

## Određivanje parametara globularnog jata M92 pomoću funkcije luminoznosti

---

U ovom radu određivani su udaljenost i starost globularnog jata M92 (NGC6341) poredeći posmatračku sa sintetičkim funkcijama luminoznosti. Korištene su tri metode: minimizacija  $\chi^2$ , Kolmogorov–Smirnov test i metoda iz rada Jimeneza i Padoana (1998). Metodom minimizacije  $\chi^2$  je za starost dobijena vrijednost  $t = 13.6^{+1.4}_{-5.4}$  milijardi godina, a za udaljenost  $r = 7.6 \pm 1.5$  kpc, a metodom iz rada Jimeneza i Padoana  $t = 13.3 \pm 0.1$  milijardi godina i  $r = 7.3 \pm 0.1$  kpc. Metodom minimizacije  $\chi^2$  i metodom iz rada dobijamo vrijednosti koje odgovaraju podacima iz literature, te vidimo da su ove metode pogodne za određivanje parametara, posebno metoda iz rada Jimeneza i Padoana jer uz sebe nosi manje greške. Kolmogorov–Smirnov test nije pogodan za određivanje oba parametra istovremeno jer poredi funkcije luminoznosti u samo jednoj tački, a ne na cijelom intervalu magnituda. Zbog toga se primjenom ovog metoda dobija veliki interval grešaka.

---

### Uvod

Globularna (zatvorena) zvjezdana jata su gravitaciono stabilne grupacije sa velikim brojem zvijezda, od nekoliko hiljada do nekoliko stotina hiljada. Karakterišu ih sferidan oblik, koji je posljedica međusobnog gravitacionog privlačenja zvijezda. Najmasivnija jata se nalaze u galaktičkom centru i u njima preovlađuju starije zvijezde (Vukićević – Karabin i Atanacković 2010). Dalje od centra, u galaktičkom disku nalaze se manje masivna jata, dok se na periferiji nalazi

veoma mali broj jatâ. Njihov sjaj potiče od velikog broja zvijezda, čija koncentracija raste ka centru. Uprkos tome, zbog velike udaljenosti, čak i najsajnija jata jedva mogu da se vide golim okom.

Zvijezde su, u odnosu na starost i hemijski sastav, podijeljene u tri generacije. Prvoj generaciji pripadaju najmlađe zvijezde bogate metalima, drugoj starije zvijezde sa malim udjelom metala, a trećoj najstarije zvijezde siromašne metalima (Harwit 2010). U astronomiji, metali su svi elementi teži od helijuma. Smatra se da globularna jata sadrže zvijezde treće generacije, pa se samim tim procjenom njihove starosti može odrediti i donja granica starosti Univerzuma. Analiziranjem velikog broja globularnih jata pokazuje se da su sve zvijezde jednog jata nastale u približno istom vremenskom trenutku (Harwit 2010). Takođe, smatra se da su te zvijezde istog porijekla i da imaju isti hemijski sastav (Vukićević–Karabin i Atanacković 2010).

Cilj ovog rada je procjena parametara globularnog jata M92 korištenjem različitih metoda. Osnovni parametri globularnih jata su metaličnost, starost i udaljenost. Za metaličnost je pretpostavljena konstantna vrijednost,  $[M/H] = -2.17$  (Paust *et al.* 2007). Procijenjeni su udaljenost i starost, za čiju je istovremenu procjenu pogodna funkcija luminoznosti koja predstavlja raspodjelu broja zvijezda po magnitudama (sjaju). Posmatračka funkcija luminoznosti je poređena sa teorijski izračunatim funkcijama luminoznosti (sintetičke funkcije luminoznosti) dobijenim iz teorije evolucije zvijezda. Za poređenje funkcija i procjenu parametara jata korištene su tri metode: minimizacija  $\chi^2$ , Kolmogorov–Smirnov test i metoda iz rada Jimeneza i Padoana (1998). Parametri dobijeni svakom od ovih metoda su

---

Vinka Dakić (1999), Rastuša bb, Čečava, učenica 4. razreda JU SŠC „Jovan Dučić” u Tesliću (RS/BiH)

MENTORI:

Dušan Vukadinović, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu

Damnjan Milić, student osnovnih studija astrofizike, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu

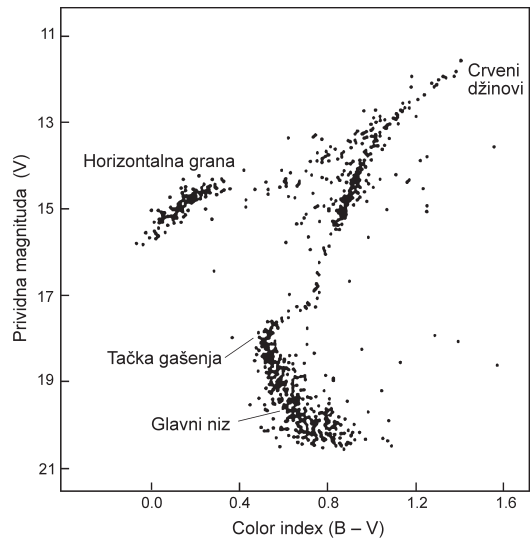
upoređeni sa podacima iz literature. Takođe, korištenje više od jedne metode omogućava da one uporede, i sagleda koja je pogodnija za dati problem.

Parametri su procjenjivani za globularno jato M92 (NGC 6341) iz sazvježđa Herkul. M92 je jedno od najsjajnijih jata na sjevernoj hemisferi i pod dobrim atmosferskim uslovima vidljivo je golim okom. Za starost mu je procjenjena vrijednost gotovo jednaka starosti Univerzuma, te važi za jednog od najstarijih objekata u Univerzumu (Frommert i Kronberg 2007).

## CM dijagram i funkcija luminoznosti

Za dobijanje funkcije luminoznosti jata potrebno je unaprijed poznavati njegov CM (engl. colour–magnitude) dijagram. Na CM dijagramu su prikazane zvijezde jata, gdje se na apscisi nalazi indeks boje, dok je na ordinati prividna ili apsolutna magnituda. Indeks boje je razlika prividnih magnituda u dva filtera i pokazuje boju zvijezde, koja je određena temperaturom. Kako se tokom evolucije zvijezde mijenja indeks boje, odnosno njena magnituda, ona će u različitim stadijumima svoje evolucije zauzimati različito mjesto na CM dijagramu.

Na CM dijagramu jednog globularnog jata (slika 1) može se uočiti nekoliko regiona. Najveći dio života zvijezde provode kao stabilne na glavnom nizu. Tokom života na glavnom nizu, u jezgru se odvijaju termonuklearne reakcije vodonika. Zbog promjene hemijskog sastava, zvijezde mijenjaju sjaj, temperaturu i radijus. Kada u jezgru ostanu male količine vodonika, energija koja nastaje sagorjevanjem postaje nedovoljna da bi se suprotstavila sopstvenoj gravitaciji i počinje sažimanje zvijezde. U tom trenutku, zvijezda dolazi do tačke gašenja, odnosno do tačke silaska sa glavnog niza (vidi sliku 1). Ta tačka je pogodna za određivanje starosti, s obzirom da zvijezda na glavnom nizu provodi 90% svog života (Harwit 2010). Nakon toga, zvijezde nastavljaju svoju evoluciju kao crveni džinovi. Crveni džinovi kao jedini izvor energije imaju gravitaciono sažimanje, pri čemu se povećavaju gustina i temperatura jezgra. Porastom temperature dolazi do sagorjevanja preostalog vodonika, najprije u tankom sloju oko jezgra, a potom i u slojevima sve dalje od jezgra. Za to vrijeme, jezgro se zagrijava i sažima, dok se omotač hladi i širi. Kada u jezgru temperatura postane dovoljno visoka, počinju termonuklearne reakcije sagor-

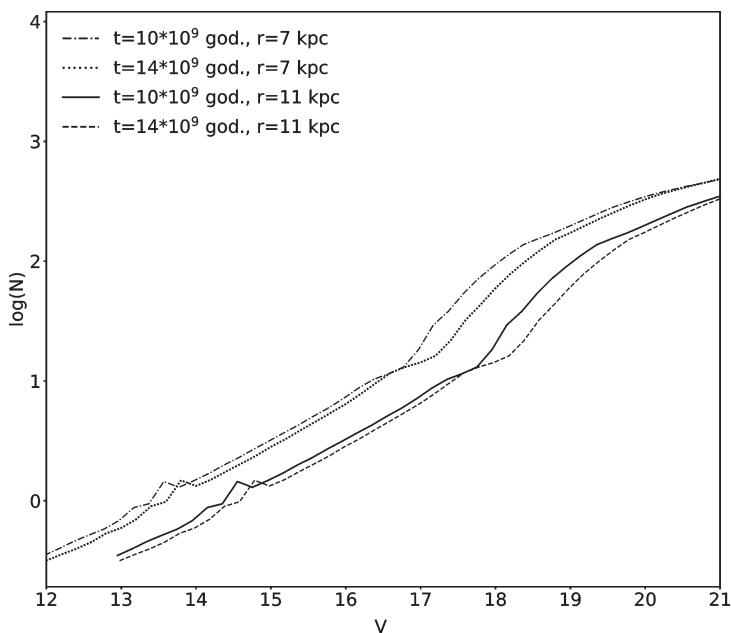


Slika 1. CM dijagram globularnog jata sa izdvojenim ograncima. Na apscisi se nalazi indeks boje (B–V), a na ordinati prividna magnituda u V filteru (preuzeto iz Kološnjaji i Milić 2015).

Figure 1. CM (colour–magnitude) diagram of globular cluster with marked branches. Colour index (B–V) is represented on the x-axis and apparent magnitude in V filter is represented on the y-axis (Source: Kološnjaji & Milić 2015).

jevanja helijuma i prestaje sažimanje. Zvijezde veće početne mase mogu da prođu kroz fazu crvenih džinova više puta i u svakoj sljedećoj fazi se sagorjevaju elementi koji su nastali u prethodnoj. Nakon završetka sagorjevanja helijuma, dalji put zvijezdine evolucije zavisi od njene mase. Zvijezde manjih masa (čija je masa 0.7–2 mase Sunca) odlaze na horizontalni ogranak, gdje u jezgru sagorjevaju helijum, a u tankom omotaču oko jezgra vodonik. Zvijezde srednjih masa (čija je masa 2–10 mase Sunca) se hlade i šire, dok im luminoznost raste. One prolaze kroz horizontalni ogranak, nakon čega odlaze na asimptotski ogranak džinova. Karakteriše ih sagorjevanje helijuma u omotaču, dok je jezgro sastavljeno od ugljenika i kiseonika (Harwit 2010).

Ukoliko se CM dijagram podijeli na intervale magnituda, i u svakom od njih se prebroje zvijezde, dobija se funkcija luminoznosti. Kada se takva funkcija luminoznosti prikaže grafički (slika 2) na apscisi se nalazi prividna ili apsolutna



Slika 2. Sintetičke funkcije luminoznosti, za metaličnost  $[M/H] = -2.17$  (Dotter *et al.* 2008). Vidljivo je kako se povećanjem starosti smanjuje broj zvijezda na magnitudama koje odgovaraju glavnom nizu, a povećava broj crvenih džinova.

Figure 2. Synthetic luminosity functions for metallicity  $[M/H] = -2.17$  (Dotter *et al.* 2008). Note that with increasing age the number of main sequence stars decreases, while the number of red giants increases.

magnituda, dok je na ordinati prikazan logaritam broja zvijezda. Kako zvijezde različitih masa evoluiraju različitom brzinom – one masivnije brže, za fiksiranu luminoznost broj zvijezda opada sa vremenom. To je najuočljivije kod ogranka subdžinova, ali se zbog toga oblik cijele funkcije luminoznosti mijenja sa vremenom (Padoan i Jimenez 1997).

## Parametri globularnog jata i sintetičke funkcije luminoznosti

Izgled CM dijagrama, kao i funkcije luminoznosti globularnog jata, zavisi od njegovih parametara: metaličnosti, starosti i udaljenosti (slika 2).

Metaličnost ( $M/H$ ) predstavlja logaritamsku razliku masenog udjela metala u datoj zvijezdi ili zvjezdanom jatu i Suncu

$$[M/H] = \log_{10} \frac{Z_*}{Z_\odot} \quad (1)$$

Udio metala je dio mase zvijezde koji ne čine vodonik i helijum. Pretpostavlja se da su zvijezde jata nastale istovremeno i iz istog molekularnog oblaka. Zbog toga njihova metaličnost odgovara metaličnosti međuzvjezdanog gasa, što je upravo i metaličnost jata.

Starost jata predstavlja vrijeme koje je proteklo od nastanka zvijezda do sadašnjosti. Kod starijih jata, kao što je ovdje slučaj, najveći broj zvijezda je već napustio glavni niz, i tu su preostale samo zvijezde manjih masa koje još sagorijevaju vodonik.

Kako bismo procijenili parametre jata, potrebno je da razmotrimo kako oni utiču na izgled funkcije luminoznosti. Povećanjem starosti jata smanjuje se broj zvijezda koje pripadaju glavnom nizu, a povećava broj crvenih džinova. Da bi se dobila adekvatna raspodjela crvenih džinova po magnitudi, potrebno je ukloniti zvijezde asimptotskog ogranka džinova i horizontalne grane. Što je jato starije, tačka gašenja glavnog niza se pomjera ka većoj luminoznosti.

Na slici 2 prikazano je kako se funkcije luminoznosti mijenjaju sa promjenom starosti i udaljenosti. Funkcije prikazane na slici se nazivaju sintetičke funkcije luminoznosti. To su teorijski modeli funkcija luminoznosti dobijeni na osnovu teorije evolucije zvijezda. Ordinata CM dijagrama (slika 1) i apscisa sintetičke funkcije luminoznosti (slika 2) predstavljaju istu veličinu – prividnu magnitudu. Stoga se na slici 2 može uočiti porast broja zvijezda koje odgovaraju ogranku crvenih džinova na CM dijagramu. Takođe, primjetno je da je kod mlađih jata veći broj zvijezda koje se nalaze na glavnom nizu.

## Metod

Kako funkcije luminoznosti zavise od modula udaljenosti i starosti, poređenjem posmatračke i sintetičkih funkcije luminoznosti mogu se procijeniti parametri jata. Njihovim poređenjem utvrđuje se koji od sintetičkih modela najbolje opisuje datu posmatračku funkciju. Potom se parametri sintetičke funkcije pripisuju jatu.

### Minimizacija $\chi^2$

Minimizacija  $\chi^2$  (hi-kvadrata) predstavlja statistički test koji se često koristi da bi pokazao koliko neki teorijski model dobro opisuje posmatranja. U slučaju ovog rada,  $\chi^2$  je definisan kao:

$$\chi^2 = \sum_m \frac{(\log N_m^{\text{obs}} - \log N_m^{\text{th}})^2}{\sigma_m^2} \quad (2)$$

gdje su  $N_m^{\text{obs}}$  i  $N_m^{\text{th}}$  brojevi zvijezda posmatračke i teorijske, odnosno sintetičke funkcije luminoznosti za određenu magnitudu, respektivno, dok  $\sigma$  predstavlja grešku broja zvijezda posmatračke funkcije luminoznosti (Knuth 1997).

Sintetička funkcija luminoznosti koja najbolje odgovara posmatračkoj je ona za koju se dobija najmanja vrijednost  $\chi^2$ . Greške parametara jata su procjenjene na osnovu  $\chi^2$  raspodjele, koja predstavlja distribuciju zbira kvadrata standardnih normalnih odstupanja. Za procjenu greške starosti, potrebno je izračunati zavisnost  $\chi^2$  od starosti za fiksiranu udaljenost koja je dobijena ovim metodom.  $\chi^2$  raspodjela je određena samo jednim parametrom – brojem stepeni slobode, i u ovom slučaju, to je broj tačaka empirijskih vrijednosti sa posmatračke funkcije luminoznosti umanjen za jedan. Potom se izračunava kumulativna funkcija distribucije (CDF)  $\chi^2$  raspodjele, koja se koristi da se pronađe vjerovatnoća sa kojom je moguće da zadana kombinacija parametara jata daje određenu vrijednost  $\chi^2$ . Potrebno je zadati nivo značajnosti rezultata  $p$ , koji je definisan kao  $p = 1 - \text{CDF}$ . Sve vrijednosti starosti za koje  $\chi^2$  ispunjava dati uslov spadaju u interval greške. Na isti način, korišćenjem zavisnosti  $\chi^2$  od udaljenosti, određuje se interval greške udaljenosti. U ovom radu je odabrano  $p = 0.05$ , odnosno test je rađen sa sigurnošću od 95%.

## Kolmogorov–Smirnov test

Kolmogorov–Smirnov test (u daljem tekstu KS test) je neparametarski statistički test koji pokazuje koja je vjerovatnoća da dvije funkcije raspodjele dolaze iz iste raspodjele. Ispitivanje hipoteze se vrši poređenjem empirijske kumulativne raspodjele sa očekivanom kumulativnom funkcijom raspodjele (Knuth 1997). Zasnovan je na određivanju maksimalne udaljenosti između dvije raspodjele.

KS test statistik, odnosno mjera odstupanja ( $D$ ) dvije raspodjele se izračunava po sljedećoj formuli:

$$D = \sup_m |F^{\text{th}}(m) - F^{\text{obs}}(m)| \quad (3)$$

gdje su  $F^{\text{obs}}$  i  $F^{\text{th}}$  kumulativne funkcije raspodjele posmatračke i sintetičke funkcije luminoznosti, respektivno, a  $m$  predstavlja prividnu zvjezdanu veličinu.

Sintetička funkcija čiji parametri najviše odgovaraju posmatračkoj, jeste ona koja ima najmanju vrijednost KS test statistika (Knuth 1997). Korištena je pretpostavka za veliki uzorak, pa je kriterijum za odbacivanje nulte hipoteze bio uslov da  $D$  bude veće od kritične vrijednosti tog parametra:

$$D > D_{p,rs} = c(p) \sqrt{\frac{r+s}{rs}} \quad (4)$$

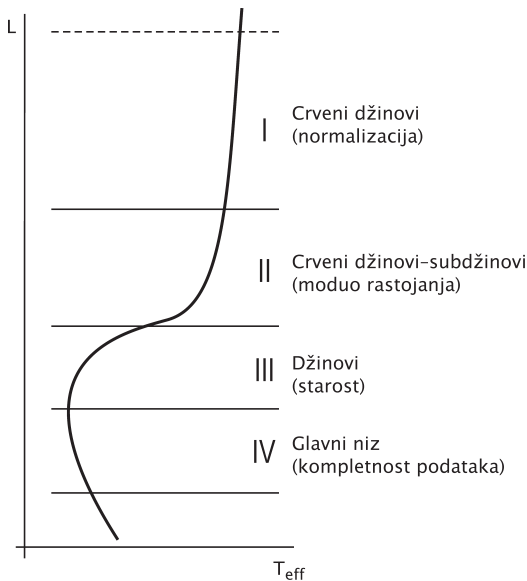
gdje izraz sa desne strane nejednakosti predstavlja kritičnu vrijednost parametra  $D$ , a  $r$  i  $s$  dimenzije nizova za posmatračku i sintetičku funkciju luminoznosti, respektivno. Kritična vrijednost  $D_{p,rs}$  predstavlja minimalnu vrijednost mjere odstupanja  $D$ , da bi se njeni parametri nalazili u intervalu greške sa zadatom sigurnošću. Vrijednost  $c(p)$  se izračunava po formuli:

$$c(p) = \sqrt{-\frac{1}{2} \ln p} \quad (5)$$

gdje je  $p$  nivo značajnosti sa kojim je test rađen. Kao i u prethodnoj metodi, odabrano je  $p = 0.05$ , tj. test je urađen sa sigurnošću od 95%. Svi parametri za koje vrijednosti  $D$  ispunjavaju uslov (4) spadaju u interval greške (Knuth 1997).

## Metod iz rada Jimeneza i Padoana (1998)

Ova metoda se zasniva na poređenju broja zvijezda u određenim dijelovima posmatračke i teorijskih funkcija luminoznosti (Jimenez i Padoan 1998). Potrebno je podijeliti funkcije luminoznosti na četiri regiona čija širina treba da bude jedne magnituda (slika 3). Prvi region zahvata ogranak crvenih džinova i on se koristi samo za normalizaciju funkcije luminoznosti. Drugi region je odabran tako da se nalazi između ogranka subdžinova i crvenih džinova i on obuhvata najstrijmiji odjeljak funkcije. Prema tome, ovdje je uočljiva najveća promjena magnituda, te je pogodan za određivanje udaljenosti. Treći region obuhvata ogranak subdžinova. S obzirom da se tu nalaze zvijezde koje su tek napustile glavni niz, pogodan je za određivanje starosti. Četvrti region obuhvata gornji dio glavnog niza i može da se koristi za provjeru kompletnosti podataka.



Slika 3. Podjela funkcije luminoznosti na regione. U ovom radu, korištena su četiri regiona. Na apscisi se nalazi efektivna temperatura, a na ordinati luminoznost (prema: Jimenez i Padoan 1998).

Figure 3. Luminosity function with separated regions. In this project, four regions are used. Effective temperature is represented on the x-axis and luminosity is represented on the y-axis (Jimenez & Padoan 1998).

Na početku je potrebno odrediti granicu između drugog i trećeg bina, koja zavisi samo od oblika funkcije luminoznosti. Izračunava se prema sljedećoj jednačini:

$$m_{2,3} = M_{2,3} + m - M \quad (6)$$

gdje je  $M_{2,3}$  apsolutna bolometrijska magnituda koja je određena za različite metaličnosti i starosti (Jimenez i Padoan 1998), a  $m - M$  predstavlja moduo rastojanja određen za zadatu starost. Granice između ostalih regiona se dobijaju pomjeranjem ove granice za jednu magnitudu. Precizno određivanje položaja granice između regiona je jako bitno zbog određivanja parametara sa većom sigurnošću (Jimenez i Padoan 1998). Nakon podjele, za svaku udaljenost i starost se izračunava parametar  $R$  prema formuli:

$$R = \left[ \frac{n_2^{\text{th}}}{n_1^{\text{th}}} - \frac{n_2^{\text{obs}}}{n_1^{\text{obs}}} \right]^2 + \left[ \frac{n_3^{\text{th}}}{n_1^{\text{th}}} - \frac{n_3^{\text{obs}}}{n_1^{\text{obs}}} \right]^2 \quad (7)$$

gdje su  $n_1^{\text{th}}$  i  $n_1^{\text{obs}}$  brojevi zvijezda u prvom,  $n_2^{\text{th}}$  i  $n_2^{\text{obs}}$  brojevi zvijezda u drugom, a  $n_3^{\text{th}}$  i  $n_3^{\text{obs}}$  brojevi zvijezda u trećem binu teorijske i posmatračke funkcije, respektivno.  $R$  predstavlja odstupanje posmatračke od sintetičkih funkcija luminoznosti.

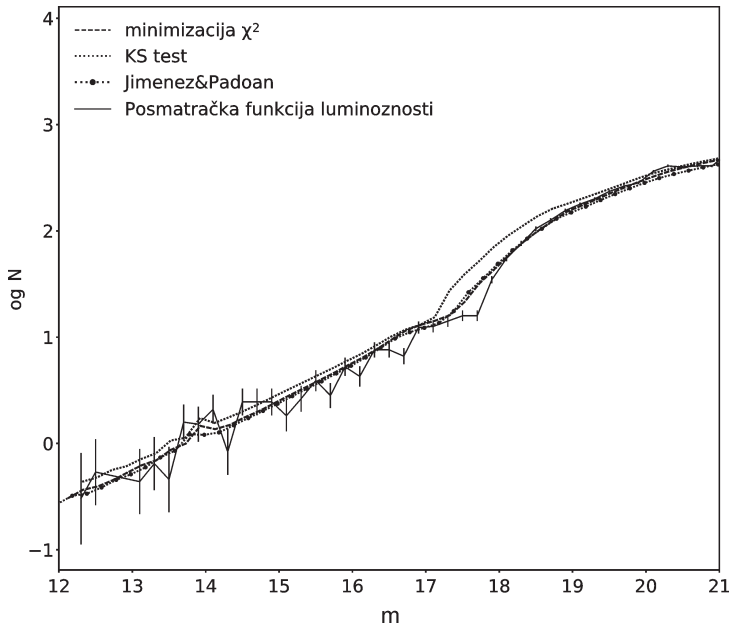
Određivanjem minimalne vrijednosti za  $R$  dobija se sintetička funkcija koja najbolje opisuje posmatračke podatke. S obzirom da su udaljenost i starost za sintetičke funkcije luminoznosti uzete diskretizovano, finoća diskretizacije određuje greške dobijenih rezultata.

## Rezultati i diskusija

Podaci za posmatračku funkciju luminoznosti su preuzeti iz rada Pausta i saradnika (2007), dok su sintetičke funkcije luminoznosti preuzete iz baze Dartmouth Stellar Evolution (Dotter *et al.* 2008). Za metaličnost je uzeta fiksirana vrijednost,  $[M/H] = -2.17$  (Paust *et al.* 2007), dok su za udaljenost uzete vrijednosti u intervalu od 5 kpc do 12 kpc sa korakom od 0.1 kpc, a za starost 1–15 milijardi godina s korakom od 0.1.

U tabeli 1 date su dobijene vrijednosti primjenom svake od ovih metoda uporedo sa očekivanim vrijednostima iz literature (Paust *et al.* 2007).

Na slici 4 su prikazane posmatračka funkcija luminoznosti i odgovarajuće sintetičke funkcije



Slika 4. Posmatračka funkcija luminoznosti i sintetičke funkcije čiji su parametri dobijeni svakom od metoda. Punom linijom je predstavljena posmatračka funkcija luminoznosti. Isprekidanim linijama su predstavljene sintetičke funkcije luminoznosti koje najbolje odgovaraju posmatračkoj dobijene metodama minimizacije  $\chi^2$ , Kolmogorov–Smirnovim testom i metodom iz rada Jimeneza i Padoana (1998).

Figure 4. Empirical luminosity function and sythetical luminosity functions whose parameters are calculated using three different methods. Empirical luminosity function is represented by the continuous line, while the dotted lines represent results of the three statistical methods.

luminoznosti čiji su parametri dobijeni svakom od metoda. Primjetno je da sve tri funkcije dobro fituju posmatračku funkciju.

Tabela 1. Udaljenost i starost globularnog jata M92 dobijeni različitim metodama.

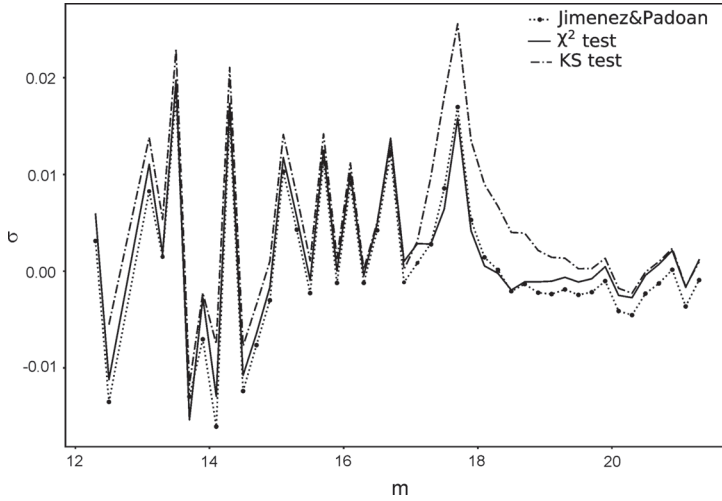
Metoda	Procjena parametara	
	$t$ [ $10^9$ godina]	$r$ [kpc]
Minimizacija $\chi^2$	$13.6^{+1.4}_{-5.4}$	$7.6 \pm 1.5$
Jimenez i Padoan (1998)	$13.3 \pm 0.1$	$7.3 \pm 0.1$
KS test	8.6	8.6
Paust <i>et al.</i> (2007)	$14.2 \pm 1.2$	$9.2 \pm 0.1$

Metodom minimizacije  $\chi^2$  dobijene su vrijednosti koje odgovaraju rezultatima iz literature, ali sa velikim intervalom grešaka (tabela 1). Pretpostavlja se da je uzrok slaba osjetljivost funkcije luminoznosti na promjenu starosti (slika 2). S druge strane, za fiksiranu starost imamo veću promjenu funkcije luminoznosti za različite uda-

ljenosti (*ibid.*). U tom slučaju dobijamo manji interval greške za udaljenost.

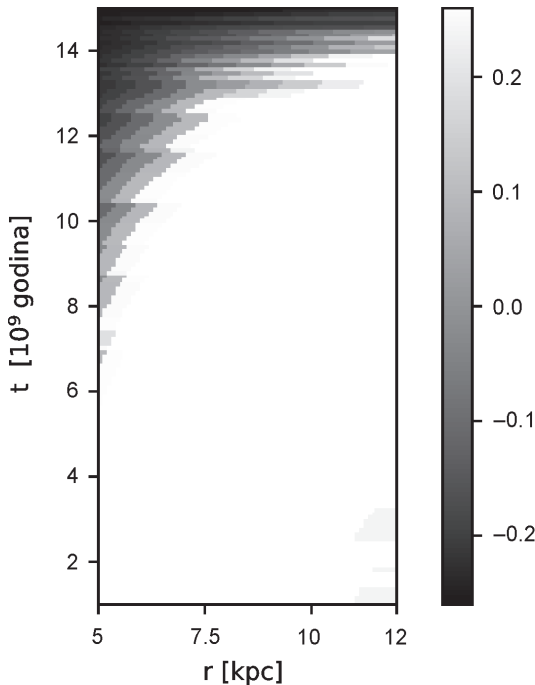
Metodom iz rada Jimeneza i Padoana (Jimenez i Padoan 1998) dobijene su vrijednosti parametara jata koje su bliske parametrima u radu Pausta i saradnika (Paust *et al.* 2007). Takođe, greške dobijene ovom metodom su znatno manje u odnosu na preostale dvije metode. Međutim, moguće je da procijenjeni parametri jata odstupaju od očekivanih zbog nedovoljno tačno određene granice između drugog i trećeg regiona, što je spekulirano i od strane autora metoda (Jimenez i Padoan 1998).

KS testom su za parametre jata dobijene vrijednosti  $t = 8.6 \cdot 10^9$  godina i  $r = 8.6$  kpc. Starost jata dobijena metodom KS testa najviše odступа od podataka iz literature, tim prije što se pretpostavlja da su globularna jata starija od 10 milijardi godina (Vukićević–Karabin i Atanacković 2010). Na slikama 4 i 5 je primjetno da je maksimalno odstupanje sintetičke funkcije oko magnituda koje odgovaraju tački gašenja. Upravo taj region funkcije luminoznosti je pogodan za određivanje starosti, i odatle potiče odstupanje dobijenog parametra. Za udaljenost je dobijena vrijednost koja je bliska očekivanoj. Međutim, greške parametara dobijenih ovom metodom



Slika 5. Relativna greška svake sintetičke funkcije luminoznosti. Primjetno je da minimizacija  $\chi^2$  i metoda iz rada Jimeneza i Padoana imaju slična odstupanja, dok KS test ima najveće odstupanje upravo oko magnitude koja se nalazi u okolini tačke gašenja, te zbog toga ima najveće odstupanje dobijene starosti od očekivanjje vrijednosti.

Figure 5. Relative errors of synthetic luminosity functions. Note that luminosity functions determined using  $\chi^2$  minimization and the method from the work by Jimenez I Padoan (1998) deviate similarly. Synthetic luminosity function determined using the KS test has a maximal deviation at a magnitude near the turn off point and because of that the age calculated using this method does not correspond to the expected value.



Slika 6. Razlika parametra  $D_n$  i kritičnog parametra  $D$  za KS test u parametarskom prostoru udaljenosti i starosti. Kombinacije parametara kojima je razlika veća od nule spadaju u interval greške.

Figure 6. Difference between parameter  $D_n$  and critical parameter  $D$  for the Kolmogorov–Smirnov test in the parameter space of age and distance. Combinations of parameters with a positive difference belong to the confidence interval.

obuhvataju gotovo cijeli interval korištenih parametara. Na slici 6 je prikazana razlika vrijednosti  $D_n$  i kritičnog parametra  $D$  u parametarskom prostoru udaljenosti i starosti. Samo one kombinacije parametara kod kojih je razlika negativna se ne uklapaju u interval greške. S obzirom na dobijeni interval greške, KS test nije pogodan za poređenje funkcija luminoznosti. Pretpostavlja se da je razlog tome to što ova funkcija traži samo maksimalne udaljenosti između funkcija, a ne poredi njihov cijeli oblik.

## Zaključak

U ovom radu su određivani parametri globularnog jata M92 poredeći posmatračku sa sintetičkim funkcijama luminoznosti. Korištene su tri metode određivanja udaljenosti i starosti: minimizacija  $\chi^2$ , Kolmogorov–Smirnov test i metoda iz rada Jimeneza i Padoana (1998). Prva metoda daje rezultate koji su približni podacima iz literature (Paust *et al.* 2007), ali nosi velike greške, koje su procijenjene intervalom povjerenja od 95%. Metoda KS testa za starost daje rezultat koji značajno odstupa od očekivane vrijednosti, dok je za udaljenost dobijena vrijednost koja je najbliža vrijednosti iz literature. Međutim, kod ove metode je za greške dobijen gotovo cijeli interval korištenih parametara, te ona nije pogodana za poređenje funkcija luminoznosti. Metoda iz rada Jimeneza i Padoana (1998) za starost daje rezultate koji spadaju u interval očekivanog rezultata, dok za udaljenost odstupa od očekivane vrijednosti.

## Literatura

- Dotter A., Chaboyer B., Jevremović D., Kostov V., Baron E., Ferguson Jason W. 2008. The Dartmouth Stellar Evoluton Database. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 178: 89.
- Frommert H., Kronberg C. 2007. Messier 92, SEDS. The Munich Astro Archive
- Harwit M. 2010. *Astrophysical concepts*. New York: Springer
- Jimenez R., Padoan P. 1996. A new self-consistency check on the Ages of Globular Clusters. *The Astrophysical Journal*, **463** (2): 17.
- Jimenez R. i Padoan P. 1998. The Ages and Distances of Globular Clusters with the Luminosity Function Method: The Case of M5 and M55. *The Astrophysical Journal*, **498** (2): 704.
- Knuth D. 1997. *The art of computer programming. Volume 2: Seminumerical Algorithms*. Boston: Addison–Wesley
- Kološnjaji M., Milić D. 2015. Određivanje parametara globularnih jata pomoću neuronskih mreža. *Petničke sveske*, 74: 16.
- Padoan P., Jimenez R. 1997. Ages of Globular Clusters: Breaking the Age–Distance Degeneracy with the Luminosity Function. *The Astrophysical Journal*, **475** (2): 580.
- Paust N., Chaboyer B., Sarajedini A. 2007. BVI Photometry and the Luminosity Functions of the Globular Cluster M92. *The Astronomical Journal*, **133** (6): 2787.
- Vukićević–Karabin M., Atanacković O. 2010. *Opšta astrofizika*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.



---

*Vinka Dakić*

## Determining Parameters of Globular Cluster M92 Using Luminosity Function

This project analyses the determining parameters of globular cluster M92 using the luminosity function. The basic physical parameters of globular clusters are age, distance and metallicity, and in this project age and distance have been determined, and for metallicity we used a fixed value. The parameters were determined by comparing theoretical luminosity functions to the luminosity function from observation data. Comparing was done using three statistical methods,  $\chi^2$  minimization, Kolmogorov–Smirnov test and the method from the work by Jimenez

and Padoan (1996).  $\chi^2$  represents a sum of proportions of difference between the observed and theoretical data squared and observation error squared. By applying the first method, we find an age of  $t = 13.6_{-5.4}^{+1.4}$  gyrs and distance of  $r = 7.6 \pm 1.5$  kpc. These values are in accordance with the ones from literature. Using the method from the work by Jimenez and Padoan, we find an age of  $t = 13.3 \pm 0.1$  gyrs and distance of  $r = 7.3 \pm 0.1$  kpc, and this values are in accordance with the data from literature. The Kolmogorov–Smirnov test quantifies the maximum of distance between the theoretical and empirical function and when we find these values, a minimum of them correspond to our empirical function. This method is not suitable for determining age and distance simultaneously, because luminosity functions are compared only at one point, not at the entire interval. 