Tijana Jakšić i Isidora Poznanović

O lavirintima i ugradivanju stabala u grid grafove

Ugrađivanje grafa G u graf H, ukoliko postoji, predstavlja par preslikavanja (f, g) gde je f injektivno preslikavanje iz skupa V(G) u skup V(H), a g preslikavanje koje svaku granu uv grafa G slika u put između čvorova f(u) i f(v) u grafu H pri čemu su putevi iz g[E(G)] disjunktni. Ukoliko svaki čvor grafa H pripada nekom putu iz g[E(G)], radi se o savršenom ugrađivanju. U slučaju da je G stablo a H grid graf, ugrađivanje se može shvatiti kao „crtanje" lavirinta u pravouganoj tabli. U radu je dat potreban i dovoljan uslov za savršeno ugrađivanje stabla u grid graf kao i neke granice o minimalnim parametrima (površina, širina) grid grafa u koje se može ugraditi dato stablo. Takođe su dati i rezultati o maksimalnom broju čvorova stepena 2, 3 i 4 za stabla koja se mogu savršeno ugraditi u grid graf date dimenzije, što predstavlja dopunu poznatom rezultatu iz ove oblasti.

Uvod

Grafovi su matematički objekti koje iznenađujuće često srećemo u svakodnevnom životu: mape koje predstavljaju povezanost gradova, šeme električnih kola, prijateljstva na socijalnim mrežama itd. Zbog toga se teorija grafova primenjuje u rešavanju velikog broja interesantnih teorijskih, ali i praktičnih problema. Jedan od problema koji se može svrstati u obe pomentue kategorije je automatizovano dizajniranje i crtanje lavirinata.

Istorijski gledano, lavirint predstavlja građevinu sačinjenu od složene mreže prolaza ili hodnika kojoj je namena da u njoj čovek lako zaluta. Lavirinte je, između ostalog, proslavio mit o Tezeju. Međutim, matematički gledano, struktura svakog lavirinta se može opisati vrlo jednostavno.

Svaki klasični pravougaoni lavirint se može predstaviti grafom tako da čvorovi predstavljaju raskrsnice i „ćorsokake" (potencijlano i još neke delove lavirinta) a grane – puteve u lavirintu između odabranih čvorova. Pomenuti lavirinti nemaju nepovezanih delova i između svake dve tačke postoji jedinstveni put pa je njima odgovarajući graf zapravo stablo koje se može shvatiti kao šema lavirinta. Interesantno je razmatrati problem dizajna lavirinta (www.mazegenerator.net/) na osnovu datog stabla; ovo spada u probleme ugrađivanja grafova (eng. graph embedding) i to konkretno ugrađivanje stabala u grid grafove.

Za dato stablo T sa n čvorova, prirodno se nameću neka pitanja poput:

- Koji su potrebni i dovoljni uslovi da se od stabla T napravi (klasičan) lavirint?
- Ako je od datog stabla moguće napraviti lavirint, koja je najmanja moguća površina ili širina takvog lavirinta?
- Koliko „komplikovani" lavirinti mogu biti ako je mera kompleksnosti broj izbora prilikom skretanja, npr. broj raskrsnica stepena 3 i/ili 4?

U ovom radu je analizirana pomenuta problematika i dati su odgovori na većinu postavljenih pitanja. Rad je organizovan na sledeći način.

U sledećem poglavlju date su formalne definicije pojmova iz teorije grafova kao i specijalnih klasa grafova koje će nam biti od interesa.

Tijana Jakšić (2001), Pančevo, Trg kralja Petra 13, učenica 2. razreda Gimnazije „Uroš Predić" u Pančevu

Isidora Poznanović (2000), Kragujevac, Josifa Šnersona 4, učenica 2. razreda Prve kragujevačke gimnazije

MENTOR: Nikola Milosavljević, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Nišu

U trećem poglavlju je objašnjen pojam ugrađivanja grafova i data je preciznija definicija lavirinta. Analizirani su potrebni i dovoljni uslovi za ugrađivanje stabala u grid grafove i date su donje i gornje granice o optimalnim dimenzijama dobijenog lavirinta.

U četvrtom poglavlju je uveden pojam savršenog ugrađivanja i dat je potreban i dovoljan uslov za konstrukciju klasičnog lavirinta od datog stabla. Dodatno dati su rezultati o maksimalnom broju čvrova stepena 2, 3 i 4 za takve lavirinte, što predstavlja dopunu jednom skorašnjem rezultatu iz ove oblasti.

Osnovni pojmovi

Za početak, dajemo osnovne definicije iz teorije grafova (videti: Stevanović *et al.* 2004; Diestel 2005; Bondy i Murty 1976). Podsetimo se da za skup X i prirodan broj k, $\binom{X}{k}$ označava skup svih k-elementnih podskupova skupa X.

Definicija 1. Graf G (eng. graph) je uređeni par (V, E), gde je $E \subseteq \binom{V}{2}$. Elementi skupa V zovu se čvorovi (eng. vertex), a elementi skupa E grane (eng. edge) grafa G.

Za graf $G = (V, E)$, skupove V i E ćemo često označavati $V(G)$ i $E(G)$, redom.

Definicija 2. Dva čvora u i v grafa $G = (V, E)$ su susedna ako je $\{u, v\} \in E$; za njih kažemo da su spojena granom $e = uv$. Pod okolinom čvora $v \in V$ grafa $G = (V, E)$ podrazumeva se skup $N(v) = \{u \in V : vu \in E\}$ suseda čvora v. Stepen čvora v, u oznaci $d(v)$, je broj suseda čvora v, $d(v) = |N(v)|$.

Najveći stepen čvora u grafu G označava se sa $\Delta(G)$.

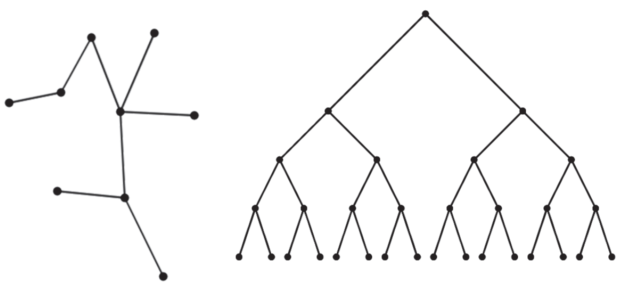
Definicija 3. Šetnja W dužine k u grafu G je niz $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$ čvorova i grana tako da je $e_i = v_{i-1}v_i$ za $i = 1, 2, \ldots, k$. Čvorovi v_0 i v_ck su krajnji čvorovi šetnje W. Šetnja je zatvorena ukoliko je $v_0 = v_k$. Staza je šetnja u kojoj se nijedna grana ne ponavlja. Put je šetnja u kojoj se nijedan čvor ne ponavlja. Ciklus je zatvorena staza u kojoj se nijedan čvor ne ponavlja, izuzev prvog i poslednjeg.

Čvorovi u i v grafa G su povezani ako u G postoji put čiji su krajnji čvorovi upravo u i v. Graf G je povezan ukoliko su svaka dva njegova čvora povezana – u suprotnom je nepovezan.

Definicija 4. Rastojanje između čvorova u i v u povezanom grafu G, u oznaci $d(u, v)$, jednako je dužini najkraćeg puta (gledano po broju grana) čiji su krajnji čvorovi u i v. Ekscentricitet čvora u, u oznaci $\mathrm{ecc}(u)$, jednak je najvećem rastojanju između čvora u i bilo kog drugog čvora, to jest $\mathrm{ecc}(u) = \max_{v \in V(G)} d(u, v)$. Radijus grafa G, u oznaci $R(G)$, jednak je najmanjem ekscentricitetu, a dijameter grafa G, u oznaci $D(G)$, jednak je najvećem eksentricitetu među svim čvorovima grafa G.

Za predstavljanje i analizu klasičnih lavirinata, od posebnog interesa će nam biti sledeće klase grafova.

Definicija 5. Stablo je povezan graf bez petlji.



Slika 1. Primer stabla, kompletnog binarnog stabla $RT_{2,4}$ i grid grafa $G_{6,8}$, redom

Figure 1. Example of a tree, complete binary tree $RT_{2,4}$ and grid graph $G_{6,8}$, respectively

Čvorovi stepena 1 u stablu nazivaju se listovi. Jedna od bitnih osobina stabala je da između proizvoljna dva čvora u stablu postoji jedinstven put.

Definicija 6. Kompletno k-narno stablo dubine r, u oznaci $RT_{k,r}$, je stablo u kome tačno jedan čvor (koren stabla) ima stepen k, svi čvorovi različiti od korena imaju stepen $k + 1$ ili 1 i svi čvorovi stepena 1 su na rastojanju r od korena.

Definicija 7. Grid graf dimenzije $n \times m$, u oznaci $G_{n,m}$, je graf čiji je skup čvorova $\{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, m\}$ pri čemu su čvorovi (a, b) i (c, d) povezani akko je $(|a - c| = 1 \wedge b = d)$ ili $(a = c \wedge |b - d| = 1)$. Vrednost $\min\{n, m\}$ je širina, a vrednost $n \cdot m$ je površina grafa $G_{n,m}$.

Prethodne definicije se odnose na proste grafove – neorjentisane grafove bez petlji i višestrukih grana. U ovom radu se bavimo isključivo takvim grafovima.

Ugrađivanje grafova i lavirinti

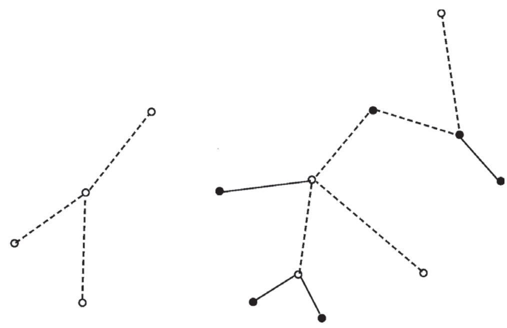
Sada uvodimo jednu jako korisnu transformaciju grafova koja na neki način „deformiše" dati graf.

Definicija 8. Ugrađivanje grafa G u graf H predstavlja par preslikavanja (f, g) gde je f injektivno preslikavanje iz skupa $V(G)$ u skup $V(H)$ a g preslikavanje koje svaku granu uv grafa G slika u put između čvorova $f(u)$ i $f(v)$ u grafu H, pri čemu su putevi iz $g[E(G)]$ međusobno disjunktni osim eventualno u krajnjim čvorovima.

Neformalno, mi „produžavamo" grane grafa G (pretvarajući ih u puteve) a zatim takav „deformisani" graf smeštamo u graf H. Na slici 2 je dat primer ugrađivanja grafa G u graf H; čvorovi grafa G su obeleženi praznim kružićima, a grane isprekidanim linijama. Primetimo da je jedna od grana grafa G ugrađena u put grafa H, kao i da primer na slici nije jedino moguće ugrađivanje grafa G u graf H.

Primetimo da u klasičnom (pravougaonom) lavirintu između svaka dva polja postoji jedinstven put (inače bi lavirint bio lakši za rešavanje) što je je jedna od osobina stabala;

ispostavlja se da se svaki klasični lavirint može na jedinstven način predstaviti stablom čiji su čvorovi prazna polja a grane postoje samo



Slika 2. Ugrađivanje grafa G (levo) u graf H (desno)

Figure 2. Embedding of G (left) into H (right)

između susednih praznih polja. Sa druge strane, klasični lavirint vizuelno podseća na standardni prikaz grid grafa. Da bismo došli od strukturnog prikaza grafa (stablo) do vizuelnog prikaza (podgraf grid grafa), najprirodniji način je posmatrati ugrađivanje stabla u grid graf.

Na slici 3 dat je primer transformacije jednog stabla u lavirint (obratiti pažnju da vizuelni prikaz odgovarajućeg lavirinta u opštem slučaju nije jedinstveno određen).

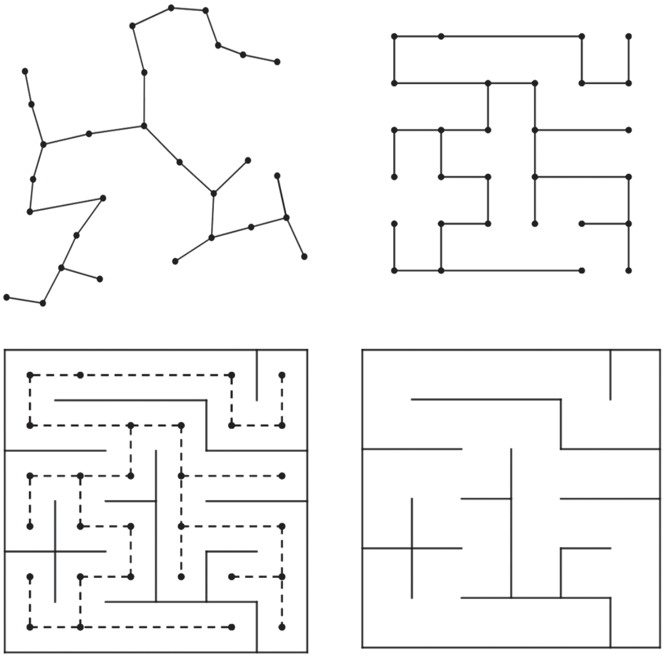
Sada se prirodno postavlja pitanje, da li se od svakog stabla može napraviti lavirint, tj. da li se svako stablo može ugraditi u neki grid graf? Dodatno, za stablo T označimo sa $A(T)$ najmanji mogući broj a za koji postoji grid graf $G_{n,m}$ površine a u koji je moguće ugraditi stablo T; sa $W(T)$ označimo najmanji mogući broj w za koji postoji grid graf $G_{n,m}$ širine w u koji je moguće ugraditi stablo T. Ukoliko odgovarajući grid grafovi ne postoje, smatramo da su vrednosti $A(T)$ i $W(T)$ jednaki ∞.

Sledeća teorema daje potreban i dovoljan uslov za postojanje ugrađivanja stabla u grid graf.

Teorema 1. Neka je T stablo. Tada postoji grid graf u koji se T može ugraditi ako i samo ako važi $\Delta(T) \leq 4$.

Dokaz. Ako se stablo T može ugraditi u graf G, jasno je da važi $\Delta(T) \leq \Delta(G)$. Kako je najveći stepen grid grafa 4, ovim je jedan smer teoreme pokazan.

Dokažimo sada matematičkom indukcijom po n da se svako stablo T sa n čvorova za koje je $\Delta(T) \leq 4$ može ugraditi u grid graf $G_{a,b}$ za neki prirodan broj $b \leq n$ tako da neki čvor $v \in V(T)$ za



Slika 3. Primer dobijanja lavirinta od stabla

Figure 3. Example of tree-induced labyrinth

koji je $d(v) \leq 3$ pripada prvoj vrsti grid grafa. Baza indukcije je trivijalna (za $n = 1$ izolovan čvor se ugrađuje u $G_{1,1}$). Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaki prirodan broj manji od n i neka je T odgovarajuće stablo sa n čvorova.

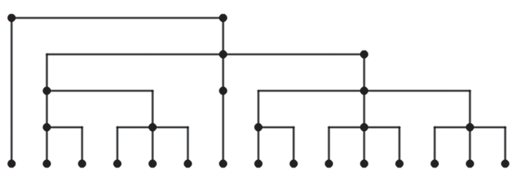
Uočimo čvor $v \in V(T)$ za koji je $d(v) \leq 3$ (takav čvor postoji jer svako stablo ima bar 2 lista). Neka su $v_1, \ldots, v_k$ susedi čvora v i neka se uklanjanjem grana iz čvora v stablo T razbija na podstabla $T_1, \ldots, T_k$ ($1 \leq k \leq 3$). Sva ta stabla imaju manje od n čvorova, čvorovi v_i su stepena najviše 3 u T_i (jer je $\Delta(T) \leq 4$) pa na osnovu induktivne pretpostavke postoje grid grafovi $G_i(a_i, b_i)$ u koje se ova stabla mogu ugraditi tako da su čvorovi v_i u prvim vrstama.

Spajanjem ovih grid grafova postavljanjem na zajedničku prvu vrstu dobijamo grid graf $M(\max_i a_i, \sum_i b_i)$ čija je širina (po induktivnoj pretpostavci) $\sum_i b_i \leq \sum_i |V(T_i)| \leq n$. Proširimo sada G za jednu vrstu iznad – postavimo čvor u odmah iznad „srednjeg" čvora v_i (ima ih najviše 3) i povežimo u sa preostalim (najviše 2) čvorovima levo i desno preko prve vrste. Na ovaj način smo uspeli da ugradimo stablo T u grid graf koji zadovoljava sve uslove induktivne pretpostavke pa tvrđenje važi i za n. Ovim je i drugi smer teoreme dokazan. □

Teorema 2. Neka je T stablo. Ukoliko je $\Delta(T) \leq 4$, tada važi $A(T) \leq n \cdot (R(T) + 2)$ i $W(T) \leq R(T) + 2$.

Dokaz. Indukcijom se lako pokazuje da je broj vrsta konstruisanog grid grafa za stablo T iz dokaza Teoreme 1 jednak $\mathrm{ecc}(u) + 1$ gde je u početni čvor, dok znamo da važi da mu je broj kolona najviše n. Dakle, ukoliko za u izaberemo čvor sa minimalnim ekscentricitetom u stablu T i pretpostavimo da je $d(u) \leq 3$, površina dobijenog grid grafa neće biti veća od $n \cdot (R(T) + 1)$.

S druge strane, ukoliko je $d(u) = 4$, uklonimo neku granu uv. Tada dobijamo dva stabla, za svaki od njih konstruišemo grid graf na osnovu prethodne teoreme sa početnim čvorovima u i v,



Slika 4. Primer ugrađivanja i savršenog ugrađivanja stabla u grid graf $G_{6,7}$

Figure 4. Embedding construction into grid graph $G_{6,7}$

spojimo ih po prvoj vrsti, a zatim dodajemo jednu vrstu iznad preko koje spajamo čvorove u i v (slika 4). Dobijeni grid graf ima $R(T) + 2$ vrsta i (i dalje) ne više od n kolona pa važi $A(T) \leq n \cdot (R(T) + 2)$. Nejednakost za $W(T)$ direktno sledi na osnovu broja vrsta u dobijenom grid grafu. □

Posledica 1. Neka je T stablo. Ukoliko je $\Delta(T) \leq 4$, tada važi $A(T) \leq \frac{1}{2} n(n+4)$ i $W(T) \leq \frac{n}{2} + 1$.

Dokaz. Korišćenjem poznatih rezultata da u svakom stablu T važi $2 \cdot R(T) \leq D(T) + 1$, a u svakom grafu G važi $D(G) \leq n - 1$, dobijamo da je $R(T) \leq n$. Sada rezultat direktno sledi kombinacijom ove nejednakosti i Teoreme 2. □

Označimo sa $A(n)$ (respektivno $W(n)$) najmanju vrednost $A(T)$ (respektivno $W(T)$) među svim stablima sa n čvorova. Jasno je da važi $A(n) \geq n$ jer je potrebno da odgovarajući grid graf ima bar n čvorova. Dakle, kako broj čvorova raste, tako raste i odgovarajuća površina; preciznije $\lim_{n \to \infty} A(n) = \infty$.

Situacija nije toliko jasna sa $W(n)$; da li je moguće proizvoljno veliko stablo ugraditi u grid graf konstantne širine? Na prvi pogled izgleda da je to moguće kompenzovati drugom dimanzijom (čija bi se dužina ponašala kao neka rastuća funkcija po n) ali se ispostavlja da nije tako. O tome govore sledeće teoreme.

Teorema 3. Za svaki prirodan broj r važi $W(RT_{3,r}) = r + 1$.

Dokaz. Koristeći konstrukciju iz Teoreme 1 sa korenom kao početnim čvorom, dobijamo da je broj vrsta dobijenog grid grafa jednak $r + 1$, pa je $W(RT_{3,r}) \leq r + 1$. Obrnutu nejednakost dokazujemo matematičkom indukcijom po r. Za $r = 1$ trivijalno važi $W(RT_{3,1}) \geq 2$. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve prirodne brojeve manje od r. Pretpostavimo suprotno za $RT_{3,r}$, tj. da ga je moguće ugraditi u grid graf $G_{r,k}$ gde je $r \leq k$. Uklanjanjem korena u, graf se razbija na tri manja $RT_{3,r-1}$ grafa. Svaki od ovih manjih grafova ima čvorove u svih r vrsta grafa $G_{r,k}$, jer bi u suprotnom mogao biti ugrađen u grid graf manje širine što je suprotno induktivnoj pretpostavci. Međutim, to znači da manji graf „u sredini” potpuno razdvaja preostala dva manja grafa pa nije moguće da u $G_{r,k}$ postoji čvor van ovih malih koji bi bio susedan sa po jednim čvorom svakog od manjih grafova. Međutim, takav čvor je upravo koren u!. Ova kontradikcija implicira da je ipak $W(RT_{3,r}) \geq r + 1$ pa na osnovu indukcije i obrnute nejednakosti sledi tvrđenje zadatka.

Posledica 2.

$$\lim_{n \to \infty} W(n) = \infty.$$

Dokaz. Kako je $|V(RT_{3,r})| = \frac{3^{r+1} - 1}{2}$, na osnovu Teoreme 3 sledi $W(n) \geq \log_3(2n+1)$, pa je jasno da $\lim_{n \to \infty} W(n) = \infty$. □

Na osnovu Teoreme 3 prirodno je pretpostaviti da su baš maksimalno „razgranati” grafovi oni koji zahtevaju široke grid grafove za ugrađivanje i da će za ostale grafove sa istim brojem čvorova biti potrebna ne veća širina. Otud i sledeća hipoteza.

Hipoteza 1. Za svaki prirodan broj n važi:

$$W(n) = \lceil \log_3(2n+1) \rceil.$$

Savršeno ugrađivanje

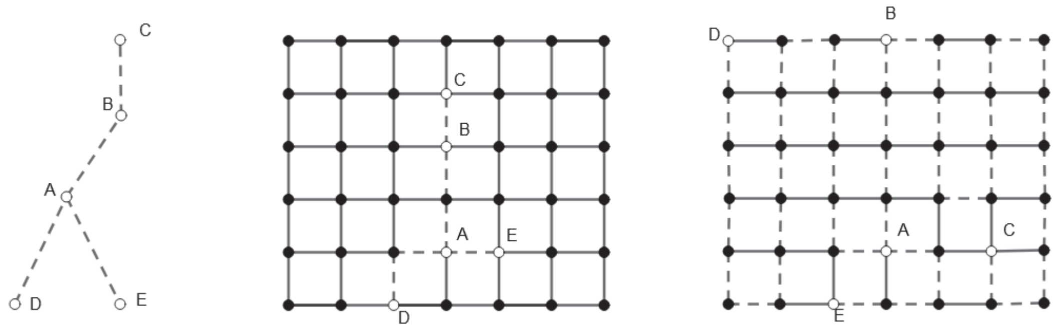
Obratimo pažnju da definicja ugrađivanja grafa G u graf H ne zahteva da svi čvorovi grafa H budu „iskorišćeni”, tj. da svaki čvor bude ili slika nekog čvora iz G ili da pripada nekom od puteva koji je slika neke grane iz G. Konkretno, prilikom klasičnog ugrađivanja stabla u grid graf, neki čvorovi mogu biti neiskorišćeni (videti npr. sliku 4), i onda nije baš jasno kakav se lavirint dobija. U tom slučaju ili lavirint nije pravougaoni ili postoje nedostižna polja što nije idealno.

Zbog toga uvodimo sledeću vrstu ugrađivanja grafova.

Definicija 9. Savršeno ugrađivanje grafa G u graf H je ugrađivanje grafa G u graf H takvo da svaki čvor grafa H pripada ili f $[V(G)]$ ili nekom putu iz $g[E(G)]$.

Intuitivno, savršeno ugrađivanje stabla u grid graf prestavlja potpuno popunjavanje grid grafa i dobijanje klasičnog lavirinta. Na sledećoj slici prikazano je (klasično) ugrađivanje stabla u grid graf i savršeno ugrađivanje stabla u grid graf. Čvorovi stabla i njihove slike označeni su praznim kružicima a grane (i odgovarajući putevi u grid grafu) isprekidanim linijama.

U prethodnom poglavlju je pokazano da se svako stablo čiji je stepen najvećeg čvora ne veći od 4 može ugraditi u neki grid graf. Na osnovu



Slika 5. Primer ugrađivanja i savršenog ugrađivanja stabla u grid-graf $G_{6,7}$

Figure 5. Example of embedding and perfect embedding of a tree into grid graph $G_{6,7}$

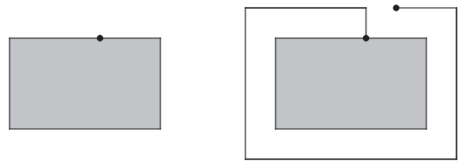
prethodne slike izgleda da, čak i bez poznavanja dokaza, nije teško izvršiti odgovarajuću konstrukciju, ali da je situacija znatno komplikovanija za savršeno ugrađivanje. Ovde dokazujemo znatno jače tvrđenje: za svako takvo stablo postoji i savršeno ugrađivanje u neki grid graf!

Teorema 4. Neka je T stablo. Tada postoji grid graf u koji se T može savršeno ugraditi ako i samo ako važi $\Delta(T) \leq 4$.

Dokaz. Matematičkom indukcijom po broju čvorova stabla ćemo pokazati jače tvrđenje: za svako stablo T ($\Delta(T) \leq 4$) i za svaki čvor $u \in V(T)$ stepena manjeg od 4 postoji savršeno ugrađivanje stabla T u grid graf $G(a,b)$ tako da je bar jedan od brojeva a i b paran i da se čvor u nalazi na obodu grida $G(a,b)$ (tj. u prvoj ili poslednjoj vrsti ili u prvoj ili poslednjoj koloni). Baza indukcije za $n = 2$ je trivijalna.

Neka je $n \geq 3$. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve prirodne brojeve manje od n i posmatrajmo proizvoljno stablo T ($\Delta(T) \leq 4$) i proizvoljan čvor $u \in V(T)$ za koji važi $d(u) \leq 3$ (takav čvor uvek postoji). Razlikujemo tri slučaja:

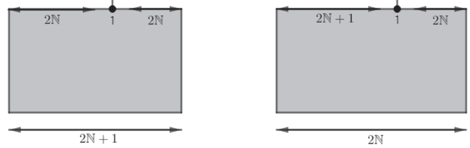
Slučaj $d(u) = 1$: Neka je v sused čvora u. Uklanjanjem čvora u ostaje stablo T' sa $n - 1$ čvorom u kome je $d'(v) \leq 3$ (jer je $\Delta(T) \leq 4$). Po indukcijskoj hipotezi, moguće je savršeno ugraditi T' u grid graf $G(a', b')$ tako da se čvor v nalazi na njegovom obodu. Sada možemo vratiti čvor u tako što ga spojimo sa čvorom v „opkruživanjem" kao na slici 6 (stablo T' savršeno ugrađeno u grid graf je predstavljeno osenčenim pravougaonikom). Sada je čvor u na obodu novog grid grafa u koji je savršeno ugrađen T; kako su se obe stranice povećale za 2, i dalje je bar jedna od njih parna.



Slika 6. Dodavanje čvora „opkruživanjem"

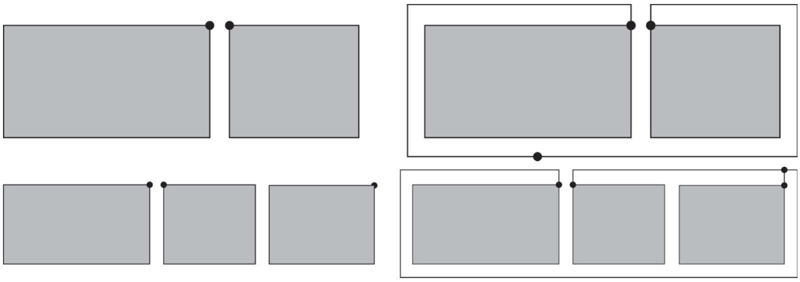
Figure 6. Adding a vertex by "surrounding"

Slučaj $d(u) = 2$: Uklanjanjem čvora u, stablo T se razbija na dva manja stabla; po induktivnoj pretpostavci, svako od njih može biti savršeno ugrađeno u odgovarajuće grid grafove tako da su susedi čvora u na obodu. U svakom stablu je moguće „prebaciti" čvor susedan uklonjenom čvoru u teme grida dodavanjem kompaktnog puta kao na slici 7 (razlikujemo slučajeve u zavisnosti od toga da li je čvor na parnoj ili neparnoj stranici).



Slika 7. „Prebacivanje" čvora u ugao

Figure 7. Vertex "transfer" into a corner



Slika 8. Spajanje dva podstabla (gore) i tri podstabla (dole)

Figure 8. Merging of two subtrees (top) and of three subtrees (bottom)

Vidimo da se ovim dodavanjem tačno jedna stranica poveća za 2 pa je i dalje bar jedna od njih parna. Sada tehnikom „opkruživanja" povećavamo stranice jednog od grid grafova dok im se ne izjednače parne stranice (to je uvek moguće jer se sve stranice povećavaju za po 2). Zatim se odgovarajući grid grafovi postave (primenom simetrije i/ili rotacije) kao na slici 8 gore, tako da im izjednačene stranice budu susedne kao i dva pomenuta čvora. Jasno je da se dodavanjem čvora u kao na slici dobija ugrađivanje stabla T koje zadovoljava sve pomenute osobine.

Slučaj $d(u) = 3$: Analogno drugom slučaju, postavimo odgovarajuće čvorove u uglove, izjednačimo jednu dimenziju a zatim spojimo čvor u sa 3 grid grafa kao na slici 8 dole.

Ovim je teorema dokazana. □

Iako je opisana konstrukcija za savršeno ugrađivanje znatno komplikovanija i zahteva mnogo veće grid grafove od konstrukcije za obično ugrađivanje, analizom manjih primera se, iznenađujuće, ispostavlja da su za obe vrste ugrađivanja dovoljni grid grafovi iste veličine. Zbog toga postavljamo sledeću hipotezu:

Hipoteza 2. Za svaki prirodan broj n, najmanja površina grid grafa u koju je moguće savršeno ugraditi proizvoljno stablo sa n čvorova jednaka je $A(n)$.

Do sada je bilo reči o (savršenom) ugrađivanju datog stabla u grid graf, tj. akcenat problema je bio na vizualizaciji lavirinta kome smo već odredili strukturu. Naravno, vrlo je bitno odabrati stablo koje će biti osnova lavirinta. Ako želimo da lavirint bude težak za rešavanje, intuitivno je jasno da njegova osnova ne treba biti put, već neko stablo sa velikim brojem čvorova stepena većeg od 2 (veliki broj raskrsnica). Inspirisani tom logikom, možemo definisati kompleksnost lavirinta kao neku funkciju od broja čvorova datog stepena njegove osnove.

Za svako $1 \le i \le 4$, označimo sa D_i najveći mogući broj čvorova stepena i koje može imati stablo koje se može savršeno ugraditi u grid graf $G_{n,m}$.

U svom radu, Li i Toulouse (2010) se bave određivanjem razapinjućih stabala grid grafova sa najvećim brojem listova. Međutim, svako razapinjuće stablo grid grafa $G_{n,m}$ je u stvari stablo sa nm čvorova koje je savršeno ugrađeno u $G_{n,m}$. Uslov da stablo ima tačno mn čvorova se može izostaviti – bilo kom stablu koje se može savršeno ugraditi u $G_{n,m}$ se mogu dodati „zamišljeni" čvorovi sa grana koje su putevi dužine veće od 1 u $G_{n,m}$. Prema tome, u pomenutom radu autori zapravo određuju vrednost $D^1_{n.m}$ i pokazano je da je $D^1_{n,m} = \frac{2}{3}nm + O(n+m)$.

U ovom radu nas više zanimaju ostali stepeni čvorova.

Lema 1. Neka su n i m prirodni brojevi. Tada za $2 \le i \le 3$ važi $D^i_{n,m} \le \frac{nm-2}{i-1}$.

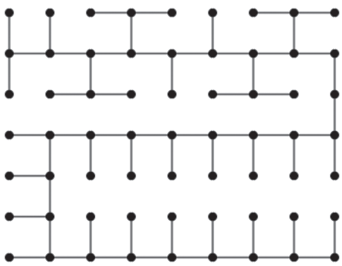
Dokaz. Posmatrajmo proizvoljno stablo T savršeno ugrađeno u $G_{n,m}$ i dodajmo mu zamišljene čvorove ukoliko je $|V(T)| \le nm$ (vrednosti $D^i_{n,m}$ se ne mogu smanjiti). Sada stablo T ima tačno nm čvorova i $nm - 1$ granu. Označimo sa D_i broj čvorova stepena i u T. Koristeći činjenicu da je zbir stepena čvorova u grafu jednak dvostrukom broju grana i da je $D_i = 0$ za i 4 dobijamo:

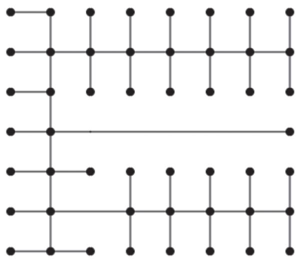
$$1 \cdot D_1 + 2 \cdot D_2 + 3 \cdot D_3 + 4 \cdot D_4 = 2(nm-1),$$

što u kombinaciji sa $\sum_{i=1}^{n} D_i = nm$ daje:

$$1 \cdot D_2 + 2 \cdot D_3 + 3 \cdot D_4 = nm - 2.$$

Kako je $D_i \ge 0$ to za svako i važi $(i-1) \cdot D_i \le$ $\le nm - 2$ pa je $D_i \le \frac{nm-2}{i-1}$ što je i trebalo dokazati. □





Slika 9. Asimptotski optimalno savršeno ugrađivanje za $D^3_{n,m}$ (levo) i $D^4_{n,m}$ (desno)

Fugure 9. Asymptotically optimal perfect embedding for $D^3_{n,m}$ (left) i $D^4_{n,m}$ (right)

Sada smo smo spremni za teoremu koja nam daje asimptotske vrednosti za D_i, što na neki način predstavlja dopunu za pomenuti rad (Li i Toulouse 2010).

Teorema 5. Neka su n i m prirodni brojevi. Tada važi:

a) $D^2_{n,m} = nm - 2$

b) $D^3_{n,m} = \frac{1}{2} nm + O(n+m)$

c) $D^4_{n,m} = \frac{1}{3} nm + O(n+m)$

Dokaz. Lema 1 nam daje gornje granice pa je dovoljno konstruisati odgovarajuća ugrađivanja u $G_{n,m}$ gde se te granice asimptotski dostižu. Slučaj za $D^2_{n,m}$ je trivijalan, jer se tačno $nm - 2$ čvora stepena dva postižu kada je traženo stablo put.

Možemo konstruisati traženo stablo sa oko $\frac{1}{2} nm$ čvorova stepena 3 tako što za svake četiri uzastopne vrste, skoro svi čvorovi iz prve i četvrte imaju po 3 suseda (slika 9 levo). Analogno, traženo stablo sa oko $\frac{1}{3} nm$ čvorova stepena 3 konstruišemo tako što za svake 3 uzastopne vrste postavimo da su skoro svi čvorovi iz srednje vrste susedi sa po 4 čvora (slika 9 desno). □

Literatura

Bondy J. A., Murty U. S. R. 1976. *Graph Theory with Applications*. Macmillan

Diestel R. 2005. *Graph Theory*, third edition. Springer

Li P. C., Toulouse M. 2010. Maximum Leaf Spanning Tree Problem for Grid Graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **73**: 1.

Stevanović D., Milošević M., Baltić V. 2004. *Diskretna matematika: osnove kombinatorike i teorije grafova*. Beograd: Društvo matematičara Srbije

http://www.mazegenerator.net/

Tijana Jakšić and Isidora Poznanović

On Labyrinths and Embedding of Trees into Grid Graphs

Embedding of graph G into graph H, if it exists, is an ordered pair (f, g), where f represents an injective function from $V(G)$ into $V(H)$ and g is a function which maps every edge uv of graph G to the path between vertices $f(u)$ and $f(v)$ of graph H, provided that all paths from $g[E(G)]$ are mutually disjointed. If every vertex of H belongs to some path from $g[E(G)]$, we say that the embedding is perfect. If G is a tree and H is a grid graph, we can see this embedding as a “drawing” of a labyrinth in a rectangular board. In this paper, the necessary and sufficient condition for perfect embedding of a tree into a grid graph is given, as well as some bounds on minimal parameters (area, width) of the grid graph into which we can embed the given tree. Also, we give the results on the maximum number of vertices of degree 2, 3 and 4 for the trees which can be perfectly embedded into the grid graph of the given dimensions. The last results are additions to the known result on this topic.