

Simulacija idealnih detektora gravitacionih talasa

Nakon prvog direktnog detektovanja gravitacionih talasa 2015. godine, istraživanja gravitacionih fenomena stekla su pažnju šire javnosti. Proučavanje polarizacije gravitacionih talasa može se iskoristiti za proveravanje valjanosti različitih metričkih teorija gravitacije, od kojih je najvažnija Ajnštajnova Opšta teorija relativnosti. U radu je uveden analitički model za opisivanje ravnog monohromatskog gravitacionog talasa male amplitude pomoću promenljive Rimanove metrike prostora, prvo za talas koji se prostire duž koordinatne ose, a zatim je model uopšten za talas bilo kakvog pravca prostiranja. Potom je ispitivana interakcija između detektora i talasa. Dati su dvodimenzionalni i trodimenzionalni modeli idealnog detektora. Prvo je razmatran slučaj ravanskog detektora u obliku kružnice, koji je zatim uopšten do trodimenzionalnog sfernog idealnog detektora. Određena je funkcija odziva detektora na gravitacioni talas date polarizacije i pravca prostiranja. Dalje proučavanje analitičkih rezultata izvršeno je korišćenjem dve simulacije. Prva prati ponašanje idealnog sfernog detektora koji intezueguje sa gravitacionim talasom. Druga prati ponašanje sistema idealnih detektora raspoređenih po Zemlji analogno stvarnim detektorima. Predložene su mogućnosti za dalji razvoj i implementaciju modela u određivanju preciznosti merenja sistema detektora.

Uvod

Teorije gravitacije i sam koncept gravitacije su se značajno menjali kroz vreme. Dugo je smatrano da je gravitacija sila koja deluje između tela sa masom, a značaju prekretnicu uveo je Ajnštajn 1915. godine u svojoj Opštoj teoriji relativnosti (OTR) predstavljajući gravitaciju kao posledicu zakrivljenosti prostorvremena (Misner *et al.* 1973; Vojinović 2019). Pošto se informacija o zakrivljenosti prostorvremena prenosi konačnom brzinom, a zavisi od rasporeda mase u prostoru, prilikom pomeranja tela sa masom nastaju gravitacioni talasi kao posledica konačne brzine prostiranja te informacije (Vojinović 2000). Oni su vrlo interesantni za posmatranje zbog mogućnosti da se koriste za testiranje raznih teorija gravitacije. U tom testiranju značajnu ulogu ima polarizacija talasa, kojom ćemo se mi baviti.

Za predstavljanje četvorodimenzionalnog prostorvremena u kom ćemo modelovati gravitacioni talas koristićemo geometriju Rimanovih prostora (Misner *et al.* 1973; Vojinović 2010a, 2010b). U analizu ćemo uzimati infinitezimalno bliske tačke koje će imati isti metrički tenzor. Gravitacioni talas ćemo modelovati kao perturbaciju metričkog tenzora i razmtraćemo ravan, monohromatski talas male amplitude sa tri parametra: talasni četvorovektor, početna faza i tenzor polarizacije.

Najpre ćemo modelovati idealni dvodimenzionalni detektor. Model ćemo potom uopštiti prelaskom na trodimenzionalni detektor i na taj način ćemo ostvariti mogućnost da detektor registruje talase koji dolaze duž svih pravaca, a ne samo duž z -ose, kao što je bio slučaj kod 2D

Dušan Cvijetić (2000), Pančevo, učenik 4. razreda Gimnazije „Uroš Predić” u Pančevu

Maja Stošić (2000), Čačak, učenica 4. razreda Gimnazije u Čačku

MENTOR: dr Marko Vojinović, Institut za fiziku Univerziteta u Beogradu

detektora. Modeliranje trodimenzionalnog detektora i računanje njegove funkcije odziva na proizvoljan ravan monohromatski gravitacioni talas predstavlja originalni doprinos i centralni rezultat ovog rada.

Nakon teorijskih ispitivanja, preći ćemo na simuliranje proučavanih pojava. Prvo ćemo simulirati odziv idealnog trodimenzionalnog sfernog detektora na talas i rezultat simulacije će biti skup osamnaest grafika koji prikazuju kretanje pojedinačnih tačaka tokom vremena za zadate parametre gravitacionog talasa. U drugoj simulaciji pozabavićemo se odzivom više idealnih sfernih detektora raspoređenih po sferi, tako da budu analogni stvarnim detektorima koji postoje ili su u planu da se izgrade na Zemlji.

Teorijski opis gravitacionih talasa

Gravitacija

Savremena teorija relativnosti smatra da postoje četiri dimenzije fizičkog prostora: tri su prostorne i jedna vremenska. Ono što bitno razlikuje OTR od Njutnove teorije jeste priroda gravitacije. Naime, dok je Njutn smatrao da gravitacija predstavlja silu koja deluje između masivnih tela, Ajnštajn je u svojoj teoriji modelovao gravitacione pojave kao posledicu zakrivljenosti prostorvremena.

Ajnštajnovi prostorvreme se može savijati pod dejstvom masivnih tela. Što je veća masa u nekom delu prostorvremena, zakrivljenje će biti veće. Informacija o zakrivljenosti se prenosi brzinom svetlosti — zato se kretanje mase ne registruje trenutno u svim tačkama prostora. Ovo kašnjenje informacije o zakrivljenosti kao posledicu ima stvaranje gravitacionog talasa. Ajnštajn je njegovo postojanje teorijski predvideo još 1916. godine (Misner *et al.* 1973).

Od četiri poznate interakcije, gravitaciona interakcija važi za najslabiju u prirodi i vidno se ispoljava tek na kosmičkom nivou, pa je detekcija gravitacionih talasa predstavljala veliki izazov. Oni su eksperimentalno prvi put direktno detektovani 14. septembra 2015. godine u sklopu projekta Laser Interferometer Gravitational-

-Wave Observatory (LIGO) (Abott *et al.* 2016). Detekcija gravitacionog talasa, za koji je utvrđeno da potiče od sistema dve crne rupe i koji je emitovan pre oko milijardu godina, izvršena je uređajem koji radi po principu Fabri-Perot-Majkelsonovog interferometra.

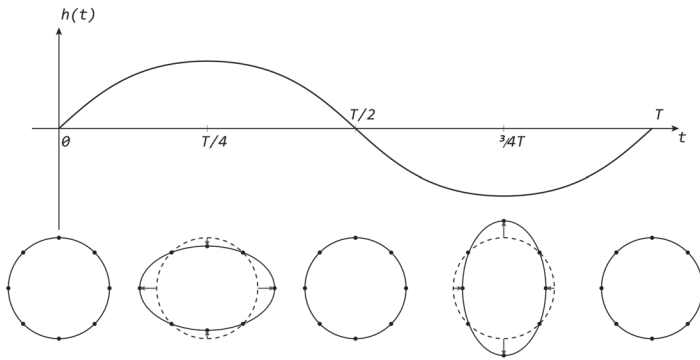
Polarizacija gravitacionih talasa

Gravitacioni talasi mogu izazvati različite oscilacije prostorvremena. Za talase koji izazivaju različitu vrstu pomeranja kažemo da imaju različitu polarizaciju (Vojinović 2000).

Efekat polarizacije talasa analogan je istom efektu u elektrodinamici. Posmatrajmo elektromagnetni talas koji se prostire duž z -ose Dekartovog koordinatnog sistema. Uvek je moguće razbiti taj talas na superpoziciju dve linearno polarizovane komponente, polarizovane duž ortova \vec{e}_x i \vec{e}_y , što znači da probna čestica koju udari talas polarizovan duž x -ose počinje da osciluje duž iste ose gledano iz inercijalnog sistema reference. Analogno se dešava i sa talasom polarizovanim duž y -ose.

Zbog prirode gravitacionih talasa, za ispitivanje njihove polarizacije potrebno je pratiti kretanje više probnih čestica. Posmatrajući način na koji talas deformiše sferu u koordinatnom početku, možemo izdvojiti šest vrsta polarizacije: dve transverzne kvadrupolne (engl. transverse quadrupolar – TQ), dve longitudinalne kvadrupolne (engl. longitudinal quadrupolar – LQ), longitudinalnu istegljujuću (engl. longitudinal stretch – LS) i transverzalnu dišuću (engl. transverse breathing – TB).

Posmatrajmo sada gravitacioni talas koji se kreće duž z -ose. Neka je to talas koji je TQ polarizovan. Postavimo li sada osam probnih čestica na kružnicu u xy -ravni, možemo posmatrati njihovo kretanje kad na njih pada gravitacioni talas (slika 1). U jednom trenutku, čestice koje leže na x -osi počee međusobno da se udaljavaju, dok će se one na y -osi približiti. Ostale čestice kretaće se na odgovarajući način tako da prostor ostane kontinualan i od kružnice nastane elipsa. Nakon pola perioda, situacija će biti obrnuta – čestice sa y -ose počee da se udaljavaju, a na x -osi približavaju. Tako nastaje nova elipsa čiji fokusi, umesto na x -osi, leže na y -osi (prva elipsa bila je „položena”, druga „uspravna”).



Slika 1. Vizuelizacija ponašanja čestica na krugu pod uticajem gravitacionog talasa. $h(t)$ je elongacija, dok je T period oscilovanja talasa.

Figure 1. Visualisation of movement of particles hit by a gravitational wave. $h(t)$ is elongation and T is period.

Kao što vidimo, gravitacioni talas ne može se klasifikovati ni kao čisto longitudinalni, ni kao čisto transverzalni, jer je moguće da ima zastupljena oba tipa polarizacije.

Kao što ćemo detaljno prodiskutovati niže, OTR predviđa postojanje transverzalnih kvadrupolnih polarizacija, dok su ostale u okviru njenog modela nemoguće. Zato bi detekcija gravitacionih talasa čija se polarizacija ne uklapa u zadati okvir bila definitivan dokaz neispravnosti Ajnštajnovе teorije. Bilo kako bilo, talasi koji se ne uklapaju u OTR još nisu (a veći deo naučne zajednice smatra da nikada i neće biti) detektovani.

Metrika i rastojanje

Svako proučavanje prirodnih pojava koje uključuje kvantifikaciju i merenje nekih veličina zasnovano je na određenom matematičkom modelu. Pre Ajnštajna, za opisivanje realnog prostora koristio se Euklidski geometrijski prostor, izotropan i homogen, i nije uključivao u sebe vremensku koordinatu – ona je uvek posmatrana odvojeno i nezavisno. Uvođenjem četvorodimenzionalnog prostorvremena nastala je potreba za stvaranjem novog modela kojim bi se stvarnost mogla opisati.

Za matematičko predstavljanje Ajnštajnovog prostorvremena koristi se geometrija Rimanovih prostora (Vojinović 2010a, 2010b, 2019). Rastojanje između dve infinitezimalno bliske tačke računamo pomoću formule:

$$(ds)^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 dx^{\mu} g_{\mu\nu} dx^{\nu} \quad (1)$$

gde su dx^{μ} , dx^{ν} infinitezimalna rastojanja duž luka po osama označenim odgovarajućim indeksima. Kako je naš geometrijski prostor četvorodimenzionalan (fizički gledano, sastoji se od tri prostorne i jedne vremenske dimenzije), indeksi μ i ν kreću se od 0 do 3. Matrica $g_{\mu\nu} \in \mathcal{M}(4, \mathbb{R})$ naziva se metrički tenzor i zadata je kao:

$$g_{\mu\nu}(x) = \begin{bmatrix} g_{00}(x) & \cdots & g_{03}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{30}(x) & \cdots & g_{33}(x) \end{bmatrix} \quad (2)$$

gde je $x = [x^0 \ x^1 \ x^2 \ x^3]$ matrica koordinata tačke za koju posmatramo rastojanje u prostorvremenu. Pošto su dve tačke koje posmatramo infinitezimalno blizu, imaće isti metrički tenzor. Matrica $g_{\mu\nu}$ je simetrična, pa za njene članove važi $g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$. U daljem tekstu ćemo se pridržavati Ajnštajnovе konvencije o sumiranju prema kojoj se oznaka za sumu po ponovljenom indeksu ne piše, već se podrazumeva.

Posmatrajmo dve tačke na nekom rastojanju koje nije infinitezimalno. Kako sada više ne govorimo o ravnom, Euklidskom prostoru, nema smisla ni da govorimo o duži kao najkraćem rastojanju između dve tačke. Razdaljina između tačaka može se definisati samo kao dužina neke krive c koja ih povezuje i, da bi se izračunala, u opštem slučaju je potrebno rešiti integral:

$$s = \int_c ds \quad (3)$$

Funkciju krive po kojoj računamo rastojanje između tačaka zadaćemo sistemom jednačina:

$$x^{\mu} = z^{\mu}(\tau) \quad (4)$$

tako svodeći koordinate svake tačke na krivoj na funkciju po parametru τ . Zamenjujući (1) i (4) u integral (3), podrazumevajući da početna i krajnja tačka na krivoj odgovaraju parametrima $\tau = 0$ i $\tau = 1$, redom, dobijamo jednačinu:

$$s = \int_{\tau=0}^{\tau=1} \sqrt{g_{\mu\nu}(z(\tau)) \frac{dz^{\mu}(\tau)}{d\tau} \frac{dz^{\nu}(\tau)}{d\tau}} d\tau \quad (5)$$

koju možemo koristiti za računanje neinfinitesimalnih rastojanja u neeuclidskom prostoru.

Modelovanje gravitacionih talasa

Gravitacioni talas se može matematički modelovati kao promenljiva metrika prostorvremena. U tom slučaju, metrički tenzor će biti zadat funkcijom koja zavisi od koordinata, i ima sledeći oblik:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad (6)$$

Ovde je $\eta_{\mu\nu}(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ metrika

prostora Minkovskog iz specijalne teorije relativnosti i konstantna je, dok $h_{\mu\nu}(x)$ opisuje gravitaciono polje i naziva se perturbacija metričkog tenzora. Kroz njeno definisanje postizemo modelovanje gravitacionih talasa različitih karakteristika.

Pojednostavljeni model koji koristimo u ovom radu opisuje ravan, monohromatski gravitacioni talas koji je opisan perturbacijom metričkog tenzora koja je određena kao:

$$h_{\mu\nu}(x) = P_{\mu\nu} \Re(e^{-i(k_{\lambda}x^{\lambda} + \Phi)}) \quad (7)$$

$P_{\mu\nu}$ je tenzor polarizacije kojim se opisuje tip polarizacije gravitacionih talasa. U našem slučaju to je simetrična i konstantna matrica dimenzija 4×4 . Prvi član u eksponentu se može zapisati kao:

$$k_{\lambda}x^{\lambda} = -\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r} \quad (8)$$

gde je k_{λ} talasni četvorovektor čija je nulta komponenta kružna frekvencija ω , t je vreme, a \vec{r} vektor položaja tačke koju posmatramo u odnosu na koordinatni početak. Drugi član u eks-

ponentu, Φ , određuje početnu fazu gravitacionog talasa.

U našem pojednostavljenom modelu ispitujemo samo talase malih amplituda za koje važi $|h_{\mu\nu}(x)| \ll 1$. Zbog toga što perturbacija metričkog tenzora treba da opiše talas, ona zadovoljava relativističku talasnu jednačinu (Vojinović 2000, 2019):

$$\left(-\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2} \right) h_{\mu\nu}(x) = 0 \quad (9)$$

iz koje sledi:

$$|\omega| = \|\vec{k}\| \quad (10)$$

Ova će činjenica biti od značaja u našem daljem ispitivanju.

Tenzor polarizacije

U opštem slučaju tenzor polarizacije mora biti simetričan i zadajemo ga kao:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & b & d & e \\ 0 & c & e & f \end{bmatrix} \quad (11)$$

gde su a, b, c, d, e, f proizvoljne konstante normirane na interval od 0 do 1 čijim vrednostima zadajemo zastupljenost određenog moda polarizacije u talasu koji opisujemo. Ispostaviće se da vrednosti polarizacije u prvoj vrsti i koloni ne učestvuju u računanju odziva detektora, pa ih zadajemo kao nule. Vidimo da će prostor matrica datog oblika biti razapet pomoću šest bazisnih matrica, od kojih će svaka biti ispunjena nulama osim na mestima gde se javlja po jedna odgovarajuća konstanta a, b, c, d, e, f .

Uopštavanje modela za smer kretanja talasa

Do sada smo u analizu uzimali samo slučajeve kada se talas kreće ka pozitivnom smeru z -ose. Kako bismo naša razmatranja uopštili moramo izvršiti odgovarajuću rotaciju koordinatnog sistema za slučajeve kada se talas kreće u proizvoljnom smeru. Smer u kom se kreće gravitacioni talas u našem matematičkom modelu utiče na talasni četvorovektor i matricu polariza-

cije. Četvorovektor direktno prikazuje informaciju o smeru kretanja gravitacionog talasa i njegovom modifikacijom bismo izmenili smer, ali rezultati ne bi bili konzistentni, jer tada matrica polarizacije ne bi odgovarala posmatranom slučaju.

Znajući rezultate o transformaciji bazisa vektorskih prostora iz linearne algebre (Spiegel 1959, Vojinović 2010a), naša transformacija matrice polarizacije će imati oblik:

$$P_{\mu\nu}^* = \mathcal{R} \cdot P_{\mu\nu} \cdot \mathcal{R}^T \quad (12)$$

gde je $P_{\mu\nu}^*$ rotirana matrica polarizacije, $P_{\mu\nu}$ matrica polarizacije talasa koji se kreće duž z-ose i \mathcal{R} 4×4 matrica rotacije z-ose u odgovarajući pravac. Pomoću Rodriguesove formule dobijamo:

$$R = I + K \sin \alpha + K^2(1 - \cos \alpha) \quad (13)$$

u kojoj je $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $K = \begin{bmatrix} 0 & -l_z & l_y \\ l_z & 0 & -l_x \\ -l_y & l_x & 0 \end{bmatrix}$,

gde je \vec{l} jedinični vektor koji određuje osu rotacije, l_x, l_y, l_z njegove komponente u željenom pravcu, a α je ugao rotacije. Sada možemo dobiti matricu rotacije \mathcal{R} kao:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (14)$$

Pošto nam je poznato da važi:

$$\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z,$$

a zbog uslova (10), dobijamo:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{k} \cdot \vec{e}_z}{\|\vec{k}\| \|\vec{e}_z\|} = \frac{k_z}{\|\omega\|} \quad (15)$$

Kako je vektor \vec{l} normalan i na \vec{z} i na \vec{e}_z , nalazimo njegov zapis kao:

$$\vec{l} = -\frac{k_y}{\omega \sin \alpha} \vec{e}_x + \frac{k_x}{\omega \sin \alpha} \vec{e}_y \quad (16)$$

Kako zbog ortogonalnosti ovog vektora na z-osu važi $l_z = 0$, poznate su nam sve komponente neophodne za nalaženje matrice \mathcal{R}

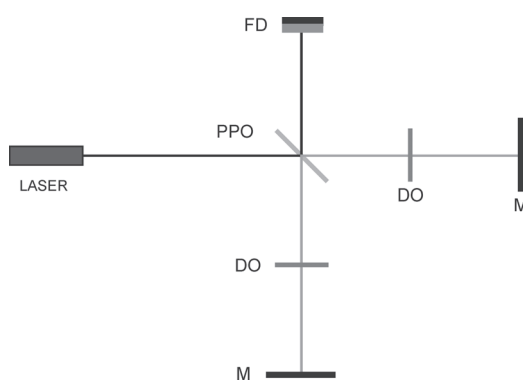
Na ovakav način jednoznačno smo opisali talas koji pada na naš detektor iz proizvoljnog pravca.

Merenje polarizacije gravitacionih talasa

Realni detektor gravitacionih talasa

Detektor gravitacionih talasa (slika 2) se sastoji od lasera, polupropusnog ogledala koje stoji na putu laserskog zraka pod uglom od 45°, i još dva ogledala (jedno na putu propuštenog, drugo na putu odbijenog dela laserskog zraka, oba ortogonalna na odgovarajuće pravce prostiranja) (Vojinović 2000).

Laserski zrak se uperi u polupropusno ogledalo, koje ga deli na dva snopa i usmerava ka ogledalima koja služe kao mase za interakciju sa talasom. Snopovi se odbijaju od ogledala i rekombinuju na fotiodiodi. Talas intereguje sa ogledalima tako što jedno pomera ka centru, dok drugo pomera od centra detektora. Posle pola perioda, uloge se menjaju. Kada gravitacioni talas počne da menja rastojanja između ogledala, zbog



Slika 2. Dijagram jednostavnog detektora gravitacionih talasa: FD – fotiodioda, PPO – polupropusno ogledalo, DO – dodatno ogledalo, M – ogledalo masa.

Figure 2. A diagram of a simple gravitational wave detector: FD – photodiode, PPO – beam-splitter, DO – additional mirror, M – mass mirror.

razlike u pređenim putevima svetlosnih snopova, javlja se efekat interferencije. Radi preciznosti merenja, na krakovima detektora postavljena su još dva ogledala, na polovini rastojanja od centra do glavnih ogledala, koja čine pomoćni detektor u službi čišćenja signala od šuma.

Idealni dvodimenzionalni detektor

Modelujmo idealni dvodimenzionalni detektor gravitacionih talasa kao skup od osam tačaka ravnomerno raspoređenih po kružnici poluprečnika $d\alpha$ centriranoj u koordinatnom početku. Svaka tačka u ovom detektoru predstavlja neku probnu česticu na koju utiče gravitacioni talas. Praćenjem pomeranja ovih čestica moći ćemo da zabeležimo kako gravitacioni talas utiče na prostor i na osnovu dobijenih podataka odredimo njegovu polarizaciju.

Posmatrajmo relativne pomeraje naših osam tačaka na kružnici u odnosu na centar i pokušajmo da na osnovu registrovanih vrednosti pronađemo podudarnost sa kvalitativnim opisom neke od vrsta polarizacije.

Najpre je potrebno izabrati ravan tako da postoji reakcija čestica na talas. Razlog za ovo je što neke polarizacije opisuju transverzalan, neke longitudinalan talas, pa neće uvek sve čestice reagovati. Radi pojednostavljenog računa, izaberimo da je početna faza talasa jednaka nuli i razmatrajmo slučajeve kada talas dolazi iz smera z -ose, odnosno, bez gubljenja opštosti, uvedimo uslove:

$$\Phi = 0 \quad (17)$$

$$k_\mu = (-\omega, 0, 0, \omega) \quad (18)$$

Neka koordinate naših osam probnih čestica budu zadate:

$$A: dx_A^\mu = [0 \quad 0 \quad 0 \quad d\alpha]$$

$$B: dx_B^\mu = \left[0 \quad 0 \quad \frac{d\alpha}{\sqrt{2}} \quad \frac{d\alpha}{\sqrt{2}} \right]$$

$$C: dx_C^\mu = [0 \quad 0 \quad d\alpha \quad 0]$$

$$D: dx_D^\mu = \left[0 \quad 0 \quad \frac{d\alpha}{\sqrt{2}} \quad -\frac{d\alpha}{\sqrt{2}} \right]$$

$$E: dx_E^\mu = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -d\alpha]$$

$$F: dx_F^\mu = \left[0 \quad 0 \quad -\frac{d\alpha}{\sqrt{2}} \quad -\frac{d\alpha}{\sqrt{2}} \right]$$

$$G: dx_G^\mu = [0 \quad 0 \quad -d\alpha \quad 0]$$

$$H: dx_H^\mu = \left[0 \quad 0 \quad -\frac{d\alpha}{\sqrt{2}} \quad \frac{d\alpha}{\sqrt{2}} \right]$$

(19)

i neka naša matrica polarizacije bude oblika:

$$P_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix} \quad (20)$$

gde je P konstanta između 0 i 1. Zamenjivanjem (19) i (20) u (1), dobijamo da je infinitezimalno rastojanje svake od probnih čestica od koordinatnog početka u našem slučaju zadato jednačinom:

$$(ds)^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^0)^3 + (dx^3)^2 P \cos(\omega(x^3 - x^0)) \quad (21)$$

Na osnovu nje možemo odrediti zakone po kojima se menjaju rastojanja konkretnih tačaka od centra kružnice (koordinatnog početka):

$$ds_C = ds_G = d\alpha$$

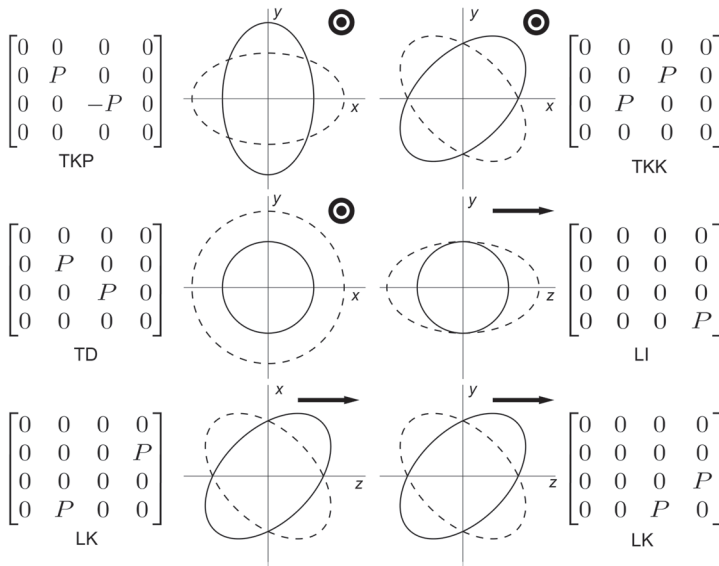
$$ds_B = ds_D = ds_F = ds_H = d\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{2} P \cos(\omega t)}$$

$$ds_A = ds_E = d\alpha \sqrt{1 + P \cos(\omega t)} \quad (22)$$

gde je ds_i rastojanje tačke i od koordinatnog početka, za $i = A, B, C, D, E, F, G, H$.

Primitimo da tačke C i G ne osciluju, dok ostale tačke osciluju, ali sa različitim amplitudama. Tačke A i E imaju veću amplitudu oscilovanja od tačaka B, D, F i H . Na osnovu kvalitativnog opisa tipova polarizacije možemo utvrditi da se naši rezultati slažu sa slučajem LS polarizacije. Potvrda da posmatrana bazisna matrica odgovara upravo tom tipu polarizacije je i u veličini amplitude tačaka.

Ovim postupkom smo ispitali kako izgleda polarizacija zadata jednom bazisnom matricom (matricom sa elementom f). Primenimo opisani postupak sada i na ostale bazisne matrice kako bismo dobili vezu između ostalih pet tipova polarizacije i odgovarajućih oblika matrice



Slika 3. Tenzori polarizacije i odgovarajući oblici polarizacije. U gornjem desnom uglu svakog grafika prikazan je smer prostiranja gravitacionog talasa. TKP – transversalna kvadrupolna („plus“) TKK – transversalna kvadrupolna („kros“) TD – transversalna dišuća, LI – longitudinalna istegljujuća LK – longitudinalna kvadrupolna

Figure 3. Polarization tensors and their respective geometric interpretations. The arrows in the upper right corner of each graph represent the direction of wave propagation.

polarizacije. Ta veza je prikazana tabelarno (slika 3).

Primitimo kako su matrice iz desne kolone i poslednja matrica iz leve kolone bazisne matrice i to sa elementima b, f, e, c , respektivno. Prva i druga matrica iz prve kolone predstavljaju kombinaciju bazisnih matrica sa elementima a i d . Napomenimo i da su matrice polarizacija dozvoljenih topološkim osobinama prostorvremena linearno nezavisne. Dokažimo to tako što ćemo matricu proizvoljne polarizacije zapisati kao linearnu kombinaciju naših šest matrica (Spiegel 1959):

$$\sum_{i=1}^6 a_i P_i = M \quad (23)$$

Daljim raspisivanjem dobijamo jednačinu:

$$P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 + a_3 & a_2 & a_5 \\ 0 & a_2 & a_3 - a_1 & a_6 \\ 0 & a_5 & a_6 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & b & d & e \\ 0 & c & e & f \end{bmatrix} \quad (24)$$

Našu proizvoljnu matricu polarizacije možemo dobiti izražavanjem koeficijenata a_1, a_2, \dots, a_6 . Matematički smisao dokazanog je da naših šest matrica predstavlja bazu prostora matrica polarizacije zbog čega se one još nazivaju i mode polarizacije. Fizički smisao je da gra-

vitacioni talas proizvoljne polarizacije možemo posmatrati kao superpoziciju više talasa polarizovanih nekom od šest osnovnih moda polarizacije. Ovaj rezultat ima veliki značaj, jer se u prirodi gravitacioni talasi ne javljaju polarizovani samo jednim tipom polarizacije.

TT uslovi

Do sada smo u razmatranje uzimali svih šest tipova polarizacije koje dozvoljavaju topološke osobine prostorvremena, ostavljajući po strani različite teorije gravitacije koje tvrde da se u prirodi ne javlja svaki od njih. Jedna od tih teorija je i Ajnštajnova OTR koja predviđa samo dva tipa polarizacije. Odbacivanje ostalih tipova u toj teoriji nameću tzv. TT kalibracioni uslovi (transverse-traceless gauge) zadati jednačinama:

$$-\frac{\partial}{\partial x^0} h_{0\mu} + \frac{\partial}{\partial x^1} h_{1\mu} + \frac{\partial}{\partial x^2} h_{2\mu} + \frac{\partial}{\partial x^3} h_{3\mu} = 0 \quad (25)$$

$$-h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33} = 0 \quad (26)$$

Opšta teorija relativnosti zadovoljava princip opšte relativnosti, odnosno zahtev da oblik zakona fizike ne zavisi od izbora koordinatnog sistema (po ovom principu je teorija i dobila ime). Zbog te simetrije, neophodno je nametnuti dodatne uslove kojima se u teoriji vrši izbor jednog konkretnog koordinatnog sistema u od-

nosu na koji se vrše merenja. Takvi uslovi se zovu kalibracioni (engl. gauge) uslovi, i njima se vrši kalibracija (baždarenje) na dati koordinatni sistem. U različitim fizičkim situacijama mogu biti zgodni različiti koordinatni sistemi, odnosno kalibracioni uslovi. Za potrebe izučavanja gravitacionih talasa najčešće se koriste TT uslovi.

Zamenimo u (25) (uslov transversalnosti) izraz (7) za ravan monohromatski gravitacioni talas:

$$\begin{aligned}
 P_{0\mu} \sin(k_\lambda x^\lambda + \Phi) \cdot k_0 - P_{1\mu} \sin(k_\lambda x^\lambda + \Phi) \cdot k_1 - \\
 - P_{2\mu} \sin(k_\lambda x^\lambda + \Phi) \cdot k_2 - \\
 - P_{3\mu} \sin(k_\lambda x^\lambda + \Phi) \cdot k_3 = 0
 \end{aligned}
 \quad (27)$$

Primenimo sada prethodnu jednakost na proizvoljnu matricu polarizacije za slučajeve $\mu = 0, 1, 2, 3$ i dobićemo sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
 a \cdot k_1 + b \cdot k_2 + c \cdot k_3 &= 0 \\
 b \cdot k_1 + d \cdot k_2 + e \cdot k_3 &= 0 \\
 c \cdot k_1 + e \cdot k_2 + f \cdot k_3 &= 0
 \end{aligned}
 \quad (28)$$

Iz drugog kalibracionog uslova (26) (uslov da trag tenzora perturbacije bude jednak nuli – traceless uslov), za proizvoljnu matricu polarizacije dobijamo:

$$\cos(k_\lambda x^\lambda + \Phi) (0 + a + d + f) = 0 \quad (29)$$

Rešavajući sistem jednačina (28) i (29), matrica polarizacije dobija oblik:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

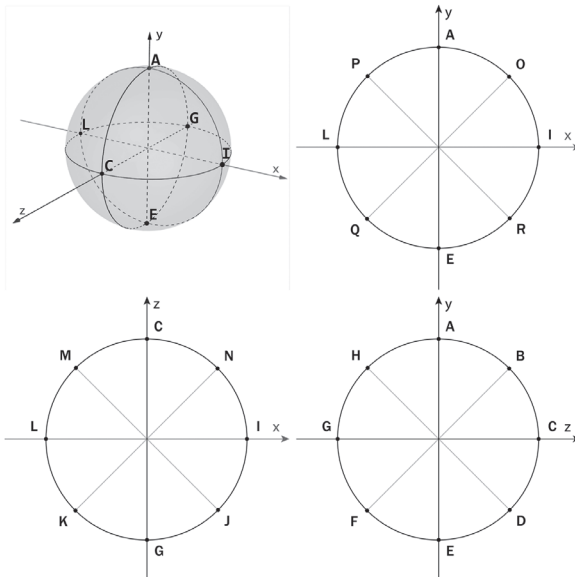
Predstavimo prethodnu matricu kao linearnu kombinaciju dve matrice moda polarizacije:

$$M = b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Možemo primetiti da se proizvoljna matrica polarizacije u OTR usled ograničenja koja nam nameću TT gejdž uslovi može zapisati kao linearna kombinacija matrica samo TQ, odnosno plus i cross polarizacija. Zbog toga su upravo ta dva tipa jedina dozvoljena u OTR.

Uopštavanje na 3D detektor

Jasno je da naš dvodimenzionalni detektor neće biti dovoljan da registruje svaki talas koji na njega padne, pošto je dizajniran da reaguje samo na one koji dolaze duž z-ose. Kako bismo registrovali i talase koji dolaze duž drugih pravaca potrebno je da uvedemo novi model.



Slika 4. Izgled idealnog sfernog trodimenzionalnog detektora

Figure 4. Ideal three-dimensional spherical detector

Neka naš novi, prilagođeni idealni detektor bude predstavljen sistemom probnih čestica raspoređenih po sferi poluprečnika $d\alpha$. Neka na svakoj koordinatnoj osi Dekartovog sistema stoje po dve probne čestice – jedna sa pozitivne i druga sa negativne strane u odnosu na centar sfere. Ako sada kroz svaku ravan određenu ortovima konstruišemo prave pod uglom od 45° na ortove i na mesta njihovih preseka sa sferom postavimo po jednu probnu česticu, dobijamo sistem od ukupno osamnaest tačaka sposoban da registruje talas koji na njega padne iz bilo kog pravca (slika 4).

Ovim smo naš model detektora uopštili do trodimenzionalnosti i omogućili da registruje talas nezavisno od pravca iz koga ovaj dolazi.

Simuliranje rada detektora gravitacionih talasa

Simuliranje sfernog detektora

Izračunajmo prvo odziv svake tačke opisanog trodimenzionalnog sfernog detektora na gravitacioni talas koji na njega pada iz proizvoljnog pravca. U tom cilju, beležimo tokom vremena rastojanje svake tačke od centra sfere.

Funkcija koja se dobije računanjem rastojanja za i -tu tačku je:

$$ds_i = \sqrt{dx_i^u (\eta_{uv} + HP_{uv}^* \cos(\Phi - tk)) dx_i^v} \quad (32)$$

$$H \equiv Hs(t - T_i) Hs(T_f - t), \text{ a } k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

u kojoj su k_x, k_y, k_z odgovarajuće prostorne komponente talasnog četvorovektora, Φ početna faza, η_{uv} metrika prostora Minkovskog, P_{uv}^* zarotirana matrica polarizacije, a dx_i^u, dx_i^v infinitezimalna rastojanja od centra sfere. $Hs(x)$ je Hevisajdova funkcija zadata kao:

$$Hs(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Ova funkcija je uvedena kako bi se ograničilo vreme trajanja talasa: početni trenutak delovanja talasa zadat je kao T_i , a trenutak u kome ono prestaje je T_f . Vreme t je naša nezavisna promenljiva. Funkcija odziva (32) za svaku od 18 tačaka

sfernog detektora predstavlja centralni rezultat ovog rada, zajedno sa definicijom samog sfernog detektora (slika 4). Numeričkim simuliranjem ovog odziva potvrđuje se da sferni detektor zaista može da detektuje gravitacioni talas proizvoljne polarizacije, koji dolazi iz proizvoljnog pravca.

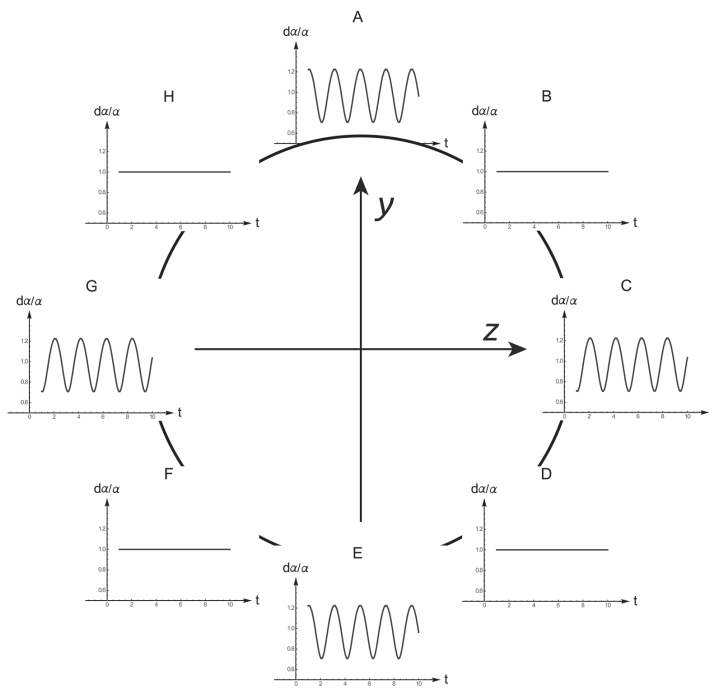
Na početku svake simulacije zadajemo parametre koji opisuju talas koji posmatramo. Zbog načina na koji je matematički opis talasa uveden, detektor ga mora u jednom trenutku registrovati (tj. talasni front je u svakom trenutku beskonačna ravan). Početni položaji tačaka detektora unapred su dati.

U trenutku T_i , talas pada na naš sferni detektor, izazivajući krivljenje prostora i promenu rastojanja tačaka na površini sfernog detektora od njegovog centra. Poslednji talasni front prolazi kroz naš detektor u trenutku T_f i tada se simulacija završava. Rezultat je skup osamnaest grafika koji prikazuju kretanje tačaka detektora tokom vremena kada na njih pada gravitacioni talas.

Dok bi upotrebom stvarnog detektora posmatranjem kretanja test-masa pokušavali da odredimo osobine talasa koji je kretanje izazvao, u simulaciji je situacija obrnuta. Parametri talasa unapred su zadati, i nas zanima na koji način će tačke sfere reagovati na njega. Ovakav pristup je nama potreban kako bismo demonstrirali odziv detektora na gravitacioni talas sa proizvoljnim parametrima, a rezultati date simulacije mogu se kasnije koristiti i za upoređivanje sa merenim podacima kako bi se olakšalo određivanje osobina talasa.

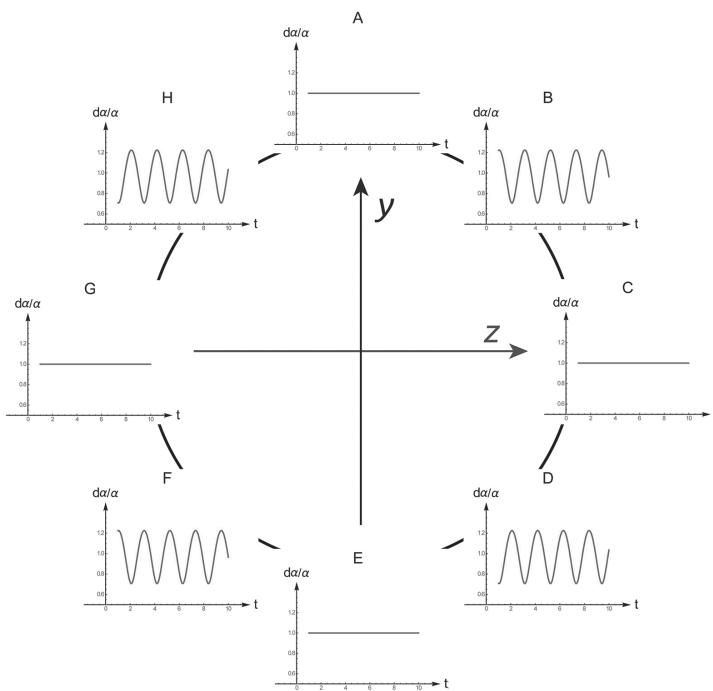
Na slici 5 prikazan je rezultat simulacije za osam tačaka iz yz -ravni prilikom delovanja plus polarizovanog talasa koji putuje duž x -ose. Vidimo da se tačke A i E kreću u kontrafazi sa tačkama G i C, ali da su im amplitude jednake, dok se tačke na dijagonalama našeg sistema uopšte ne kreću. Iako se kretanje javlja i u drugim tačkama detektora, yz -ravan izabrana je za prikaz kao ilustrativan primer date polarizacije – pošto se kreću tačke na koordinatnim osama, ova polarizacija dobila je ime „plus”.

Radi kompletnosti, na slici 6 prikazano je reagovanje tačaka iste ravni na isti talas, sa jedinom razlikom što je on ovaj put cross polarizovan. Slični grafici se mogu dobiti i iz



Slika 5. Zavisnost relativnog pomeraja probnih čestica od vremena za prisustvo plus-polarizovanog talasa koji putuje duž x -ose

Figure 5. Dependence of relative displacement of test particle on time for plus polarized gravitational wave travelling along the x -axis



Slika 6. Zavisnost relativnog pomeraja probnih čestica od vremena za prisustvo cross-polarizovanog talasa koji putuje duž x -ose

Figure 6. Dependence of relative displacement of test particle on time for cross polarized gravitational wave travelling along the x -axis

simulacije za svaku polarizaciju i proizvoljno izabran talasni vektor upadnog gravitacionog talasa.

Simuliranje sistema sfernih detektora

U drugoj simulaciji, posmatramo vremena odziva nekoliko detektora raspoređenih po našoj planeti. Uzmimo da je Zemlja sfera poluprečnika 6371 km. Na nju rasporedimo naše idealne sferne detektore – jasno je da će oni registrovati svaki talas koji na njih padne. Zato je dovoljno da talas predstavimo preko njegovog početnog i krajnjeg talasnog fronta. Detektor će sada davati signal u vremenu nakon što na njega padne prvi i pre nego što detektuje poslednji talasni front.

Za svaki detektor q potrebne su po dve jednačine – jedna za određivanje početnog trenutka registrovanja signala, a druga za određivanje trenutka završetka signala:

$$T_i^q = \frac{1}{\omega} (\vec{r}_q \cdot \vec{k} + \omega T_f)$$

$$T_f^q = \frac{1}{\omega} (\vec{r}_q \cdot \vec{k} + \omega T_i)$$

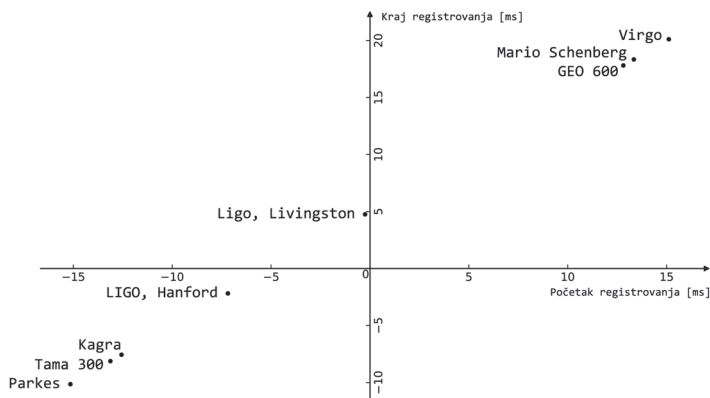
gde su T_i^q, T_f^q početni i krajnji trenutak registrovanja talasa, redom, ω kružna učestalost, \vec{k} talasni vektor, \vec{r}_q radijus–vektor detektora u odnosu na centar sfere, a T_i, T_f početni i krajnji momenat prolaska talasa kroz Zemljin centar. Na ovaj način jednoznačno je određeno vreme odziva svakog detektora na zadati talas, što omogućava da se rekonstruišu pravac i smer prostiranja talasa.

U simulaciji su posmatrani detektori Parkes, TAMA 300, KAGRA, LIGO (u Hanfordu i Livingstonu), GEO 600, Mario Schenberg i Virgo. Na slici 7 prikazana su vremena početka i kraja detektovanja gravitacionog talasa za svaki detektor dobijena u jednoj od simulacija. Slično situaciji sa prethodnom simulacijom, dok bi analiza realnih podataka imala za cilj da na osnovu vremena odziva otkrije odakle dolazi talas, u našoj simulaciji posmatramo vremena odziva za unapred poznat talas. Ovakav pristup može imati značaja u teorijskim razmatranjima, i za upoređivanje sa izmerenim signalom.

Zaključak

U radu je razmatrano ponašanje idealnog detektora kada na njega pada ravan monohromatski gravitacioni talas. Iznet je matematički model koji opisuje talas pomoću Rimanovog prostora promenljive metrike. Detektor je modelovan prvo kao skup tačaka na kružnici u ravni u kojoj gravitacioni talas pravi perturbacije, a zatim je model uopšten do trodimenzionalnog sfernog detektora. Izvedene su formule za talas koji dolazi iz bilo kog pravca. Na osnovu analitičkih rezultata, bazisne matrice tenzora polarizacije povezane su sa odgovarajućim vrstama polarizacije. Koristeći TT uslove, pokazano je da su jedine dve polarizacije dozvoljene u OTR transverzalne kvadrupole.

U drugom delu rada, na osnovu analitičkih rezultata, simuliran je idealni sferni detektor. Dobijeni su grafici zavisnosti položaja probnih



Slika 7. Grafik vremena odziva idealnih detektora na gravitacioni talas u odnosu na trenutak kada je talas pao na centar Zemlje

Figure 7. Diagram of the ideal detectors' response time from the moment when the center of the earth is hit by a gravitational wave

čestica od vremena, i analizom je utvrđeno da se oni slažu sa teorijskim rezultatima.

Sledeći korak u daljem razvoju datog modela mogao bi biti razvijanje simulacije idealnog detektora koji nije sferan, te ne može registrovati svaki talas. Na taj način bi se mogla meriti osetljivost detektora u zavisnosti od njegovog relativnog položaja u odnosu na pravac prostiranja talasa.

Za razliku od eksperimentalnog pristupa, u kome se na osnovu izmerenih parametara određuju osobine talasa, u našim simulacijama osobine talasa uvek su bile unapred poznate, a posmatran je odziv detektora. Ovakav pristup često je vredniji u teorijskim razmatranjima.

Druga simulacija se bavila odzivom svetskih detektora, koji su modelovani kao idealni, i raspoređeni po sferi koja predstavlja Zemlju. Simuliran je odziv dosad izgrađenih detektora, uzimajući u obzir njihove realne položaje na Zemlji. Dve glavne mane ovakve simulacije su, svakako

1. Simulirani su idealni detektori, te nije moguće dobiti realnu sliku o osetljivosti infrastrukture
2. Zbog sferičnosti detektora, svaki talas će biti registrovan, nezavisno od svoje polarizacije i pravca prostiranja, dok su realni detektori manje osetljivi.

Daljim razvijanjem modela ove mane bi trebalo nadomestiti.

Istraživanje gravitacionih talasa, iako je njihovo postojanje predviđeno teorijom pre više od stotinu godina, još uvek je izuzetno živa i relevantna oblast. Podaci koji se prikupljaju u ovom polju mogu dalje potvrditi ili opovrgnuti jednu od najvažnijih teorija moderne fizike – Ajnštajnovu Opštu teoriju relativnosti. Dosadašnja merenja su u potpunoj saglasnosti sa njenim teorijskim modelom, i većina naučnika smatra da će takav rezultat nastaviti da važi. Ipak, eksperimentalno istraživanje ovakvih pojava, koje je tek od nedavno postalo moguće, može dati zna-

čajne rezultate i oblikovati razvoj teorija gravitacije. Ovde je dat teorijski model za opisivanje detektora koji bi se daljim razvojem mogao unaprediti i iskoristiti prilikom odlučivanja o izgradnji i orijentaciji realnih detektora kako bi se maksimizovala preciznost merenja. Iako je rezultat teorijski i numerički, eventualnim poboljšanjima mogao bi postati relevantan faktor u daljim istraživanjima u okviru oblasti.

Zahvalnost. Zahvaljujemo se mentoru dr Marku Vojinoviću za nesebičnu pomoć i strpljenje prilikom rada na ovom projektu.

Literatura

Abbott B. P., *et al.* 2016. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*, **116** (6): 102

Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A. 1973. *Gravitation*. San Francisco: Freeman

Spiegel M. 1959. *Vector analysis and an introduction to tensor analysis*. New York: McGraw-Hill

Vojinović M. 2000. Gravitacioni talasi kao test opšte teorije relativnosti. Seminar iz savremene fizike, Fizički fakultet Univerziteta u Beogradu, Studentski trg 12-16, 11000 Beograd

Vojinović M. 2010a. *Tensor calculus, part 1: tensor algebra*. The Group of Mathematical Physics of the University of Lisbon. Dostupno na <http://www.markovojinovic.com/professional/pdf/2010-Lisbon-TensorCalculus-Lecture1.pdf>

Vojinović M. 2010b. *Tensor calculus, part 2: tensor analysis*. The Group of Mathematical Physics of the University of Lisbon. Dostupno na <http://www.markovojinovic.com/professional/pdf/2010-Lisbon-TensorCalculus-Lecture2.pdf>

Vojinović M. 2019. Predavanja o opštoj teoriji relativnosti i polarizaciji gravitacionih talasa. Predavanja održana na Institutu za fiziku Univerziteta u Beogradu, Pregrevica 118, 11080 Beograd

Dušan Cvijetić and Maja Stošić

A Simulation of Ideal Gravitational Wave Detectors

After the first direct detection of a gravitational wave in 2015, the research into gravitational phenomena has gained popularity outside the academic community. Results of studies on the polarization of gravitational waves can be used to test the validity of different metric theories of gravity, the most important of which is Einstein's general relativity. In this paper, an analytical model for describing a plane monochromatic gravitational wave with a small amplitude is given. After studying the wave which travels along a coordinate axis, the model is generalized to describe a wave of an arbitrary direction. The interaction between the detector and the wave is

studied with two different models of ideal detectors. The first is a model of an ideal planar, circular detector, which is then generalized to a three-dimensional ideal spherical detector. The response function of the detector has been determined for a gravitational wave of a given polarization and direction of propagation. Two numerical simulations are used to further study the analytical data. The first tests the behaviour of our ideal spherical detector in interaction with the gravitational wave. The second one tests the behaviour of a system of ideal detectors, scattered across the globe in a way to imitate the real detectors on Earth. The further implementation and development of the model and the simulations for use in testing the detector system's sensitivity is proposed. 