

Uticaj dipolne interakcije na oblik Fermijeve površi

Ovaj rad za cilj ima ispitivanje uticaja dipol-dipol interakcija na statičke i dinamičke osobine ultrahladnog Fermijevog gasa zarobljenog u opto-magnetnoj zamki. Ovakav sistem se može opisati u realnom prostoru, gde su određivani Tomas-Fermijevi radijusi, kao i u momentnom prostoru gde su predstavljene poluose Fermijeve površi. Koristeći jednačinu za ukupnu energiju sistema, analitički je dobijen zatvoren sistem šest jednačina, koje jedinstveno određuju poluose elipsoida u realnom i momentnom prostoru. Sistem je dalje rešavan numerički i ispitivano je kako različiti parametri sistema (ukupna broj čestica, frekvence zamke, i sl.) utiču na stepen deformacije Fermijeve sfere. Rezultati ovog rada bi mogli doprineti u dizajniranju budućih eksperimenata, kao i analizi rezultata tih eksperimenata.

Uvod

Ultrahladni Fermijevi gasovi predstavljaju sistem koji se sastoji od fermiona ohlađenog do temperature reda veličine nano kelvina. Do ovako ekstremnih temperatura sistem se hladi metodom laserskog hlađenja. S obzirom na polucelobrojni spin, fermioni zadovoljavaju Paulijev princip isključenja, zbog čega dva fermiona ne mogu zauzimati isto kvantno stanje. Zato čestice redom popunjavaju energetska stanja. Ovakvi sistemi mogu se posmatrati u realnom prostoru gde se duž tri međusobno normalne ose predstavljaju poluose elipsoida gasa R_x , R_y , R_z (Tomas-Fermijevi radijusi) ili u faznom prostoru gde se osama predstavlja moment impulsa čestica duž date ose, a amplitude momenta impulsa K_x , K_y , K_z predstavljaju poluose Fermijeve sfere (FS) u faznom prostoru. U slučaju neinteragujućeg gasa FS je sfera. Cilj ovog rada je bio da se ispita kako dipol-dipol interakcije (DDI) između fermiona utiču na oblik FS, kao i da se ispita stanje gasa u globalnoj ravnoteži i dinamika sistema usled perturbacija ili nagle promene magnetnog polja u kome se sistem nalazi.

Posmatran je gas atoma erbijuma zarobljen u optomagnetnoj zamci – tri lasera usmerena duž međusobno normalnih pravca. Potencijal harmo-

Anastasija Ilić (1999),
Beograd, Prominska
22/1, učenica 3.
razreda Matematičke
gimnazije u Beogradu

Jelena Ristić (1999),
Beograd, Serdar Janka
Vukotića 30/48,
učenica 3. razreda
Matematičke gimnazije
u Beogradu

MENTOR:
Vladimir Veljić, Institut
za fiziku, Beograd

nijske zamke jednak je $V(r_i) = \frac{M\omega_i^2 R_i^2}{2}$, gde je M masa zarobljenog gasa, a

ω_i kružna frekvencija lasera duž i -te ose. Sistem se nalazi u magnetnom polju usmerenom duž jedne od osa duž koje se dipoli orijentišu, a u cilju smanjenja energije sistema Fermijeva sfera se izdužuje duž tog pravca. Međusobni potencijal dva dipola data je izrazom (Lima 2010):

$$V_{\text{in}}(r) = \frac{C_{\text{dd}}}{4\pi|r|^3} (1 - 3 \cos^2 \vartheta),$$

gde je r vektor relativnog položaja jednog dipola u odnosu na drugi, ϑ ugao između vektora r i ose polarizacije dipola i C_{dd} jačina dipolne interakcije koja zavisi od prirode interakcije. Za električne DDI definiše se $C_{\text{dd}}^e = \frac{d^2}{\varepsilon_0}$,

gde je d električni dipolni moment, a ε_0 električna permeabilnost vakuuma, dok za magnetne interakcije $C_{\text{dd}}^m = \mu_0 m^2$, gde je m magnetni dipolni moment, a μ_0 magnetna permeabilnost vakuuma. Magnetni dipolni moment se izražava u jedinicama Borov magneton ($\mu_B = 9.27401 \times 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$) i za erbijum uzima vrednost $7 \mu_B$. Električni dipolni moment izražava se u jedinicama Debaja: $D = 3.33564 \times 10^{-30} \text{ cm}$. Teorijska istraživanja su pokazala da deformacija Fermijeve sfere zavisi od jačine dipolne interakcije i od Fermijeve energije $E_F = (6N)^{1/3} \hbar \bar{\omega}$, gde je N broj atoma u sistemu, a $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$. Da bi se efikasnije opisale međusobne interakcije, uvodi se nova veličina e_{dd} – relativna jačina interakcije i definiše se na sledeći način (Veljić *et al.* 2016):

$$e_{\text{dd}} = \frac{C}{4\pi} \sqrt{\frac{M^3 \bar{\omega}}{\hbar^5}} N^{1/6}. \quad (1)$$

Kvanti sistemi više tela mogu se opisati Vignerovom funkcijom (eng. Wigner function) $f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ koja je ekvivalent kvantno-mehaničkoj talasnoj funkciji. Posmatrana je poluklasična Vignerova funkcija i pretpostavljeno je da Fermi gas zadovoljava:

$$f^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \Theta \left(1 - \sum_j \frac{r_j^2}{R_j^2} - \sum_j \frac{k_j^2}{K_j^2} \right),$$

gde R_j , odnosno K_j , predstavljaju poluose oblaka gasa u realnom prostoru, odnosno Fermijeve površi u j -tom pravcu u faznom prostoru (Wächtler *et al.* 2013). $\Theta(x)$ predstavlja step funkciju čija je vrednost nula ukoliko je argument negativan, odnosno jedan ukoliko je argument pozitivan. Funkcija naglo opada na nulu van zatvorene površi u šestodimenzionom faznom prostoru. Normalizacijom Vignerove funkcije po celom faznom prostoru dobija se:

$$N = \int d^3 r \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{48} \bar{K}^3 \bar{R}^3, \quad (2)$$

gde su $\bar{K} = (K_x K_y K_z)^{1/3}$ i $\bar{R} = (R_x R_y R_z)^{1/3}$ geometrijske sredine poluosa duž x , y i z osa u faznom i realnom prostoru.

Statički slučaj

Cilj je naći radijuse gasa u realnom prostoru i Fermijeve površi u faznom prostoru duž osa lasera. Ukupna energija Fermi gasa jednaka je zbiru kinetičke energije, potencijalne energije usled zamke, direktne Hartrijeve energije i izmenske Fokove energije data je formulom (Veljić *et al.* 2016):

$$E_{\text{tot}} = \frac{N}{8} \sum_j \frac{\hbar^2 K_j^2}{2m} + \frac{N}{8} \frac{m}{2} \sum_j \omega_j^2 R_j^2 + \frac{48N^2 c_0}{8\bar{R}^3} f\left(\frac{R_x}{R_z}, \frac{R_y}{R_z}\right) + \frac{48N^2 c_0}{8\bar{R}^3} f\left(\frac{K_x}{K_z}, \frac{K_y}{K_z}\right),$$

gde je $c_0 = \frac{2^{10} C_{\text{dd}}}{3^4 \cdot 5 \cdot 7 \pi^3}$, a $f(x, y)$ anizotropna funkcija definisana u literaturi (Wächtler 2011). Hartrijevi član pravi distorziju gasa u realnom prostoru, a Fokov član deformiše FS u faznom prostoru. Takođe, Fokova energija je posledica i DDI i Paulijevog principa isključenja.

Metodom Lagranževih množitelja potrebno je minimizovati datu energiju. Za Lagranžijan uzeta je funkcija $E_{\text{tot}} - \mu N$, a diferenciranjem po nepoznatima R_j i K_j dobijamo sistem od šest jednačina. Eliminacijom konstante μ dobijene su sledeće jednačine

$$\frac{\hbar^2 K_x^2}{2M} - \frac{1}{3} \sum_j \frac{\hbar^2 K_j^2}{2M} - \frac{48Nc_0}{\bar{R}^3} \frac{K_z}{K_x} f_1\left(\frac{K_x}{K_z}, \frac{K_y}{K_z}\right) = 0,$$

$$\frac{\hbar^2 K_y^2}{2M} - \frac{1}{3} \sum_j \frac{\hbar^2 K_j^2}{2M} - \frac{48Nc_0}{\bar{R}^3} \frac{K_z}{K_y} f_2\left(\frac{K_x}{K_z}, \frac{K_y}{K_z}\right) = 0,$$

$$\frac{\hbar^2 K_x^2}{2M} - \frac{1}{3} \sum_j \frac{\hbar^2 K_j^2}{2M} - \frac{48Nc_0}{\bar{R}^3} \left[\frac{K_z}{K_x} f_1\left(\frac{K_x}{K_z}, \frac{K_y}{K_z}\right) + \frac{K_z}{K_y} f_2\left(\frac{K_x}{K_z}, \frac{K_y}{K_z}\right) \right] = 0,$$

$$\omega_x^2 R_x^2 - \frac{1}{3} \sum_j \frac{\hbar^2 K_j^2}{2M} - \frac{48Nc_0}{\bar{R}^3} \left[f\left(\frac{K_x}{K_z}, \frac{K_y}{K_z}\right) - f\left(\frac{R_x}{R_z}, \frac{R_y}{R_z}\right) + \frac{R_x}{R_z} f_1\left(\frac{R_x}{R_z}, \frac{R_y}{R_z}\right) \right] = 0, \quad (3)$$

$$\omega_y^2 R_y^2 - \frac{1}{3} \sum_j \frac{\hbar^2 K_j^2}{2M} - \frac{48Nc_0}{\bar{R}^3} \left[f\left(\frac{K_x}{K_z}, \frac{K_y}{K_z}\right) - f\left(\frac{R_x}{R_z}, \frac{R_y}{R_z}\right) + \frac{R_y}{R_z} f_2\left(\frac{R_x}{R_z}, \frac{R_y}{R_z}\right) \right] = 0, \quad (4)$$

$$\omega_z^2 R_z^2 - \frac{1}{3} \sum_j \frac{\hbar^2 K_j^2}{2M} - \frac{48Nc_0}{\bar{R}^3} \left[f\left(\frac{K_z}{K_x}, \frac{K_z}{K_y}\right) - f\left(\frac{R_x}{R_z}, \frac{R_y}{R_z}\right) - \frac{R_x}{R_z} f_1\left(\frac{R_x}{R_z}, \frac{R_y}{R_z}\right) - \frac{R_y}{R_z} f_2\left(\frac{R_x}{R_z}, \frac{R_y}{R_z}\right) \right] = 0, \quad (5)$$

gde su $f_1(x, y)$ i $f_2(x, y)$ parcijalni izvodi anizotropne funkcije po prvoj, odnosno drugoj promenljivoj. Od šest dobijenih jednačina, samo pet su linearno nezavisne – treća se može dobiti sabiranjem prve dve. Koristeći simetričnost anizotropne funkcije, odnosno osobinu da je $f(x, y) = f(y, x)$, od prvih tri jednačina dobijamo dve linearno nezavisne:

$$K_x = K_y \quad (6)$$

$$K_z^2 - K_x^2 = \frac{144MNc_0}{\hbar^2 \bar{R}^3} \left[1 - \frac{(2K_x^2 + K_z^2) f_s\left(\frac{K_z}{K_x}\right)}{2(K_x^2 + K_z^2)} \right]. \quad (7)$$

Jednačina (6) ukazuje da sistem poseduje cilindričnu simetriju u faznom prostoru. Jednačine (3)–(7) i (2) čine zatvoren sistem od šest jednačina sa šest nepoznatih. Da bi se problem rešio numerički, neophodno je srediti jednačine. U slučaju neiteragujućeg Fermi gasa, direktna Hartrijeva energija i izmenska Fokova energija se anuliraju, time omogućavajući da se problem reši analitički. Analitička rešenja za neiteragujući gas su:

$$R_i^{(0)} = \sqrt{\frac{E_F}{m\omega_i^2}} K_i^{(0)} = \sqrt{\frac{2ME_F}{\hbar^2}}, \quad (8)$$

gde je $E_F = (6N)^{1/3} \hbar \omega$ energija neiteragujućeg gasa – Fermi energija. Rešenja sistema (3)–(7) i (2) predstavljena su preko rešenja za neiteragujući gas i to $K_i = \tilde{K}_i K_i^{(0)}$ i $R_i = \tilde{R}_i R_i^{(0)}$, pri čemu \tilde{K}_i i \tilde{R}_i predstavljaju bezdimenziona rešenja. Uvođenjem ove smene, i korišćenjem identiteta (1), (2) i (8), dobija se zatvoren sistem od pet nepoznatih koji se dalje numerički rešava:

$$\tilde{K}_x^2 \tilde{K}_y \tilde{R}_x \tilde{R}_y \tilde{R}_z = 1,$$

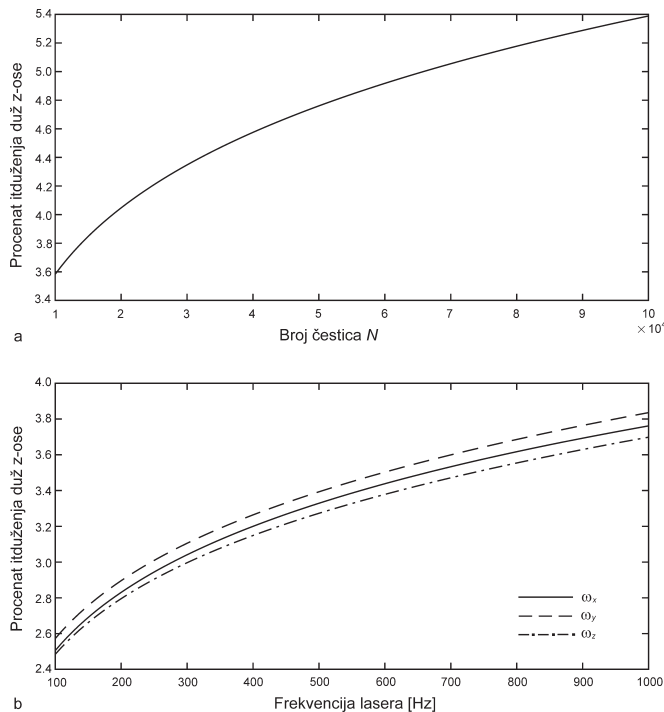
$$\tilde{K}_z - \tilde{K}_x = 3c_d e_{dd} \frac{1}{\tilde{R}_x \tilde{R}_y \tilde{R}_z} \left[1 - \frac{(2\tilde{K}_x^2 + \tilde{K}_z^2) f_s\left(\frac{\tilde{K}_z}{\tilde{K}_x}\right)}{2(\tilde{K}_x^2 + \tilde{K}_z^2)} \right],$$

$$\tilde{R}_x^2 - \frac{1}{3}(2\tilde{K}_x^2 + \tilde{K}_z^2) - c_d e_{dd} \frac{1}{\tilde{R}_x \tilde{R}_y \tilde{R}_z} \left[f_s\left(\frac{\tilde{K}_z}{\tilde{K}_x}\right) - f\left(\frac{\tilde{R}_x \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_x}, \frac{\tilde{R}_y \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_y}\right) + \frac{\tilde{R}_x \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_x} f_2\left(\frac{\tilde{R}_x \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_x}, \frac{\tilde{R}_y \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_y}\right) \right] = 0,$$

$$\tilde{R}_y^2 - \frac{1}{3}(2\tilde{K}_x^2 + \tilde{K}_z^2) - c_d e_{dd} \frac{1}{\tilde{R}_x \tilde{R}_y \tilde{R}_z} \left[f_s \left(\frac{\tilde{K}_z}{\tilde{K}_x} \right) - f \left(\frac{\tilde{R}_x \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_x}, \frac{\tilde{R}_y \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_y} \right) + \frac{\tilde{R}_y \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_y} f_2 \left(\frac{\tilde{R}_x \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_x}, \frac{\tilde{R}_y \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_y} \right) \right] = 0,$$

$$\tilde{R}_z^2 - \frac{1}{3}(2\tilde{K}_x^2 + \tilde{K}_z^2) - c_d e_{dd} \frac{1}{\tilde{R}_x \tilde{R}_y \tilde{R}_z} \left[f_s \left(\frac{\tilde{K}_z}{\tilde{K}_x} \right) - f \left(\frac{\tilde{R}_x \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_x}, \frac{\tilde{R}_y \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_y} \right) - \frac{\tilde{R}_x \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_x} f_1 \left(\frac{\tilde{R}_x \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_x}, \frac{\tilde{R}_y \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_y} \right) - \frac{\tilde{R}_y \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_y} f_2 \left(\frac{\tilde{R}_x \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_x}, \frac{\tilde{R}_y \omega_z}{\tilde{R}_z \omega_y} \right) \right] = 0,$$

gde je $c_d = \frac{2^{38/3}}{3^{23/6} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \pi^2}$. Za numeričko rešavanje jednačina korišćen je programski jezik Wolfram Mathematica. Dobijeni su grafici zavisnosti oblika FS od broja čestica, kao i od kružne frekvencije lasera duž svake ose (slika 1). Procenat izduženja Fermijeve sfere računa se kao $\Delta = (1 - K_x / K_z)$ i izražava u procentima. Takođe, određen je ekcentriciteta FS izražen kao

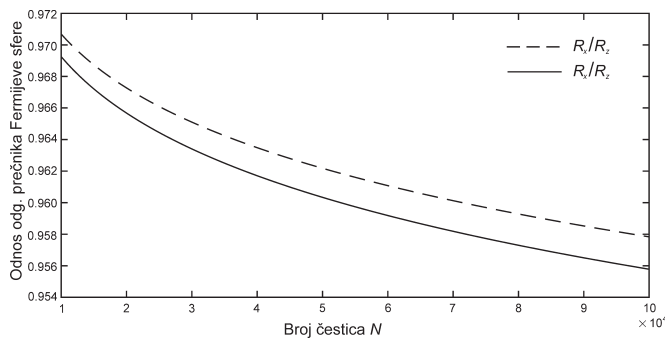


Slika 1. Zavisnost izduženja Fermijeve sfere u funkciji:

- a – ukupnog broja fermiona pri $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (500, 600, 700)$ Hz;
- b – ω_x za $N = 50000$ i $\omega_x = \omega_z = 100$ Hz; ω_y za $N = 50000$ i $\omega_x = 500$, $\omega_z = 700$ Hz; ω_z za $N = 50000$ i $\omega_x = 600$ Hz, $\omega_y = 700$ Hz.

Figure 1. Deformation of the Fermi sphere as a function of:
a – number of particles in the system where

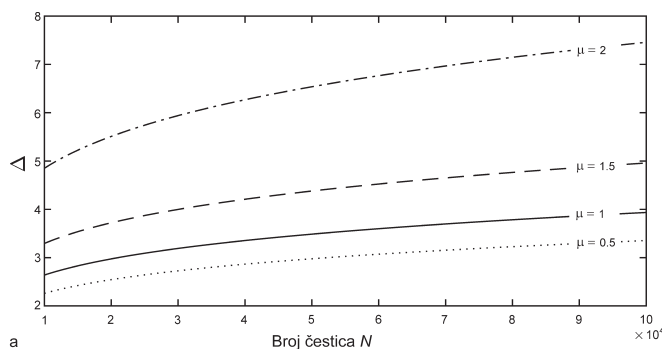
- $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (500, 600, 700)$ Hz;
- b – ω_x where $N = 50000$ and $\omega_x = \omega_z = 100$ Hz; ω_y where $N = 50000$ and $\omega_x = 500$, $\omega_z = 700$ Hz; ω_z where $N = 50000$ and $\omega_x = 600$ Hz, $\omega_y = 700$ Hz.



Slika 2. Odnos odgovarajućih poluprečnika od broja čestica N pri čemu:

$\omega_x = 500$ Hz, $\omega_y = 600$ Hz i
 $\omega_z = 700$ Hz.

Figure 2. Aspect ratio as a function of the number of particles in the system N where: $\omega_x = 500$ Hz, $\omega_y = 600$ Hz and $\omega_z = 700$ Hz.

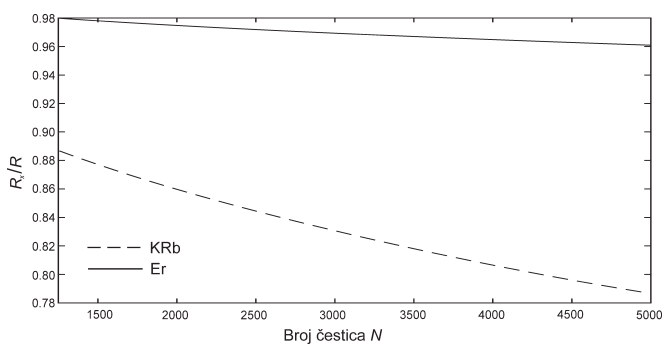
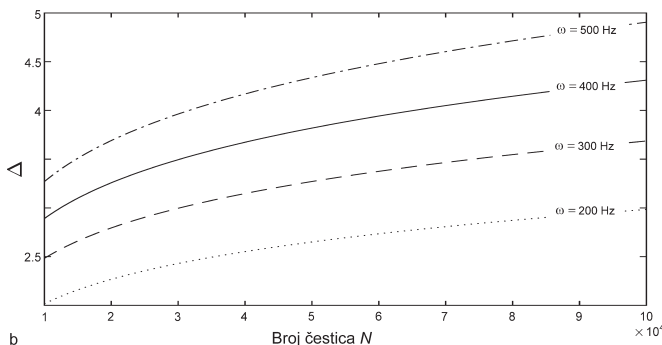


Slika 3. Zavisnost $\Delta = (1 - K_x/K_z)$ od broja čestica N za različite vrednosti:

a - $\omega_z/\omega_x = \mu$
za $\bar{\omega} = 500$ Hz i $\omega_x = \omega_y$,
b - $\bar{\omega}$ za $\omega_x = 500$ Hz,
 $\omega_y = 600$ Hz.

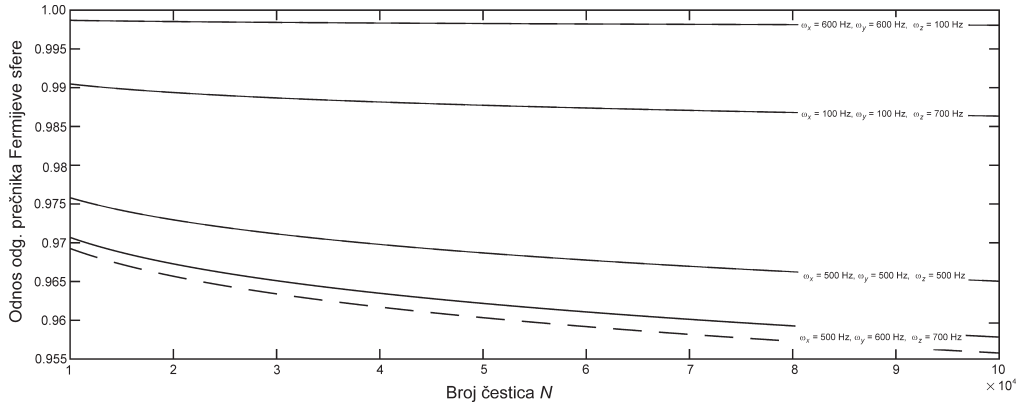
Figure 3. Deformation of the Fermi sphere $\Delta = (1 - K_x/K_z)$ as a function of the number of particles N for different values:

a - $\omega_z/\omega_x = \mu$
where $\bar{\omega} = 500$ Hz, $\omega_x = \omega_y$,
b - $\bar{\omega}$ where $\omega_x = 500$ Hz,
 $\omega_y = 600$ Hz.



Slika 4. Zavisnost R_x/R_z od N u slučaju sferno-simetrične zamke: $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 500$ Hz za gas erbijuma (Er) i atome gasa KRb.

Figure 4. Aspect ratio R_x/R_z as a function of number of particles N in the case of a spherically symmetric trap: $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 500$ Hz for erbium (Er) gas and atoms of KRB gas.



Slika 5. Grafik zavisnosti odnosa odgovarajućih poluprečnika Fermijeve sfere od broja čestica N . Punim linijama označena je zavisnost R_x/R_z , a isprekidanim R_y/R_z od N za različite vrednosti parametara zamke. Za slučajeve kada $\omega_x = \omega_y$ isprekidane linije se poklapaju.

Figure 5. Aspect ratio of corresponding semi-axes of the Fermi sphere as function of number of particles N . Solid lines represent the aspect ratio R_x/R_z , whereas dashed lines represent the aspect ratio R_y/R_z as function of N for different values of trap parameters. In the case of $\omega_x = \omega_y$ solid and dashed lines overlap.

odnos R_x/R_z u zavisnosti od broja čestica u sistemu (slika 2). Na slici 1 može se primetiti kako se povećavanjem frekvencije lasera duž jedne ose povećava asimetrija zamke, pa samim tim i procenat izduženja Fermijeve površi.

U slučaju sferno simetrične zamke, usled magnetnog polja duž z -ose, javlja se izduženje i u realnom prostoru. Kako su kod erbijuma DDI slabe, uticaj magnetnog polja na izduženje je zanemarljiv. Stoga su razmatrani i parametri gasa dipolarnih molekula K⁸⁷Rb čiji je električni dipolni momenat jednak 0.2 D, gde se jasno vidi dominantnije izduženje duž z -ose (slika 4).

Na slici 5 uočava se da u slučaju kada $\omega_x = \omega_y$ isprekidane i pune linije se preklapaju, te sistem postaje radijalno simetričan.

Dinamički slučaj

Ispitivano je šta se dešava sa zarobljenim gasom nakon uvođenja perturbacija u sistem. Perturbacija se opisuje deformaciju gasa promenom trenutnog radijusa duž svake ose. Dobijene oscilacije opisuju se jednačinama $R_i(t) = R_i b_i(t)$, gde je R_i Tomas-Fermijev radijus u statičkom slučaju duž i -te ose, a $b_i(t)$ funkcija od vremena. Dobija se sledeći sistem diferencijalnih jednačina koji se rešava numerički:

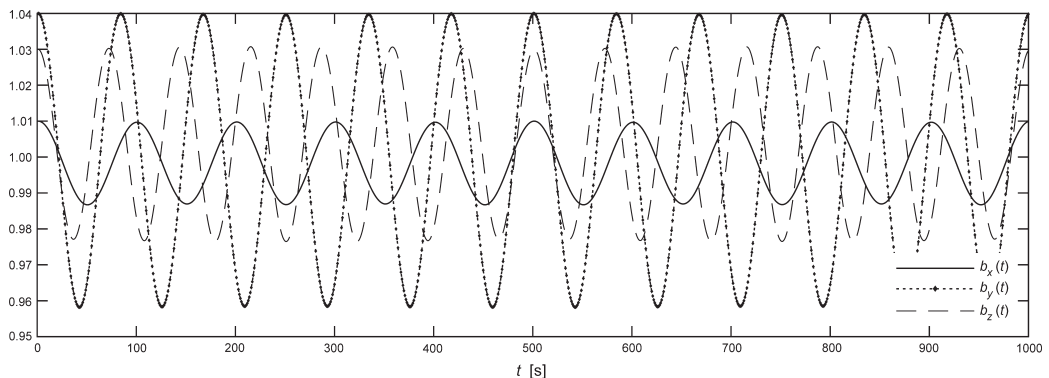
$$\ddot{b}_x + \omega_x^2 b_x - \frac{\hbar^2 K_x^2}{b_x^3 M^2 R_x^2} + \frac{48Nc_0}{Mb_x^2 b_y b_z R_x^3 R_y R_z} \left[f\left(\frac{b_x R_x}{b_z R_z}, \frac{b_y R_y}{b_z R_z}\right) - f_1\left(\frac{b_x R_x}{b_z R_z}, \frac{b_y R_y}{b_z R_z}\right) \right] - \frac{48Nc_0}{Mb_x^2 b_y b_z R_x^3 R_y R_z} \left[f\left(\frac{b_x K_z}{b_z K_x}, \frac{b_y K_z}{b_z K_x}\right) - f_1\left(\frac{b_x K_z}{b_z K_x}, \frac{b_y K_z}{b_z K_x}\right) \right] = 0,$$

$$\ddot{b}_y + \omega_y^2 b_y - \frac{\hbar^2 K_x^2}{b_x^3 M^2 R_y^2} + \frac{48Nc_0}{Mb_y^2 b_z b_x R_y^3 R_z R_x} \left[f \left(\frac{b_x R_x}{b_z R_z}, \frac{b_y R_y}{b_z R_z} \right) - f_2 \left(\frac{b_x R_x}{b_z R_z}, \frac{b_y R_y}{b_z R_z} \right) \right] - \frac{48Nc_0}{Mb_y^2 b_z b_x R_y^3 R_z R_x} \left[f \left(\frac{b_x K_z}{b_z K_x}, \frac{b_y K_z}{b_z K_x} \right) - f_2 \left(\frac{b_x K_z}{b_z K_x}, \frac{M b_y K_z}{b_z K_x} \right) \right] = 0,$$

$$\ddot{b}_z + \omega_z^2 b_z - \frac{\hbar^2 K_x^2}{b_x^3 M^2 R_z^2} + \frac{48Nc_0}{Mb_z^2 b_x b_y R_z^3 R_x R_y} \left[f \left(\frac{b_x R_x}{b_z R_z}, \frac{b_y R_y}{b_z R_z} \right) + f_1 \left(\frac{b_x R_x}{b_z R_z}, \frac{b_y R_y}{b_z R_z} \right) + f_2 \left(\frac{b_x R_x}{b_z R_z}, \frac{b_y R_y}{b_z R_z} \right) \right] - \frac{48Nc_0}{Mb_z^2 b_x b_y R_z^3 R_x R_y} \left[f \left(\frac{b_x K_z}{b_z K_x}, \frac{b_y K_z}{b_z K_x} \right) + f_1 \left(\frac{b_x K_z}{b_z K_x}, \frac{b_y K_z}{b_z K_x} \right) + f_2 \left(\frac{b_x K_z}{b_z K_x}, \frac{M b_y K_z}{b_z K_x} \right) \right] = 0.$$

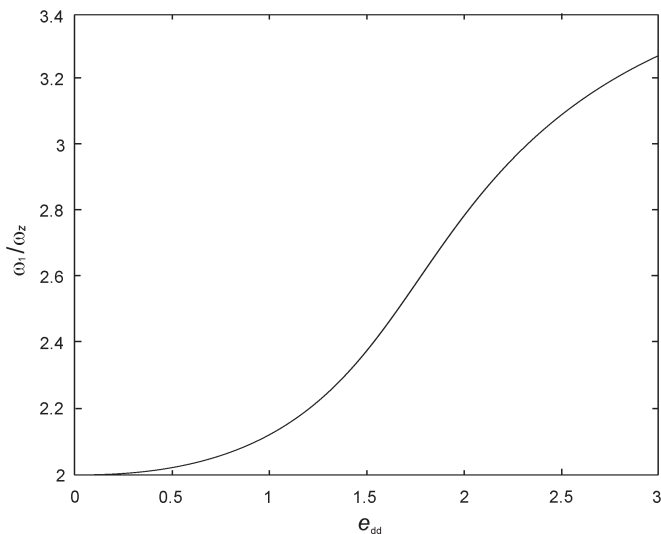
Rešenja sistema predstavljaju funkcije od vremena $b_i(t)$ koje određuju poluose Fermijevog gasa u trenutku t (slika 6). Očekivano teorijskim predikcijama, sve oscilacije za ravnotežni položaj uzimaju vrednost jedan, predstavljajući nedeformisanu Fermijev elipsoid.

Posmatrani oscilatorni sistem može se opisati normalnim modama oscilacija, a svaki dimamički proces može se predstaviti kao njihova linearna kombinacija. Ispostavlja se da Fermijev gas u ovoj konfiguraciji ima tri normalne mode, odnosno tri osnovne, međusobno nezavisne frekvencije



Slika 6. Funkcije koje vremenski opisuju oscilacije gasa duž x , y i z ose redom.

Figure 6. Functions which determine oscillations among x , y and z axis over time.



Slika 7. Grafik zavisnosti normalne mode u jedinici ω_z od relativne jačine interakcije e_{dd} za gas erbijumovih atoma, pri čemu je $N = 50000$, a frekvence zamke $\omega_x = 500$ Hz, $\omega_y = 600$ Hz i $\omega_z = 700$ Hz.

Figure 7. Normal mode in units of ω_z as a function of relative interaction strength for erbium gas, where $N = 50000$ and $\omega_x = 500$ Hz, $\omega_y = 600$ Hz and $\omega_z = 700$ Hz.

oscilovanja – ω_1 , ω_2 i ω_3 . Ukoliko je magnetno polje isključeno, oscilacije sa odgovarajućim frekvencijama dešavaju se duž x , y i z pravca. U slučaju neinteragujućeg gasa, članovi koji sadrže e_{dd} u dinamičkim jednačinama anuliraju se, pa se frekvencije normalnih moda mogu izvesti analitički. Uzimajući u obzir da su u pitanju male oscilacije, primenom Tejlorovog razvoja, za rešenja se dobijaju vrednosti $\omega_1 = 2\omega_x$, $\omega_2 = 2\omega_y$, $\omega_3 = 2\omega_z$. U slučaju interagujućeg gasa, pravci oscilacija sa frekvencijama normalnih moda minimalno variraju u odnosu na x , y i z pravce. Dobijen je grafik zavisnosti ω_1/ω_z od relativne jačine interakcije e_{dd} (slika 7). Kako je za neinteragujući gas odnos normalne mode i frekvencije oscilacija duž z ose jednak dva, funkcija zavisnosti konvergira vrednosti dva pri vrednostima relativne jačine interakcije blizu nule.

Zaključak

U ovom radu ispitivano je kako deformacije oblaka gasa kao i Fermijeve površi, nastale usled DDI, zavise od parametara harmonijskog potencijala u kome je gas zarobljen. Dobijeno je da se povećavanjem frekvencije lasera duž jedne ose, tj. stepena asimetrije zamke povećava i stepen deformacije Fermijeve površi. Dobijeni analitički i numerički rezultati relevantni su za bolje razumevanje uticaja električnih i magnetnih interakcija u višesensnim sistemima. Deformacije Fermijeve površi u slučaju erbijumovog Fermi gasa su veličine 2-3% u odnosu na neinteragujući gas što je i eksperimentalno potvrđeno. U ovom radu dobijeni su parametri zamke pri kojima je deformacija Fermijeve površi najveća pa bi rezultati mogli doprineti dizajniranju budućih eksperimenata u cilju lakšeg uočavanja deformacija, ali i analizi njihovih rezultata.

Literatura

- Lima A. 2010. Hydrodynamic Studies of Dipolar Quantum Gases. PhD Thesis. Freien Universität Berlin
- Wächtler F. 2011. Hartree-Fock Theory of Dipolar Fermi Gases. Doktorska disertacija. Universität Potsdam, Am Neuen Palais 10, 14469 Potsdam, Germany
- Wächtler F., Lima A. i Pelster A. 2013. Low-Lying Excitation Modes of Trapped Dipolar Fermi Gases: From Collisionless to Hydrodynamic Regime. *Physical Review A*, **96**: 043608.
- Veljić V., Balaž A., Pelster A. 2016. Time-of-flight expansion of trapped dipolar Fermi gases: from collisionless to hydrodynamic regime. *Physical Review A*, **95**: 053635.

Anastasija Ilić and Jelena Ristić

Influence of Dipol-Dipol Interaction on Fermi Surface

In this paper we discuss the influence of dipole-dipole interaction (DDI) on the equilibrium and dynamics properties of the fermionic erbium gas trapped into the magneto-optical trap, and therefore cooled down to the temperatures of nanokelvins. At such low temperatures, quantum effects are present and the system is described using Fermi-Dirac statistics.

We observe the system in real space, where we look for Tomas-Fermi radii, and in momentum space, where semi-axes of the Fermi surface (FS) are determined. In the case of non-interacting gas, the FS is a sphere which deforms into an ellipsoid after DDI is considered. Dependence of the FS, as well as the shape of gas cloud in the real space on different variational parameters are studied.

Total energy is obtained using the Wigner function, which is equivalent to the quantum wave function. Using the method of Lagrange multipliers, we minimize the total energy while sustaining the total number of particles in the system. We analytically obtain a closed set of equations, which is further solved numerically. The solutions of the set represent both the shape of gas in real space and the shape of the FS.

We analyze the deformation of the FS as a function of trap frequencies and the number of particles in the system (Figures 1 and 3). Further, we find how these parameters influence the shape of the gas cloud in the real space (Figure 2). Additionally, oscillations due to perturbation of the system are studied (Figure 6). We calculate normal modes and analyze their dependence on relative interaction strength (Figure 7).

With increasing trap frequency along one axis, we increase trap asymmetry, as well as the degree of the deformation of the FS. In the case of the spherically symmetrical trap, where a magnetic field is directed along the z

axis, deformation is observable in the real space. Since DDI of erbium atoms are weak, influence of the magnetic field on the gas is weak as well. That is why we study KRb gas where deformation along the z axis is highly noticeable (Figure 4).

Analytical and numerical results obtained in this paper contribute to the better understanding of the nature of DDI. We find that the deformation of the FS is 2-3%, which is experimentally confirmed. Since we calculate for which values of the trap frequencies the deformation is most visible, this results could contribute to a more efficient potential experimental set, as well as to analyzing its results.

