Eva Silađi i Branislav Šobot

Probabilistički metod i zero-sum Ramseyevi brojevi

Probabilistički metod je tehnika koja se koristi u matematici za dokazivanje postojanja struktura sa određenim osobinama. U ovom radu su prikazane razne primene ovog metoda u kombinatorici, teoriji grafova i algebri. Pored osnovnog metoda, prikazane su i naprednije tehnike, kao npr. Lovászova lokalna lema. U radu proučavamo i zero-sum Rasmeyev broj $R(G, \mathbf{Z}_k)$*, koji predstavlja najmanji prirodan broj n takav da za svako bojenje* $f: E(K_n) \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ *postoji kopija H grafa G unutar* K_n *za koju važi da je* $\sum_{e \in S(H)} f(e) = 0$ *u* $\mathbf{Z}_k$*. U poslednjoj glavi ovog rada, prikazana je primena probabilističkog metoda kod traženja donjih granica zero-sum Ramsey brojeva grafova koji imaju više od linearno mnogo grana (u odnosu na broj čvorova). Takođe smo dali neke donje granice za zero-sum Ramsey brojeve grafova* P_n *i* C_n*.*

1. Uvod

Probabilistički metod je tehnika koja se najčešće koristi u kombinatorici i teoriji grafova za dokazivanje postojanja struktura sa određenim osobinama. Prvi put ga je koristio Tibor Szele, ali je Paul Erdős najzaslužniji za njene savremene primene.

Glavna ideja metoda se sastoji u sledećem: recimo da želimo da dokažemo postojanje kombinatorne strukture sa nekim osobinama. Prvo ćemo konstruisati odgovarajući prostor verovatnoće, a zatim posmatrati verovatnoću da slučajno odabrani element tog prostora ima željene osobine. Ako je ta verovatnoća pozitivna, zaključujemo da struktura sa određenim osobinama zaista postoji.

Nešto složenija varijanta probabilističkog metoda se oslanja na sledećoj ideji: ukoliko želimo da dokažemo da postoji barem n elemenata koji su u nekom relacijskom odnosu, onda uzmemo proizvoljnih m ($m > n$) elemenata i dokažemo da je u određenom prostoru verovatnoće očekivani broj nepovoljnih relacijskih odnosa najviše $m - n$. Tada postoji slučaj kada

Eva Silađi (2000), Novi Sad, Fruškogorska 15, učenica 3. razreda Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu

Branislav Šobot (1998), Novi Sad, Rumenačka 98, učenik 4. razreda Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu

MENTOR: Nemanja Draganić, ETH, Cirih

je taj broj najviše $m-n$ i u tom slučaju možemo izbaciti najviše $m-n$ elemenata (po jedan iz svakog nepovoljnog relacijskog odnosa), nakon čega nam ostaje traženi skup od barem n elemenata.

Jedna od najvažnijih teorema u ovoj oblasti je takozvana Lovászova lokalna lema, koja tvrdi da, ako neki događaji, koji se dešavaju sa malom verovatnoćom, nisu previše međusobno zavisni, postoji situacija kada se neće desiti ni jedan od tih događaja. Navodimo specijalan slučaj ove teoreme, takozvani **simetrični slučaj Lovászove lokalne leme**:

Lema 1. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ događaji u proizvoljnom prostoru verovatnoće, takvi da je svaki događaj A_i zavisan sa najviše d drugih događaja. Ako je $P(A_i) \le p$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i ako važi:

$$e \cdot p \cdot (d+1) \le 1,$$

tada je:

$$P(\bigwedge_{i=1}^{n} \overline{A}_i) > 0.$$

Probabilistički metod se često koristi u Ramseyevoj teoriji, gde daje donja i gornja ograničenja za neke Ramseyeve brojeve, o čemu će biti reči u trećoj glavi ovog rada. U 4. i 5. glavi ćemo prikazati rezultate dobijene primenom ovog metoda u teoriji grafova. U narednoj glavi videćemo da probabilistički metod može dati rezultate kod problema koji su na prvi pogled čisto algebarski ili geometrijski. U poslednjoj glavi rada bavimo se jednom modifikacijom Ramseyevih brojeva, takozvanim zero-sum Ramseyevim brojevima. Dajemo donje granice za razne grafove koji imaju više od linearno mnogo grana u odnosu na broj čvorova. Takođe, dajemo donje granice za put i konturu neprobabilističkim pristupom.

2. Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju uvešćemo neke pojmove i oznake iz teorije grafova i verovatnoće, kao i asimptotske oznake koje ćemo kasnije koristiti kroz rad.

2.1. Teorija grafova

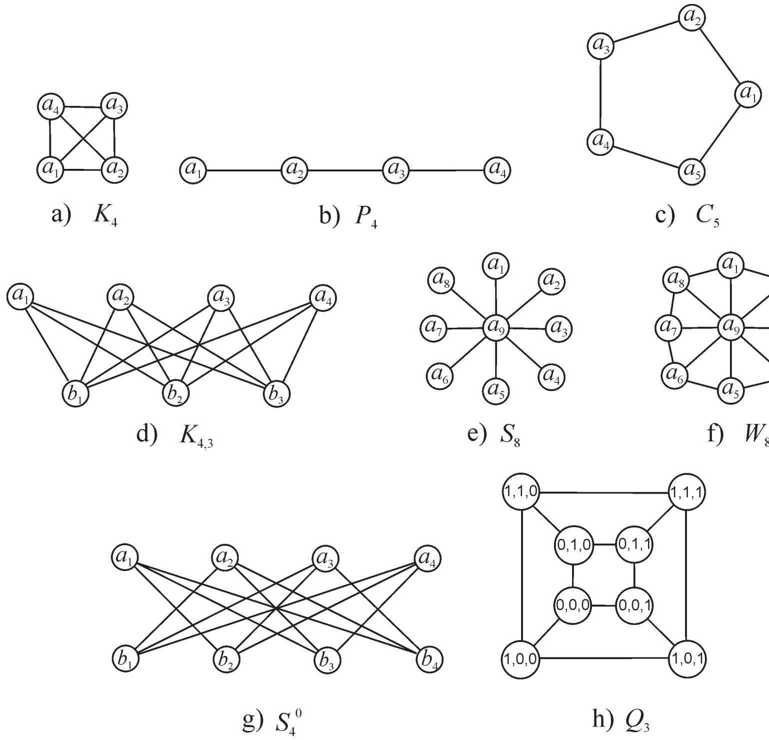
Definisaćemo neke vrste grafova: kompletan graf K_n, put P_n, ciklus C_n, kompletni bipartitni graf $K_{p,q}$, zvezdu S_n, točak W_n, krunu S_n^0 i hiperkocku Q_n.

Kompletan graf K_n je graf sa n čvorova takav da postoji grana između svaka dva čvora. Na slici 1a je prikazan K_4.

Put P_n je povezan graf sa n čvorova i $n-1$ granom, takav da ima tačno 2 čvora stepena 1. Na slici 1b je prikazan P_4.

Ciklus C_n je povezan graf koji sadrži n čvorova i n grana i čiji je svaki čvor stepena 2. Primer C_5 je prikazan na slici 1c.

Kompletni bipartitni graf $K_{p,q}$ se sastoji od dva disjunktna skupa čvorova A i B (gde je $|A| = p$ i $|B| = q$), tako da grane spajaju sve čvorove iz A sa svim čvorovima iz B. Primer $K_{4,3}$ je prikaza na slici 1d.



Slika 1.
Neke klase grafova

Figure 1.
Some classes of graphs

Zvezda S_n je kompletni bipartitni graf oblika $K_{1,n}$. Primer S_8 je prikazan na slici 1e.

Točak W_n je graf koji se sastoji od ciklusa C_n, čiji su svi čvorovi susedni sa još jednim $(n + 1)$-vim čvorom. Primer W_8 se nalazi na slici 1f.

Kruna S_n^0 je kompletni bipartitni graf $K_{n,n}$ sa čvorovima iz skupova $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ bez grana između čvorova a_i i b_i, za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Primer S_4^0 je prikazan na slici 1g.

Hiperkocka Q_n je graf koji se konstruiše na sledeći način: čvorove postavljamo u tačke celobrojne rešetke n-dimenzionalnog Euklidskog prostora čije su sve koordinate ili 0 ili 1. Grana povezuje dva čvora ako i samo ako se oni razlikuju u tačno jednoj koordinati. Primer Q_3 je prikazan na slici 1h.

2.2. Verovatnoća

U ovom poglavlju uvodimo osnovne pojmove i teoreme iz verovatnoće koje ćemo koristiti u radu.

Prostor elementarnih događaja Ω predstavlja skup svih mogućih ishoda ω jednog eksperimenta. Događaj definišemo kao neki podskup od Ω.

Definicija. Neka je $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_1\}$ skup svih mogućih elementarnih događaja i neka je $A = \{\omega_i : i \in I\}$ gde je $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Verovatnoća događaja A je:

$$P(A) = \frac{|I|}{n}.$$

Ukoliko je skup Ω beskonačan sa definisanom funkcijom mere μ: $M \to \mathbf{R}$ (gde je $M \subset \mathcal{P}(\Omega)$ kolekcija merljivih skupova), onda verovatnoću računamo po formuli:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

U slučajevima kada je $\Omega \subset \mathbf{R}$ onda je μ dužina, kada je $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ onda je μ površina, kada je $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ onda je μ zapremina itd. Iako smo događaje definisali kao skupove, mi ćemo ih tretirati kao rečenice. Na narednu teoremu ćemo se često pozivati i navodimo je bez dokaza.

Teorema 1. Neka je $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ familija događaja. Tada važi

$$P\left(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Jednakost se dostiže ako i samo ako je $A_i \cap A_j = \varnothing$, za sve $i \neq j$, gde $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Slučajna promenljiva X je funkcija koja svakom ishodu dodeljuje neki realan broj, tj. $X: \Omega \to \mathbf{R}$. Slučajnu promenljivu X nazivamo indikatorom događaja A ukoliko: X ima vrednost 1 ako se A desio ili 0 ukoliko se A nije desio. Očekivana vrednost slučajne promenljive X sa mogućim ishodima x_1, x_2, …, x_n, koji se događaju sa verovatnićama $p_1, p_2, \ldots, p_n$ redom, je:

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Još jedno veoma važno tvrđenje koje ćemo koristiti je linearnost funkcije očekivanja i navodimo ga bez dokaza.

Teorema 2. Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ slučajne promenljive i $c_1, c_2, \ldots, c_n$ realne konstante. Onda važi:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i).$$

Kroz rad ćemo se često sustretati sa funkcijom bojenja $f: A \to B$, gde je A skup objekata koje bojimo, a B skup boja. Pod izrazom random bojenje podrazumevaćemo slučajno bojenje sa uniformnom raspodelom (svi elementarni događaji imaju istu verovatnoću da budu rezultat eksperimenta) na skupu bojenih objekata A, ukoliko to nije drugačije naglašeno.

2.3. Asimptotske funkcije i aproksimacije

U ovom poglavlju ćemo uvesti nekoliko asimptotskih oznaka i pomoćnih aproksimacija koje ćemo korisiti tokom rada.

Definicija. Neka su $f, g: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ aritmetičke funkcije.

– Pišemo $f(x) = O(g(x))$ ako i samo ako postoje pozitivne konstante $C \in \mathbf{R}$ i $N \in \mathbf{N}$ tako da važi:

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|, \text{ za sve } x > N.$$

– Pišemo $f(x) = \Omega(g(x))$ ako i samo ako je $g(x) = O(f(x))$.

– Pišemo $f(x) \sim g(x)$ ako i samo ako važi:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

– Pišemo $f(x) \prec g(x)$ ako i samo ako važi:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < 1.$$

– Pišemo $f(x) \lesssim g(x)$ ako i samo ako je $f(x) \prec g(x)$ ili $f(x) \sim g(x)$.

Prethodno uvedene asimptotske oznake su nam od velike važnosti da bismo uvideli kako se određene aritmetičke funkcije ponašaju u odnosu na neke nama dobro poznate funkcije. Navodimo jos dve leme koje ćemo intenzivno koristiti u poslednjoj glavi.

Lema 2. Ako je $\limsup_{n\to\infty} f(n) < 1$, onda postoji $n_1 \in \mathbf{N}$ tako da za sve $n > n_1$ važi $f(n) < 1$.

Dokaz. Direktno iz definicije limes superiora. □

Lema 3. Neka je funkcija f: $\mathbf{N} \to \mathbf{R}^+$ takva da je $\lim_{n\to\infty} \frac{f(k)}{k} = \infty$. Tada je $\binom{f(k)}{k} \sim \left(\frac{f(k)e}{k}\right)^k$, kada $k \to \infty$.

Dokaz. Obeležimo sa $n = f(k)$. Iz Stirlingove aproksimacije $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$ i $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim e$ dobijamo da je:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}}{\left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{2\pi k} \cdot \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \cdot \sqrt{2\pi(n-k)}} =$$

$$= \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{k^{k+\frac{1}{2}}(n-k)^{n-k+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi}} = \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k+\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{k}\right)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{\frac{n-k}{k}}\right)^{n-k+\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{k}\right)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \sim e^{\frac{k(n-k+\frac{1}{2})}{n-k}} \left(\frac{n}{k}\right)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \sim$$

$$\sim \left(\frac{ne}{k}\right)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}.$$

□

Napomena. Prepuštamo čitaocu da se uveri da važi $\binom{f(k)}{2}^k \sim \frac{f(k)^{2k}}{2^k}$ uz pretpostavke iz prethodne leme i to će nam biti od koristi u poslednjoj glavi.

3. Primena u Ramseyevoj teoriji

U ovoj glavi ćemo dati donje granice za Ramseyeve brojeve grafova. Ramseyev broj $R(k, t)$ je najmanji prirodan broj n takav da se za svako bojenje grana grafa K_n u dve boje (recimo crvenom i plavom) može naći makar jedan podgraf K_k grafa K_n čije su sve grane obojene crvenom bojom ili makar jedan podgraf K_t čije su sve grane obojene plavom bojom.

Prikazaćemo tri metoda za određivanje donjih granica Ramseyevih brojeva. U svim tehnikama u radu ćemo prostor verovatnoće postavljati u zavisnosti od neke verovatnoće p. U nastavku bi trebalo odrediti taj parametar p kako bi se dobio što optimalniji prostor verovatnoće, međutim, mi se nećemo zadržavati na tome. Prva tehnika predstavlja osnovni probabilistički metod.

Teorema 3. Ako postoji realan broj $0 \leq p \leq 1$ takav da važi:

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}} < 1,$$

onda je $R(k, l) > n$.

Dokaz. Posmatrajmo random bojenje grana grafa K_n sa dve boje, recimo crvenom i plavom i neka je verovatnoća da je grana obojena crvenom bojom $p \in (0, 1)$, a verovatnoća da je obojena plavom $1 - p$. Neka za skup C od k čvorova, A_C predstavlja događaj kada je svaka grana podgrafa K_k, koji je indukovan skupom C, obojena crvenom bojom, dok za neki skup D od l čvorova B_D predstavlja događaj kada je svaka grana podgrafa K_l, indukovanog skupom D, obojena plavom bojom. Kako K_k sadrži $\binom{k}{2}$, a K_l $\binom{l}{2}$ grana, to je:

$$p(A_C) = p^{\binom{k}{2}} \text{ i } p(B_D) = (1-p)^{\binom{l}{2}}.$$

Kako graf K_n sadrži $\binom{n}{k}$ kompletnih grafova sa k čvorova, odnosno $\binom{n}{l}$ kompletnih grafova sa t čvorova, dobijamo da je verovatnoća da se makar jedan od događaja A_C i B_D desi:

$$P\left(\left(\bigvee_{C \subseteq V, |C|=k} A_C\right) \vee \left(\bigvee_{D \subseteq V, |D|=l} B_D\right)\right) \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}} < 1,$$

gde smo koristili Teoremu 1. Dakle, sa pozitivnom verovatnoćom ni jedan od događaja A_C i A_D se neće dogoditi, pa postoji bojenje grana grafa K_n takvo da on ne sadrži ni jedan crveni K_k i nijedan plavi K_t. Zaključujemo da je $R(k, l) > n$. □

Napomena. U najopštijem slučaju je prilično teško izračunati p koje daje najbolju donju granicu. U slučaju $k = l$ je to nešto lakši posao i može se doći veoma blizu, do danas, najbolje poznate granice:

$$R(k, k) = \Omega(k \cdot 2^{\frac{k}{2}}).$$

Osnovna ideja sledeće varijacije probabilističkog metoda je nešto detaljnije objašnjena u uvodu. Ona daje donju granicu Ramseyevih brojeva u nešto opštijem slučaju.

Teorema 4. Za svako $n \in \mathbf{N}$ i $o < p < 1$ važi:

$$R(k,t) > n - \left(\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}} \right).$$

Dokaz. Posmatrajmo kompletan graf K_n i random bojenje njegovih grana crvenom i plavom bojom, tako što svaku granu bojimo crvenom bojom sa verovatnoćom p, odnosno plavom sa verovatnoćom $1 - p$. Neka je X_k broj crvenih K_k, a X_l broj plavih K_l u grafu K_n i $X = X_k + X_l$. Tada prema Teoremi 2 imamo da je:

$$E(X) = E(X_k) + E(X_l) = \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}.$$

Dakle, postoji bojenje grana grafa K_n takvo da je $X \leq E(X)$. Posmatrajmo takvo bojenje, i u svakom crvenom K_k i plavom K_l obrišimo jedan čvor. Ovako dobijeni graf neće sadržati ni jedan crveni K_k ni plavi K_l. Od početnih n čvorova grafa K_n obrisali smo najviše $E(X)$ čvorova, pa ostaje barem $n - E(X)$ čvorova. Graf koji nam je ostao ne sadrži ni jedan crveni K_k ni plavi K_l, dakle $R(k,t) > n - E(X)$. □

Treći metod koristi lokalnu lemu i on daje najbolju donju granicu.

Teorema 5. Ako je:

$$e\left(\binom{k}{2}\binom{n-2}{k-2} + \binom{k}{2}\binom{n-2}{l-2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{2} + \binom{l}{2}} \right)^{\binom{k}{2}} < 1,$$

za $k > l$, onda je $R(k, l) > n$.

Dokaz. Označimo sa $\mathcal{K}$ familiju svih k-točlanih podskupova skupa čvorova grafa K_n i sa $\mathcal{L}$ familiju svih l-točlanih podskupova skupa čvorova grafa K_n.

Posmatrajmo random bojenje grafa K_n sa dve boje: crvenom i plavom, tako što svaku granu bojimo crvenom sa verovatnoćom p, odnosno plavom sa verovatnoćom $1 - p$. Za svaki skup $S \in \mathcal{K}$, neka je A_S događaj da je svaka grana kompletnog grafa indukovanog skupom čvorova S obojena crvenom bojom. Slično, za svaki skup $T \in \mathcal{L}$, neka je B_T događaj da je svaka grana kompletnog grafa indukovanog skupom čvorova T obojena plavom bojom. Za proizvoljne $S \in \mathcal{K}$ i $T \in \mathcal{L}$, verovatnoće događaja A_S i B_T su redom:

$$P(A_S) = p^{\binom{k}{2}} \ \text{ i } \ P(B_T) = (1-p)^{\binom{l}{2}}.$$

Označimo skupove $A_{\mathcal{K}} = \bigcup_{S \in \mathcal{K}} \{A_S\}$ i $B_{\mathcal{L}} = \bigcup_{T \in \mathcal{L}} \{B_T\}$. Odredimo sada optimalno p za koje će veći od brojeva $p^{\binom{k}{2}}$ i $(1-p)^{\binom{l}{2}}$ biti najmanji moguć, tj. odredimo

$$P=\min_{p\in(0,1)}\left\{\max\{p^{\binom{k}{2}},(1-p)^{\binom{l}{2}}\}\right\}.$$

Dokažimo da se P dostiže kada je $p^{\binom{k}{2}}=(1-p)^{\binom{l}{2}}$. Tada ćemo uzeti $p=\dfrac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{2}+\binom{l}{2}}$, što dobijamo koristeći standardne aproksimacije $p\approx e^{p-1}$ i $1-p\approx e^{-p}$ koje važe kad $p\in[0,1]$.

Obeležimo sa p_1 onu vrednost p, za koju je $p^{\binom{k}{2}}=(1-p)^{\binom{l}{2}}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da se P dostiže za neko p_2 za koje je $p_2^{\binom{k}{2}}\neq(1-p_2)^{\binom{l}{2}}$. Ako je $p_2<p_1$, tada važi $p_1^{\binom{k}{2}}\neq(1-p_1)^{\binom{l}{2}}<(1-p_2)^{\binom{l}{2}}$ što je kontradikcija. Analogno pokazujemo da ne može biti ni $p_2>p_1$.

Dakle, verovatnoća za svaki događaj $C\in A_{\mathcal{K}}\cup B_{\mathcal{L}}$ je:

$$P(C)\leq\left(\frac{\binom{k}{2}}{\binom{k}{2}+\binom{l}{2}}\right)^{\binom{k}{2}}.$$

Svaki događaj A_S zavisi od događaja A_{S_1}, odnosno B_T, za sve skupove čvorova $S_1\in\mathcal{K}$ i $T\in\mathcal{L}$ za koje važi $|S\cap S_1|\geq 2$, odnosno $|S\cap T|\geq 2$. Dakle zavisi od najviše $\binom{k}{2}\binom{n-2}{k-2}+\binom{k}{2}\binom{n-2}{l-2}$ drugih događaja.

Slično, svaki događaj B_T zavisi od događaja A_S, odnosno B_{T_1}, za sve skupove $S\in\mathcal{K}$ i $T_1\in\mathcal{L}$ za koje važi $|T\cap S|\geq 2$, odnosno $|T\cap T_1|\geq 2$. Dakle zavisi od najviše $\binom{l}{2}\binom{n-2}{l-2}+\binom{l}{2}\binom{n-2}{k-2}$ drugih događaja. Dakle, svaki od događaja iz skupa $A_{\mathcal{K}}\cup B_{\mathcal{L}}$ zavisi od najviše $d=\binom{k}{2}\binom{n-2}{k-2}+\binom{k}{2}\binom{n-2}{l-2}$ događaja, jer je $k>l$.

Po uslovu teoreme važi:

$$ep^{\binom{k}{2}}(d+1)\leq 1.$$

Po lokalnoj lemi, verovatnoća da se ni jedan od događaja iz skupa $A_{\mathcal{K}}\cup B_{\mathcal{L}}$ neće desiti je pozitivna, tj. postoji bojenje grafa K_n koje ne sadrži ni jedan crveni K_k ni plavi K_l. Dakle, $R(k,l)>n$. □

4. Primena u teoriji grafova

U ovoj glavi ćemo videti nekoliko zanimljivih primena probabilističkog metoda u problemima iz teorije grafova. Ovi problemi su postavljeni u knjizi Alona i Spensera *The probabilistic method* (Alon i Spencer 2004).

Problem 1. Neka je G graf sa $n \leq 10$ čvorova i x grana takav da ukoliko mu dodamo bilo koju novu granu poveća se broj njegovih podgrafova izomorfnih sa K_{10}. Dokazati da G ima barem $8n - 92$ grana.

Rešenje. Ukoliko bismo imali čvor v koji je stepena manjeg od 8, dodavanjem nove grane incidentne sa v ne bismo dobili novi podgraf izomorfan sa K_{10}, jer bi tada stepen čvora v bio najviše $8 < 9$, pa on ne bi bio uključen ni u jedan podgraf grafa G izomorfan sa K_{10}. Dakle, svaki čvor ima barem 8 suseda koji su svi međusobno povezani. Uzmimo proizvoljni čvor v grafa G. Neka je A skup suseda čvora v, a B skup čvorova koji nisu susedni sa v. Za svaki $u \in B$ se može naći barem 8 čvorova iz A sa kojima je on susedan, jer inače povlačenje grane između u i v ne bi stvorile nove podgrafove izomorfne sa K_{10}. Dakle, dobijamo da je $x \geq |A| + \binom{8}{2} + 8|B|$. Pošto smo čvor v birali na slučajan način, imamo da je $E(|A|) = \frac{2x}{n}$, pa možemo birati v tako da je $|A| \leq \frac{2x}{n}$. Koristeći i da je $|A| + |B| = n - 1$ dobijamo da je:

$$x \geq |A| + \binom{8}{2} + 8|B| = n - 1 + 28 + 7|B| = n + 27 + 7(n - 1 - |A|) \geq$$

$$\geq n + 27 + 7(n - 1 - \frac{2x}{n}) = 8n + 20 - \frac{14x}{n}.$$

Iz poslednje relacije se dobija da je:

$$x \geq \frac{8n^2 + 20n}{n + 14} = 8n - 92 + \frac{1288}{n + 14} \geq 8n - 92.$$

Napomena. Rezultat iz prethodnog zadatka se može poboljšati: najbolja donja granica je $x \geq 8n - 36$ i to je rezultat koji se i dostiže za svako $n \in \mathbf{N}$.

Problem 2. Neka je $G = (V, E)$ graf sa n čvorova, sa minimalnim stepenom čvora $\delta > 10$. Tada postoji particija skupa V na dva disjunktna podskupa A i B tako da je $|A| \leq n(p + (1-p)^{\delta+1} + (1 - p(p + (1-p)^{\delta+1})^{\delta}) = M$ za svako $p \in (0, 1)$ i da svaki čvor u B ima makar jednog suseda u A i makar jednog suseda u B.

Dokaz. Definišimo skup $X \subseteq V$ tako da za svaki čvor grafa G važi $P(v \in X) = p$ i $P(v \in X) = 1 - p$. Dakle, $E(|X|) = np$. U skup $Z \subset V \setminus X$ stavimo sve one koji imaju susede samo u $V \setminus X$. Zatim, u skup $T \subset V \setminus (X \cup Z)$ stavimo sve one koji imaju susede samo u $X \cup Z$. Tako dobijamo skupove $A = X \cup Z \cup T$ i $C = V \setminus A$. Prethodnim biranjima smo se osigurali da svaki elemenat skupa B ima barem jednog suseda u A i barem jednog suseda u B. Ako je $v \in V$ proizvoljno imamo da je:

$P(v \in Z) = P$ (ni v ni njegovi susedi nisu u X) $= (1-p)^{\delta(v)+1} \leq (1-p)^{\delta+1}$,

$P(v \in T) = P$ (v nije u X, a svaki njegov sused je ili u X ili u Z) $\leq$

$\leq (1-p)(p+(1-p)^{\delta+1})^{\delta(v)} \leq (1-p)(p+(1-p)^{\delta+1})^{\delta}$.

Sada je očekivanje kardinalnosti skupa Y:

$$E(|A|) \leq n(p+(1-p)^{\delta+1} + (1-p)(p+(1-p)^{\delta+1})^{\delta} = M.$$

Dakle, postoji izbor skupa X, takav da dobijemo $|A| \leq M$.

5. Bojenje hipergrafova

Hipergraf je uređeni par (V, E) gde V predstavlja skup čvorova, a $E \subset \subset \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$ skup grana. Dakle, hipergraf je uopštenje grafa u kojem dozvoljavamo da jedna grana povezuje više ili manje od dva čvora istovremeno. Za hipergraf kažemo da je n-uniformni ako su mu sve grane skupovi iste kardinalnosti n.

Teorema 6. Za svaki n-uniformni hipergraf ($n \geq k$) sa najviše $\frac{k^{n-1}}{(n-1)^n}$ grana postoji bojenje njegovih čvorova sa k boja, takvo da svaka grana sadrži čvorove svih boja.

Dokaz. Označimo skup boja sa S. Neka je dat n-uniforman hipergraf H koji ispunjava uslove zadatka, čiji su čvorovi obojeni nasumično sa k datih boja iz skupa S. Neka A_e predstavlja događaj da grana e ne sadrži sve boje iz skupa S, a A događaj da makar jedna grana grafa H ne sadrži sve boje. Kako je $\frac{(k-1)^n}{k^n}$ verovatnoća da grana ne sadrži jednu konkretnu boju iz S, dobijamo:

$$P(A_e) < \sum_{i \in S} \frac{(k-1)^n}{k^n} = k \cdot \frac{(k-1)^n}{k^n} = \frac{(k-1)^n}{k^{n-1}}.$$

Dalje, verovatnoća da se ostvari događaj A je $P(A) = P\left(\bigvee_{e \in E} A_e\right)$, dakle iz Teoreme 1 dobijamo da je:

$$(A) = P\left(\bigvee_{e \in E} A_e\right) < \frac{k^{n-1}}{(k-1)^n} \cdot \frac{(k-1)^h}{k^{n-1}},$$

jer graf H sadrži najviše $\frac{k^{n-1}}{(k-1)^n}$ grana.

Dobijamo $P(A)$, dakle sa pozitivnom verovatnoćom ni jedan od događaja A_e se neće dogoditi, tj. postoji bojenje čvorova grafa H tako da svaka grana sadrži svih k boja. □

Skup čvorova u hipergrafu zovemo nezavisnim ukoliko graf indukovan tim skupom ne sadrži nijednu granu. Sledeća teorema nam daje donju granicu najvećeg nezavisnog skupa u proizvoljnom hipergrafu.

Teorema 7. Svaki k-uniformni hipergraf $G = (V, E)$ sa n čvorova i m grana sadrži nezavisan skup sa barem $\left\lfloor \frac{n^{\frac{k}{k-1}}(k-1)}{\sqrt[k-1]{mk^k}} \right\rfloor$ elemenata. Ukoliko je

$k = 2$, postoji nezavisan skup čvorova koji sadrži barem $\left\lfloor \frac{n^2}{2m+n} \right\rfloor + 1$ elemenata.

Dokaz. Neka je V skup čvorova datog hipergrafa i neka je A njegov slučajno izabrani podskup sa tačno r čvorova (r ćemo kasnije odrediti). Očigledno za svaki čvor $v \in V$ važi $P(v \in A) = \frac{r}{n} = p$. Neka je X_e indikator događaja kada se svi čvorovi inicidentni sa granom e nalaze u skupu A. Tada je $E(X_e) = p^k$ za svaku granu datog hipergrafa. Ako sa X obeležimo ukupan broj grana čiji su svi čvorovi u skupu A, onda je:

$$E(X) = \sum_{e \in E} E(X_e) = mp^k.$$

Dakle, možemo birati takav skup A da imamo najviše mp^k „loših" grana. Zatim izbacimo za svaku od tih „loših" grana po jedan čvor iz skupa A koji je sa njom incidentan i ostane nam nezavisan skup od barem $f(r) = r - mp^k = r - m\left(\frac{r}{n}\right)^k$ čvorova. Ostaje još da odredimo za koje r funkcija f dostiže maksimalnu vrednost. Imamo da je $f'(r) = 1 - \frac{mkr^{k-1}}{n^k}$, pa je traženi maksimum za $\sqrt[k-1]{\frac{n^k}{mk}}$. Dakle, možemo naći nezavisan skup veličine $\left\lfloor \frac{n^{\frac{k}{k-1}}(k-1)}{\sqrt[k-1]{mk^k}} \right\rfloor$.

Pogledajmo sada slučaj kada je $k = 2$, tj. kada je G običan graf.

Posmatrajmo proizvoljnu permutaciju $A_1, A_2, \ldots, A_n$ čvorova grafa G i obeležimo stepene tih čvorova redom sa $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Neka je X skup lepih čvorova koji su povezani samo sa čvorovima sa manjim indeksom, tj. $A_i \in X$ ako za svaki čvor A_j sa kojim je povezan važi $i > j$.

Posmatrajmo sada čvor A_i i d_i čvorova sa kojima je on spojen: $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{d_i}}$. Svaki od čvorova iz skupa $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{d_i}}\}$ ima jednaku verovatnoću da ima najmanji indeks, dakle:

$$P(A_i \text{ je lep}) = \frac{1}{d_i + 1}.$$

Sada možemo odrediti očekivani broj kardinalnosti skupa X:

$$E(|X|) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \frac{1}{d_i + 1}.$$

Kako iz nejednakosti harmonijske i aritmetičke sredine imamo da je:

$$E(|X|) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}(d_i + 1)} \geq \frac{n^2}{n + \sum_{i=1}^{n} d_i} = \frac{n^2}{2m}.$$

Dakle, postoji permutacija čvorova grafa G takva da je broj lepih čvorova barem:

$$\left\lfloor \frac{n^2}{n+2m} \right\rfloor + 1 = f.$$

Neka su to čvorovi X = {A_{X1}, A_{X2}, …, A_{Xf}} i neka su im indeksi poređani u rastućem nizu: $X_1 > X_2 > \ldots > X_f$. Dokažimo da je X upravo skup nezavisnih čvorova. Pretpostavimo suprotno, to jest da postoji grana između neka dva čvora A_{X_i} i A_{X_j}, i neka je $i < j$ (analogno se dokazuje i za $i > j$). Sada po definiciji lepog čvora A_{X_i} ne može biti povezan sa A_{X_j}, kako je $X_i < X_j$, kontradikcija. Dakle, X je zaista skup nezavisnih čvorova i $|X| = f = \left\lfloor \frac{n^2}{n+2m} \right\rfloor$. □

Za kraj ove glave, prikažimo još jedan zanimljiv rezultat vezan za hipergrafove.

Teorema 8. Neka je $n \geq 2$ i neka je H n-uniforman hipergraf sa najviše k^{n-1} grana. Tada postoji bojenje skupa čvorova grafa H sa k boja tako da ni jedna grana nije monohromatska.

Dokaz. Posmatrajmo nasumično bojenje hipergrafa H sa k boja. Označimo sa A događaj da je jedna konkretna grana monohromatska. Kako imamo k boja, dobijamo:

$$P(A) = k \cdot \frac{1}{k^n} = k^{1-n}.$$

Neka je X broj monohromatskih grana u grafu, tako da je $X = \sum_{e \in E} X_e$, gde je X_e indikator za događaj kada je grana e monohromatska. Sada dobijamo:

$$E(X) = \sum_{e \in E(H)} E(X_e) = \sum_{e \in E(H)} P(A) = |E(H)| \cdot k^{1-n} \leq k^{n-1} \cdot k^{1-k} = 1.$$

Kako je očekivani broj monoromatskih grana najviše 1 i kako svakako možemo obojiti čitav graf jednom bojom u kom slučaju je $X > 1$, postoji bojenje čvorova grafa G tako da ni jedna grana nije monohromatska. □

6. Primene u ostalim granama matematike

Probabilistički metod može biti veoma moćan pri ograničavanju kardinalnosti familija skupova koje imaju neke osobine.

Teorema 9 (Špernerova teorema). Neka je F familija podskupova skupa N_n = {1, 2, …, n} takva da ni za koja dva elementa A i B te familije ne važi $A \subset B$. Tada je:

$$|F| \leq \binom{n}{n/2}.$$

Dokaz. Neka je $\sigma \in S_n$ slučajno odabrana permutacija skupa N_n i neka je:

$$X = \{\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)\} : \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)\} \in F, i \in N_n\}.$$

Neka je F = {A_1, A_2, …, A_r} i neka je za svako $i \in$ {1, 2, …, r}, B_i događaj da $A_i \in X$. Očigledno je da su zbog uslova teoreme svi događaji B_i međusobno disjunktni. Za svako $i \in$ {1, 2, …, r} važi da je:

$$P(B_i) = P(A_i = \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(|A_i|)\}) = \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \geq \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}},$$

pa je $1 \geq P\left(\bigvee_{i=1}^{r} B_i\right) = \sum_{i=1}^{r} P(B_i) \geq \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} = \frac{|F|}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}.$ □

Još jedan primer primene probabilističkog metoda u kombinatorici je jedan od dokaza Erdős-Ko-Rado-ve teoreme koje se može naći u knjizi Alona i Spensera (Alon i Spencer 2004).

Naredna teorema pokazuje primenu probabilističkog metoda u linearnoj algebri.

Teorema 10. Neka su $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektori norme 1. Tada postoje $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ takvi da je:

$$|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \ldots + \varepsilon_n v_n| \leq \sqrt{n}.$$

Takođe, postoje i $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ takvi da je:

$$|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \ldots + \varepsilon_n v_n| \leq \sqrt{n}.$$

Dokaz. Neka su $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ izabrani uniformno i nezavisno iz skupa $\{1, -1\}$. Neka je $X = |\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \ldots + \varepsilon_n v_n|^2$. Tada je:

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j v_i v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E(\varepsilon_i \varepsilon_j) v_i v_j.$$

Pošto su, za $i \neq j$, ε_i i ε_j nezavisno uzeti brojevi, imamo da je $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i)E(\varepsilon_j) = 0$. Kada je $i = j$ imamo da je $E(\varepsilon_i^2) = 1$, pa je $E(X) = \sum_{i=1}^{n} v_i v_i = n$. Dakle, postoji izbor brojeva $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ takav da je $X \geq n$ i izbor takav da je $X \leq n$. Korenovanjem obe strane dobijamo traženi rezultat. □

Erdős je dokazao da se iz svakog skupa prirodnih brojeva od n elemenata može izdvojiti podskup veličine barem $n/3$ tako da u njemu jednačina $x + y = z$ nema rešenja i dokaz toga se takođe može naći kod Alona i Spensera (Alon i Spencer 2004). Naredni rezultat je njegovo uopštenje na realne brojeve. Ako je S proizvoljan skup i r realan broj, sa B_r^S označavamo skup svih razlomljenih delova brojeva oblika ar (koristimo oznaku $\{x\}$ za razlomljeni deo broja x) za $a \in S$, to jest:

$$B_r^S = \{\{ar\} : a \in S\}.$$

Dokažimo prvo sledeću lemu.

Lema 4. Neka su $v_1, v_2, \ldots, v_r$ proizvoljni celi brojevi, S proizvoljan skup realnih brojeva i x proizvoljan realan broj. Ukoliko jednačina $v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_rx_r + k = 0$ po $x_1, x_2, \ldots, x_r$ nema rešenja ni za jedan ceo broj k u skupu B_x^S, onda ni jednačina $v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_rx_r = 0$ nema rešenja u skupu S.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka je $(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ rešenje jednačine $v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_rx_r = 0$ i $y_1, \ldots, y_r \in S$. Ako obeležimo sa $z_i = y_ix$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, dobijamo $\{v_1z_1 + v_2z_2 + \ldots + v_rz_r\} = 0$. Koristeći da za svako

$n \in \mathbf{Z}$ i $\alpha \in \mathbf{R}$ važi da je $n\{\alpha\}-\{n\alpha\} \in \mathbf{Z}$, dobijamo $v_1\{z_1\}+\ldots+v_r\{z_r\}+k=0$, za neko $k \in \mathbf{Z}$. Kako $\{z_i\} \in B_x^S$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, dolazimo do kontradikcije sa uslovima leme. □

Teorema 11. Neka su $v_1, v_2, \ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots, u_s$ proizvoljni prirodni brojevi za koje važi da je:

$$M = v_1, v_2, \ldots, v_r \neq u_1, u_2, \ldots, u_s = N.$$

Postoji konstanta c_0 takva da za svaki skup A od n pozitivnih realnih brojeva postoji njegov podskup B sa barem cn elemenata takav da u njemu jednačina $v_1x_1+v_2x_2+\ldots+v_rx_r=u_1y_1+u_2y_2+\ldots+u_ry_r$ po $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ nema rešenja.

Napomena. Pošto nam je za potrebe dokaza ove teoreme potrebno da je x slučajno izabran pozitivan realan broj, a takav alat nam nije na raspolaganju, mi ćemo uzeti da je x nasumično izabran broj iz intervala $[0, y]$ (sa uniformnom raspodelom), a zatim ćemo posmatrati određene verovatnoće kada $y \to \infty$.

Dokaz. Neka je x slučajno izabran realan broj iz skupa $[0, y]$, gde je y dovoljno veliki pozitivan realan broj. Tada brojevi xa $(a \in A)$ imaju uniformnu raspodelu na skupu $[0, ya]$. Bez umanjenja opštosti, neka je $N > M$. Posmatrajmo interval $C=\left(\frac{M}{N^2-M^2}, \frac{N}{N^2-M^2}\right)$ i neke brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_s$ unutar njega. Iz nejednakosti:

$$v_1x_1+v_2x_2+\ldots+v_rx_r+1>\frac{M}{N^2-M^2}\cdot M+1=\frac{N}{N^2-M^2}\cdot N>$$
$$>u_1y_1+u_2y_2+\ldots+u_sy_s,$$
$$v_1x_1+v_2x_2+\ldots+v_rx_r<\frac{N}{N^2-M^2}\cdot M=\frac{M}{N^2-M^2}\cdot N<$$
$$<u_1y_1+u_2y_2+\ldots+u_sy_s,$$

dobijamo da jednačina $v_1z_1+v_1z_1+\ldots+v_rz_r=u_1t_1+u_1t_1+\ldots+u_st_s$ nema rešenja u skupu C ni za jedan ceo broj k. Ukoliko pustimo da $y \to \infty$ onda dobijamo da za sve $b \in B_x^A$ važi da je $P(b \in C)=|C|=\frac{1}{M+N}$ ($|C|$ označava dužinu intervala kojeg C predstavlja). Neka je $B=\{a \in A : \{ax\} \in C\}$. Sada imamo da je $E(|B|)=|A|\cdot P(\{ax\} \in C)=\frac{n}{M+N}$. Kako jednačina $v_1z_1+\ldots$ $\ldots+v_rz_r=u_1t_1+\ldots+u_st_s+k$ nema rešenja u skupu C ni za jedan ceo broj k, to ona nema rešenja ni za jedan ceo broj k u skupu B_x^B. Prema lemi 4, jednačina $v_1z_1\ldots+v_rz_r=u_1t_1+\ldots+u_st_s$ nema rešenja u skupu B. Kako je $E(|B|)=\frac{n}{M+N}$, možemo izabrati x takav da da skup B ima barem $\frac{n}{M+N}$ elemenata $(c=\frac{1}{M+N})$. □

Za kraj ove glave, prikažimo jedan primer primene probabilističkog metoda u kombinatornoj geometriji. Kod Alona i Spensera (Alon i Spencer 2004) je pokazano da postoji raspored n tačaka u jedinični kvadrat tako da je površina svakog trougla određenog tim tačkama veća od $1/(100n^2)$. Naredna teorema je verzija tog rezultata u $\mathbf{R}^3$.

Teorema 12. Postoji raspored n tačaka u jediničnoj kocki, takav da je zapremina svake trostrane piramide (tetraedra) određene tim tačkama veća od $\frac{\sqrt{3}}{1024\pi^2 n^3}$.

Dokaz. Oslonićemo se na ideju vrlo sličnu onoj korišćenoj u knjizi Alona i Spensera (Alon i Spencer 2004). U nastavku, sva dešavanja posmatramo unutar jedinične kocke. Obeležimo sa $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{1024\pi^2 n^3}$. Naš prvi zadatak je da za slučajno izabrane tri tačke nađemo verovatnoću da je površina trougla koji prave skoro tačno ε_1. Neka je P uniformno izabrana tačka. Posmatrajmo sferni prsten sa centrom u tački P, spoljašnjeg poluprečnika $b+\Delta b$, a unutrašnjeg b. Verovatnoća da nam nova, slučajno izabrana tačka Q, upadne u taj sferni prsten je:

$$P(b \le PQ \le b+\Delta b) \le \frac{4}{3}\pi(b+\Delta b)^3 - \frac{4}{3}\pi b^3.$$

Uzimajući da $\Delta b \to \infty$ dobijamo da je:

$$P(b \le PQ \le b+\Delta b) \le \frac{4}{3}\pi(3b^2 \cdot db + 3b \cdot (db)^2 + (db)^3).$$

Posmatrajmo sada duž PQ koja je pretpostavljene dužine b. Posmatrajmo skup tačaka R koje su na udaljenosti h od duži PQ gde je $\frac{2\varepsilon_1}{b} \le h \le$ $\le \frac{2\varepsilon_1 + 2\Delta\varepsilon_1}{b}$ (figura u preseku kocke i cilindričnog prstena visine manje od $\sqrt{3}$). Za njih važi da je površina trougla PQR baš između ε_1 i $\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_1$. Dakle ako je R nova slučajno izabrana tačka, a μ_b površina trougla PQR imamo da je:

$$P(\varepsilon_1 \le \mu \le \varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_1) \le \sqrt{3}\,\pi\left(\frac{2\varepsilon_1 + 2\Delta\varepsilon_1}{b}\right)^2 - \sqrt{3}\,\pi\left(\frac{2\varepsilon_1}{b}\right)^2 =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}\,\pi}{b}(2\varepsilon_1 \cdot \Delta\varepsilon_1 + (\Delta\varepsilon_1)^2).$$

Dakle, ako su P, Q i R slučajno izabrane tačke, i μ površina trougla koji prave, onda je:

$$P(\varepsilon_1 \le \mu \le \varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_1) = \int_0^{\sqrt{3}} P(\varepsilon_1 \le \mu \le \varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_1) \cdot P(b \le x \le b + \mathrm{d}b) \le$$

$$\le \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4\sqrt{3}\pi}{b^2}(2\varepsilon_1 \cdot \Delta\varepsilon_1 + (\Delta\varepsilon_1)^2) \cdot \frac{4}{3}\pi(3b^2 \cdot \mathrm{d}b + 3b(\mathrm{d}b)^2 + (\mathrm{d}b)^3) =$$

$$= 16\sqrt{3}\,\pi^2(2\varepsilon_1 \cdot \Delta\varepsilon_1 + (\Delta\varepsilon_1)^2)\int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{d}b = 48\pi^2(2\varepsilon_1 \cdot \Delta\varepsilon_1 + (\Delta\varepsilon_1)^2),$$

gde se integrali po pretpostavljenoj dužini b duži PQ koja je svakako u intervalu $(0, \sqrt{3}]$. Uzimanjem da $\Delta\varepsilon_1 \to 0$ dobijamo da je:

$$P(\varepsilon_1 \le \mu \le \varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_1) \le 48\pi^2(2\varepsilon_1 \cdot \mathrm{d}\varepsilon_1 + (\mathrm{d}\varepsilon_1)^2).$$

Naredni zadatak nam je da izračunamo verovatnoću da je zapremina tetraedra koji prave četiri slučajno izabrane tačke manja od ε. Neka je ε_1 površina trougla koje čine tri tačke P, Q i R. Posmatrajmo deo prostora (unutar jedinične kocke) koji se nalazi između ravni koje su udaljene $\frac{3\varepsilon}{\varepsilon_1}$ od ravni trougla PQR (taj deo prostora se sigurno nalazi unutar kvadra čije su širina i dužina po $\sqrt{3}$, a visina $\frac{6\varepsilon}{\varepsilon_1}$. Za svaku tačku S tog prostora važi da je zapremina tetraedtra $PQRS$ najviše ε. Dakle, ako je S nova slučajno izabrana tačka, a V_{ε_1} zapremina tetraedra $PQRS$, onda je:

$$P(V_{\varepsilon_1} \leq \varepsilon) \leq (\sqrt{3})^2 \cdot \frac{2 \cdot 3\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{18\varepsilon}{\varepsilon_1}.$$

Primetimo da je površina trougla unutar posmatrane kocke najviše $\sqrt{3}/2$. Konačno, ako su P, Q, R i S slučajno izabrane tačke, a V zapremina tetraedra $PQRS$, onda je:

$$P(V \leq \varepsilon) = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} P(V_{\varepsilon_1} \leq \varepsilon) \cdot P(\varepsilon_1 \leq \mu \leq \varepsilon_1 + \mathrm{d}\varepsilon_1) \leq$$

$$\leq \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{18\varepsilon}{\varepsilon_1} \cdot 48\pi^2 (2\varepsilon_1 \cdot \mathrm{d}\varepsilon_1 + (\mathrm{d}\varepsilon_1)^2 =$$

$$= 1728\pi^2 \varepsilon \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \mathrm{d}\varepsilon_1 = 864\sqrt{3}\,\pi^2 \varepsilon,$$

gde se integrali po pretpostavljenoj površini ε_1 trougla PQR koja je svakako u intervalu $(0, \sqrt{3}/2]$. Sada možemo da pređemo na završni korak. Slučajno izaberimo $m = (4/3)\, n$ tačaka u kocki. Tada za očekivani broj tetraedara čija je zapremina manja od ε važi:

$$E(X) = \binom{m}{4} P(V \leq \varepsilon) \leq \frac{m^2}{24} \cdot 864\sqrt{3}\,\pi^2 \varepsilon = \frac{n}{3}.$$

Ukoliko za svaki „loš” tetraedar (tetraedar čija je zapremina manja od ε) izbacimo po jednu od njegovih temena, ostaće nam barem n tačaka za koje važi da su zapremine tetraedara koje čine veće od ε. □

7. Zero-sum Ramseyevi brojevi

Rasmeyev broj $R(G, k)$ je najmanji broj n takav da za svako bojenje grana kompletnog grafa K_n sa k boja postoji unutar njega monohromatska kopija grafa G.

Zero-sum Rasmeyev broj $R(G, \mathbf{Z}_k)$ je najmanji broj n takav da za svako bojenje $f : E(K_n) \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ grana grafa K_n postoji unutar njega kopija H grafa G za koju važi da je $\sum_{e \in E(H)} f(e) = 0$ u $\mathbf{Z}_k$. Drugim rečima, sada nam nije potrebno da ta kopija bude monohromatska, već da zbir boja kojim su obojene grane podgrafa H bude deljiv sa k.

Ukoliko imamo da $k \nmid |E(G)|$ onda za svako $n \in \mathbf{N}$ možemo sve grane grafa K_n obojiti bojom 1, pa zero-sum Rasmeyev broj $R(G, \mathbf{Z}_k)$ neće postojati jer će zbir boja u svakoj kopiji grafa G biti upravo $|E(G)|$. Zbog toga, u nastavku pretpostavljamo da $k \mid |E(G)|$. Takođe, kopiju H grafa G unutar K_t ćemo zvati zero-sum ukoliko pri bojenju $f: E(K_n) \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ važi da je $\sum_{e \in E(H)} f(e) = 0$ u $\mathbf{Z}_k$.

Postojanje zero-sum Ramseyevih brojeva sledi iz sledeće teoreme:

Teorema 13 (Bialostocki i Dierker 1992). Za svaki graf G i prirodan broj $k \mid |E(G)|$ važi da je:

1. $R(G, \mathbf{Z}_k) \leq R(G, k)$ i
2. $k = |E(G)| \Rightarrow R(G, 2) \leq R(G, \mathbf{Z}_k)$.

Dokaz.

1. Označimo $R(G, k) = r$. Dakle, pri proizvoljnom bojenju kompletnog grafa K_r sa k boja postoji monohromatska kopija H grafa G. Neka su sve grane grafa H obojene istom bojom b. Ali sada je $\sum_{e \in E(H)} f(e) = |E(G)| b = 0$ u $\mathbf{Z}_k$, što znači da je H ujedno i zero-sum kopija grafa G u K_r, pa je $R(G, \mathbf{Z}_k) \leq r$.

2. Neka je $R(G, 2) = n$. Posmatrajmo random bojenje grafa K_n sa dve boje, 0 i 1. Kako je $k = |E(G)|$, onda su sve zero-sum kopije ujedno i monohromatske (graf će biti zero-sum samo ako su mu grane obojene ili sve bojom 0 ili sve bojom 1). Dakle, u K_n postoji zero-sum kopija grafa G akko postoji monohromatska kopija G. Zaključujemo da je onda $R(G, \mathbf{Z}_k) \geq n$. □

Zero-sum Ramseyevi brojevi oblika $R(G, \mathbf{Z}_2)$ su u potpunosti određeni i mogu se naći u radu Yaira Caroa (Caro 1994). Slučaj kada je G zvezda S_n je takođe rešen i može se naći u radu istog autora (Caro 1992*b*). Mi ćemo se u nastavku koncentrisati na traženje donjih ograničenja zero-sum Ramseyevih brojeva. Za dosadašnje rezultate vezane za ovu oblast pogledati (Caro 1996). Naredna teorema će nam biti polazna osnova za dalje rezultate sa zero-sum Ramseyevim brojevima.

Teorema 14. Neka je G dati graf sa m grana i k prirodan broj koji deli m. Neka su t, l i s prirodni brojevi za koje važi da je $l + s = \binom{t}{2}$. Neka je S broj kopija grafa G unutar K_t i:

$$A = \sum_{i=0}^{\frac{m}{k}} \binom{l}{i \cdot k} \binom{s}{m - i \cdot k}.$$

Tada, ukoliko važi da je $A \cdot S < \binom{\binom{t}{2}}{m}$, onda je $R(G, \mathbf{Z}_k) > t$.

Dokaz. Dokažimo da ako su ispunjeni uslovi teoreme onda postoji bojenje grana grafa K_t bojama 0 i 1 takvo da ne postoji zero-sum kopija grafa G unutar njega. To će naravno značiti da je $R(G, \mathbf{Z}_k) > t$. Obojimo grane grafa K_t nasumično sa l jedinica i s nula (to npr. postižemo tako što uniformno izaberemo l-točlani skup iz skupa svih grana koji će da nam predstavlja skup grana koje smo obojili bojom 1, a ostale grane bojimo bojom 0). Uzmimo nasumičan skup B od m grana unutar K_t čiji je zbir deljiv sa k. To možemo da učinimo na upravo A načina. Zaista, broj biranja m

grana čiji je zbir $k\cdot i$ je $\binom{l}{i\cdot k}\binom{S}{m-i\cdot k}$, jer biramo $k\cdot i$ grana obojenih bojom 1 i $m=i\cdot k$ grana obojenih bojom 0. Verovatnoća da naš uzeti skup grana čini graf izomorfan sa G je:

$$P=\frac{S}{\binom{\binom{t}{2}}{m}}.$$

jer je svaka grana imala istu verovatnoću da bude izabrana u skup B. Po uslovu teoreme za očekivanu vrednost broja zero-sum kopija grafa G unutar K_t važi da je $E=AP<1$, pa postoji bojenje grafa K_t u kojem je taj broj manji od 1, odnosno 0. □

Napomena. Ukoliko bi bojili sa neke druge dve boje umesto 0 i 1, dobili bi samo slabiji rezultat jer bi imali barem A mogućnosti za izbor m grana čiji je zbir deljiv sa k. Ukoliko bi se bojilo sa više od dve boje, dobila bi se zaista manja suma A, ali bi bila još komplikovanija za računanje.

Prethodna teorema nam daje jednostavnu posledicu koja daje donja ograničenja za male brojeve.

Posledica. Neka je G graf sa m grana i k prirodan broj koji deli m. Tada, za sve prirodne brojeve t za koje važi nejednakost $\binom{t}{2}<m+k-1$ važi da je $R(G, Z_k)>t$.

Dokaz. Iz nejednakosti $\binom{t}{2}<m+k-1$ da će za $l=k-1$ suma A iz teoreme 14 imati vrednost nula, jer će joj svi sabirci imati vrednost nula. □

Prethodna posledica, naravno, ima smisla samo za grafove koji imaju kvadratno mnogo grana.

Teorema 14 nam daje nekakvu donju granicu zero-sum Ramseyevih brojeva. Ostaje da se proceni suma A koja je u opštem slučaju vrlo nepristupačna za računanje.

Lema 5. Uz oznake iz Teoreme 14 postoji $0\le l\le\binom{t}{2}$ takvo da važi nejednakost:

$$A<\frac{e^{\frac{em^2}{em+k}}\left(\frac{m}{k}+1\right)t^{2m}}{m^m 2^m}.$$

Dokaz. Uvedimo oznaku $r=\frac{m}{k}$ i neka je $l_1=\frac{t^2}{2\left(1+\frac{r^r}{(r-1)^{r-1}}\right)}$. Koristeći nejednakosti $\binom{n}{k}<\left(\frac{ne}{k}\right)$, koja važi za sve nenegativne cele brojeve n i k ($0^0:=1$), dobijamo da je:

$$A=\sum_{i=0}^{r}\binom{l}{ik}\binom{\binom{t}{2}-l}{m-ik}<e^m\sum_{i=0}^{r}\frac{l^{ik}\left(\binom{t}{2}-l\right)^{m-ik}}{(ik)^{ik}(m-ik)^{m-ik}}.$$

Traženjem nule izvoda funkcije po i opšteg člana sume, možemo zaključiti da ukoliko odlučimo da posmatramo samo $0\le l\le\frac{\binom{t}{2}}{r}$, najveći sabirak sume će biti nulti ili prvi. Za i = 0, 1 i $l=\lfloor l_1\rfloor$ važi da je:

$$\frac{l^{ik}\left(\binom{t}{2}-l\right)^{m-ik}}{(ik)^{ik}(m-ik)^{m-ik}}=\frac{\lfloor l_1\rfloor^{ik}\left(\binom{t}{2}-\lfloor l_1\rfloor\right)^{m-ik}}{(ik)^{ik}(m-ik)^{m-ik}}<\frac{l_1^{ik}\left(\frac{t^2}{2}-l\right)^{m-ik}}{(ik)^{ik}(m-ik)^{m-ik}}.$$

Ispostavlja se da su, za tako izabrano l, nulti i prvi član jednaki, pa važi da je:

$$A<e^m\sum_{i=0}^{r}\frac{l^{ik}\left(\binom{t}{2}-l\right)^{m-ik}}{(ik)^{ik}(m-ik)^{m-ik}}<e^m(r+1)\frac{\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{2\left(1+\frac{r^r}{(r-1)^{r-1}}\right)}\right)^m}{m^m}=$$

$$=\frac{e^m(r+1)t^{2m}}{m^m2^m}\left(1-\frac{1}{1+\frac{r^r}{(r-1)^{r-1}}}\right)^m=\frac{e^m(r+1)t^{2m}}{m^m2^m}\left(\frac{1}{1+\frac{r^r}{(r-1)^{r-1}}}\right)^m<$$

$$<\frac{e^m(r+1)t^{2m}}{m^m2^m}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{re}}\right)^m=\frac{e^m(r+1)t^{2m}}{m^m2^m}\left(1-\frac{1}{1+re}\right)^m<$$

$$\frac{e^m(r+1)t^{2m}}{m^m2^m}e^{-\frac{m}{1+re}}=\frac{e^{\frac{em^2}{em+k}}\left(\frac{m}{k}+1\right)t^{2m}}{m^m2^m}.\qquad\square$$

Napomena. Na intervalu $0\le l\le l_1$ nulti član opada i prvi raste, a na intervalu $l_1\le l\le\frac{\binom{t}{2}}{r}$ je obrnuta situacija. Zbog toga uzimamo baš $l=\lfloor l_1\rfloor$.

Napomena. Naša hipoteza je da su prvi i nulti član sume dosta veći od ostalih i da se suma A može ograničiti trostrukim nultim članom (umesto $r+1$ puta), te da se tada dobija bolja granica za A. Drugi potencijalni pristup problemu ograničenju sume A bi mogao biti preko Vandermondovog identiteta:

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{l}{i}\binom{S}{m-i}=\binom{l+S}{m}.$$

Sada možemo da pređemo na asimptotska ponašanja zero-sum Ramseyevih brojeva. U nastavku ćemo zadržati oznake iz Teoreme 14 i posmatrati asimtotsko ponošanje funkcije $R(G, \mathbf{Z}_k)$ kada je $c := k/m$ konstantno, a $m \to \infty$ (pa i $k \to \infty$). Neka je:

$$B(m,t,k)=e^{-\frac{cm}{e+c}}\left(\frac{1}{c}+1\right)\sqrt{2\pi m},$$

i neka je $S(G, t)$ broj pografova H grafa K_t izomorfnih sa G. Iz lema 3 i 5 lako dobijamo da je:

$$\frac{A}{\binom{\binom{t}{2}}{m}} \precsim B(m,t,k).$$

Iz Teoreme 14 i Leme 2 dobijamo: ako želimo da dokažemo da je $R(G, Z_k) > t$ za dovoljno velike m i k, dovoljno je da dokažemo da je:

$$B(m,t,k)\cdot S(G,t)\prec 1.$$

Teorema 15. Ako je $c = k/m$, onda je $R(K_n, \mathbf{Z}_k) = \Omega(ne^{\frac{cn}{2(e+c)}})$ kad $m \to \infty$.

Dokaz. Neka je $t=c_1 n^{\frac{cn}{2(e+c)}}$ gde je $c_1>0$ neka konstanta. Za kompletan graf važi da je $m=\binom{n}{2}\sim\frac{n^2}{2}$ i da je:

$$S(K_n,t)=\binom{t}{n}\sim\left(\frac{te}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}=n^{-\frac{1}{2}-n}\cdot t^n\cdot e^n\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Dakle, dobijamo:

$$B(m,k,t)\cdot S(K_n,t)\sim e^{-\frac{c(n^2-n)}{2(e+c)}}\left(\frac{1}{c}+1\right)\sqrt{n^2\pi}\cdot t^n\cdot e^n\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=$$

$$=n^{\frac{1}{2}-n}\cdot t^n\left(\frac{1}{c}+1\right)e^{n+\frac{cn}{2(e+c)}-\frac{cn^2}{2(e+c)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\prec 1.$$

Sada biramo $c_1>0$ takvo da je:

$$\frac{1}{c_1^n}>\sqrt{n}\left(\frac{1}{c}+1\right)e^{n\left(1-\frac{c}{2(e+c)}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},$$

pa iz Teoreme 14 i Leme 2 sledi tvrđenje. □

Napomena. Ovaj rezultat je poboljšanje rezultata Alona koje se može naći u radu Yaira Caroa (Caro 1992*a*).

Teorema 14 daje dobre granice za grafove koji imaju kvadratno mnogo grana. Međutim, ukoliko je primenimo recimo na točak W_n, dobijemo da je:

$$R(W_n, \mathbf{Z}_k) = \Omega(n),$$

gde $k \mid n + 1$. Dokaz sledeće teoreme je analogan prethodnom, pa ćemo ga samo prikazati u skraćenom obliku.

Teorema 16.

1. Neka je $n = p + q$, $c = k/m$, $p = d_1$ n i $q = d_2 n$.Tada je $R(K_{p,q}, \mathbf{Z}_k) = \Omega\left(n^{d_1+d_2} e^{\frac{cd_1 d_2 n}{e+c}}\right)$ kad $n \to \infty$.

2. Ako je $c = k/m$, onda je $R(S_n^0, \mathbf{Z}_k) = \Omega\left(n^{d_1+d_2} e^{\frac{cd_1 d_2 n}{e+c}}\right)$ kad $m \to \infty$.

Dokaz.

1. Bipartitan graf $K_{p,q}$ ima $p + q$ čvorova i pq grana. Uzećemo da je $t = c_1 \sqrt[p+q]{p^p q^q}\, e^{\frac{cpq}{(e+c)(p+q)}}$ gde je $\frac{1}{c_1^n} > \left(\frac{1}{c}+1\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, d_1^{d_1} d_2^{d_2}} e^n$.

$$S(K_{p,q}, t) = \binom{t}{p+q}\binom{p+q}{p} = \frac{t(t-1)\ldots(t-p-q+1)}{p!\,q!} \sim$$

$$\sim \frac{t^{p+q}}{\left(\frac{p}{e}\right)^p \sqrt{2\pi p} \left(\frac{q}{e}\right)^q \sqrt{2\pi q}} = t^{p+q} p^{-\frac{1}{2}-p} q^{-\frac{1}{2}-q} \cdot \frac{1}{2\pi}.$$

$$B(pq, k, t) \cdot S(K_{p,q}, t) \precsim$$

$$\precsim e^{-\frac{cpq}{e+c}} \left(\frac{1}{c}+1\right) \sqrt{2\pi pq} \cdot t^{p+q} p^{-\frac{1}{2}-p} q^{-\frac{1}{2}-q} e^{p+q} \cdot \frac{1}{2\pi} =$$

$$= t^{p+q} p^{-p} q^{-q} \left(\frac{1}{c}+1\right) e^{p+q-\frac{cpq}{e+c}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prec 1.$$

2. Graf S_n^0 ima 2 n čvorova i $m = n(n-1) \sim n^2$ grana. Neka je $t = c_1 \sqrt{n}\, e^{\frac{cn}{2(e+c)}}$, gde je $\frac{1}{c^{2n}} > \left(\frac{1}{c}+1\right) \sqrt{n}\, e^{\left(1+\frac{c}{e+c}\right)}$.

$$S(S_n^0, t) = \binom{t}{2n}\binom{2n}{n} n! \sim \frac{t!}{(t-2n)!\,n!} \sim \frac{t^{2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} =$$

$$= t^{2n} e^n n^{-n-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

$$B(m,k,t)\cdot P(S_n^0,t) \;\precsim\; e^{-\frac{cn^2-cn}{e+c}}\left(\frac{1}{c}+1\right)\sqrt{2\pi n^2}\cdot t^{2n}e^n n^{-n-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=$$

$$=t^{2n}\left(\frac{1}{c}+1\right)n^{\frac{1}{2}-n}e^{n-\frac{cn^2}{e+c}+\frac{cn}{e+c}}\prec 1.$$

□

Da bismo dobili rezultat vezan za n-dimenzionalnu hiperkocku, potrebna nam je sledeća lema:

Lema 6. $S(Q_n,t)\sim\dfrac{t^{2^n}e^n}{2^n n^n\sqrt{2\pi n}}$ kad $n\to\infty$.

Dokaz. Neka je $x(n, t)$ broj kopija grafa Q_n unutar grafa K_t. Očigledno je $x(1,t)=\binom{t}{2}\sim\frac{t^2}{2}$. Graf Q_n se na n načina može rastaviti na dva grafa Q_{n-1} čijim se „lepljenjem" ponovo dobija Q_n. Ukupan broj načina da izaberemo dve kopije Q_{n-1} unutar K_t je $\frac{x(n-1,t)\,x(n-1,t-2^{n-1})}{2}$. Broj načina da ih zalepimo i dobijemo Q_n je $x(n-1)!\,2^{n-1}$. Dakle, dobijamo rekurentnu formulu:

$$x(n,t)=x(n-1,t)\,x(n-1,t-2^{n-1})\,(n-1)!\,2^{n-2}\,\frac{1}{n}.$$

Dokažimo indukcijom po n da je $x(n,t)\sim\frac{t^{2^n}}{2^n n!}$. Za n = 0, 1 je trivijalno. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve prirodne brojeve $k<n$. Dokažimo da važi i za n. To sledi iz:

$$x(n,t)=x(n-1,t)x(n-1,t-2^{n-1})(n-1)!\,2^{n-2}\,\frac{1}{n}\sim$$

$$\sim\frac{t^{2^{n-1}}}{2^{n-1}(n-1)!}\cdot\frac{(t-2^{n-1})^{2^{n-1}}}{2^{n-1}(n-1)!}(n-1)!\,2^{n-2}\,\frac{1}{n}\sim\frac{t^{2^n}}{2^n n!}.$$

Sada lako dobijamo da je:

$$S(Q_n,t)\sim\frac{t^{2^n}}{2^n n!}\sim\frac{t^{2^n}e^n}{2^n n^n\sqrt{2\pi n}}.$$

□

Sada možemo lakše da dođemo i do donje granice zero-sum Ramsey broja grafa Q_n.

Teorema 17. $R(Q_n,\mathbf{Z}_k)=\Omega\left(e^{\frac{cdn}{2(e+c)}}\right)$ kad $m\to\infty$.

Dokaz. Graf Q_n ima $m=2^{n-1}$ grana i 2^n čvorova. Koristeći prethodnu lemu i zamenjujući $t=c_1 e^{\frac{cn}{2(n+c)}}$, gde je $\frac{1}{c_1^{2^n}}>\left(\frac{1}{c}+1\right)n^n\,2^{-\frac{n+1}{2}}e^n$, dobijamo da je:

$$B(m,k,t)\cdot S(Q_n,t) \lesssim e^{-\frac{c2^{n-1}n}{e+c}}\left(\frac{1}{c}+1\right)\sqrt{2\pi 2^{n-1}n}\cdot\frac{t^{2^n}e^n}{2^n n^n\sqrt{2\pi n}} =$$

$$= e^{n-\frac{c2^{n-1}n}{e+c}}\left(\frac{1}{c}+1\right)t^{2^n}n^n 2^{-\frac{n+1}{2}} \prec 1. \qquad \square$$

Neka je $R_{n,r}$ r-regularan graf sa n čvorova koji ima osobinu da mu se čvorovi mogu poređati u krug tako da je svaki susedni sa prvih $\left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor$ suseda sa njegove leve strane i $\left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor$ sa njegove desne strane. Primetimo da je svaki takav graf jednoznačno određen sa n temena poređanih u krug (za fiksirano r i n).

Teorema 18. Ako je $c = k/m$ i $r = dn$, onda je kad $m \to \infty$.

Dokaz. Graf $R_{n,r}$ ima $m = \frac{nr}{2}$ grana. Ako je $t = c_1 e^{\frac{cr}{2(e+c)}}$ gde je $\frac{1}{c_1^n} < \left(\frac{1}{c}+1\right)\sqrt{\frac{r\pi}{4n}}$ onda važi da je:

$$S(R_{n,r},t) = \binom{t}{n}\frac{n!}{2n} \sim \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{2n} \sim \frac{t^n}{2n},$$

$$B(m,k,t)\cdot S(R_{n,r},t) \lesssim$$

$$\lesssim e^{-\frac{crn}{2(e+c)}}\left(\frac{1}{c}+1\right)\sqrt{rn\pi}\cdot\frac{t^n}{2n} = t^n\left(\frac{1}{c}+1\right)\sqrt{\frac{r\pi}{4n}}\, e^{-\frac{crn}{2(e+c)}} \prec 1. \qquad \square$$

Teorema 14 može dati finu granicu za još mnogo klasa grafova ali se mi ovde zaustavljamo.

Pređimo sada na neke grafove koji imaju znatno manje grana ($m = O(n)$). Za njih je mnogo praktičnije i lakše ručno konstruisati kontraprimere kada se traži donja granica.

Teorema 19. Za sve prirodne brojeve n i k za koje $k \mid n$, važi da je:

$$R(P_{n+1}, \mathbf{Z}_k) \geq \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor + n.$$

Dokaz. Neka je $t = \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor + n - 1$. Uzmimo particiju skupa svih čvorova grafa K_t na skupove A i B za koje važi $|A| = n$ i $|B| = \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor$. Sve grane unutar grafa indukovanog čvorovima skupa A obojimo bojom 0. Takođe, sve grane unutar grafa indukovanog čvorovima skupa B obojimo bojom 0. Sve ostale grane obojimo bojom 1. Pretpostavimo suprotno, da postoji zero-sum podgraf H grafa K_t izomorfan sa P_{n+1}. Jasno je da zbir boja njegovih grana ne može biti 0, pa je barem k. Međutim, ukoliko je $|V(H) \cap B| =$

$= l$, onda je zbir boja najviše $2l$. Kako je $2l \le 2\left(\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor\right) < k$ taj zbir je sigurno manji od k. Kontradikcija. □

Kako za male prirodne brojeve $n = 2, 3, 4$ važi jednakost u Teoremi 19, moguće je da za svaki prirodan n važi jednakost. Stoga, postavljamo sledeću hipotezu:

Hipoteza 1. Za sve prirodne brojeve n i k za koje $k \mid n$, važi da je:

$$R(P_{n+1}, \mathbf{Z}_k) = \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor + n.$$

Potpuno analogno se dokazuje i sledeća teorema.

Teorema 20. Za sve prirodne brojeve n i k za koje $k \mid n$, važi da je:

$$R(C_n, \mathbf{Z}_k) \ge \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor + n.$$

Prikažimo i jedan specijalan slučaj.

Teorema 21. Za sve neparne prirodne brojeve n važi da je:

$$R(C_n, \mathbf{Z}_n) \ge 2n - 1.$$

Dokaz. Neka je $t = 2n - 2$. Posmatrajmo bipartitan podgraf G grafa K_t koji je indukovan sa dva skupa čvorova grafa K_t kardinalnosti $n - 1$. Njegove grane obojimo bojom 1, a ostale grane grafa K_t obojimo bojom 0. Zero-sum kopija grafa C_n sigurno neće postojati, jer bi u suprotnom ciklus neparne dužine bio podgraf bipartitnog grafa, što je nemoguće. □

8. Zaključak

Iako se prvi put pojavila pre gotovo 90 godina, u radu engleskog matematičara Franka Ramseya, Ramseyeva teorija je i danas veoma popularna oblast. Tokom veka postojanja, ona je doživela brojne modifikacije i uopštenja. U ovom radu se jednoj od tih modifikacija poklanja posebna pažnja – takozvanim zero-sum Ramseyevim brojevima. Kako se i izračunavanje egzaktnog klasičnog Ramseyevog broja pokazao kao veoma težak i zahtevan problem, ova oblast je podstakla razvijanje brojnih novih matematičkih i programerskih tehnika i metoda u cilju dobijanja gornjih i donjih granica za ove brojeve.

U ovom radu smo se skoncentrisali prvenstveno na Probabilistički metod, tehniku koji se često povezuje sa Pálom Erdősom. Primenom ovog metoda u radu su pokazani rezultati (prvenstveno Teorema 14, zatim i teoreme 12-15) koji predstavljaju poboljšanje Alonovog rezultata koji se može naći u radu Yaira Caroa (Caro 1992*a*).

Literatura

Alon N., Spencer J. H. 2004. *The probabilistic method*. Wiley

Bialostocki A., Dierker P. 1992. On the Erdos-Ginzburg-Ziv theorem and the Ramsey numbers for stars and matchings. *Discrete mathematics*, **110**: 1.

Caro Y. 1992*a*. On several variations of the Turan and Ramsey numbers. *Journal of graph theory*, **16** (3): 257.

Caro Y. 1992*b*. On zero-sum Ramsey numbers – stars. *Discrete Mathematics*, **104** (1): 1.

Caro Y. 1994. A complete characterization of the zero-sum (mod 2) Ramsey numbers. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series A*, **68** (1): 205.

Caro Y. 1996. Zero-sum problems – a survey. *Discrete Mathematics*, **152** (1): 93.

Graham R. L., Rothschild B. L., Spencer J. H. 1990. *Ramsey theory*. Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Vol. 20.

Eva Silađi and Branislav Šobot

The Probabilistic Method and Zero-sum Ramsey Numbers

The probabilistic method is a technique used in mathematics, usually for proving the existence of a mathematical object with certain properties. In this paper various applications of this method in combinatorics, graph theory and algebra are shown. Aside from the basic method, more advanced techniques are presented, for instance the Lovasz Local Lemma. We also study the zero-sum Ramsey number $R(G; \mathbf{Z}_k)$, which is the lowest positive integer n such that for every coloring of edges of K_n in k colors, i.e. $f: E(K_n) \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$, there exists a copy H of graph G inside K_n for which $\sum_{e \in E(H)} f(e) \equiv 0 \pmod{k}$. In the last section of this paper we present an application of probabilistic method, where we show lower bounds of zero-sum Ramsey numbers of graphs with a superlinear number of edges (with respect to number to vertices). In addition to that, some lower bounds for zero-sum Ramsey numbers for graphs P_n and C_n are given.