University Press

Cohen R., Dawid D. J., Kardar M., Bar-Yam Y. 2009. Unusual percolation in simple small-world networks. *Physical Review E: Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, **79** (6): 066112.

Skorin-Kapov N., Tonguz O. K., Puech N. 2009. Toward Efficient Failure Management for Reliable Transparent Optical Networks. *IEEE Communications Magazine*, **47** (5): 72.

Watts D., Strogatz S. 1998. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, **393** (6684): 440.

---

*Isidora Majkić*

## Features of a Social Network with Apparent Subgroup Structure

In this paper, we present a model for the growth of a social network with two interacting subgroups, with the goal to understand how students of different seminars form connections in Petnica Science Center.

Within the model, we generate the initial subgroup networks using either the Watts-Strogatz or the Barabási-Albert algorithm. In the former case, we obtain small-world networks, characterized by a short average path length and a high clustering coefficient, while in the latter case, we obtain scale-free networks, characterized by the presence of well-connected individuals and a zero clustering coefficient. The network growth is realized by gradually introducing links be-

tween individuals from different subgroups. Additionally, we consider the effect of forming new links between individuals from the same initial subgroups according to the preferential attachment rule, whereby popular individuals are more likely to acquire new links. The aim of the project is to determine the characteristics of networks that are generated by these models.

The relevant characteristics include the clustering coefficient (a number that describes how often the neighbours of the average node are also connected), mean shortest path, betweenness centrality (number of shortest paths passing through a given node).

Our results indicate that the structure of the initial subgroups does not affect the mean shortest path and the mean betweenness centrality, but affects the mean clustering coefficient of the resulting network in the large-time limit, whereas the number of introduced connections considerably influences the outcome. 