Dalibor Danilović

Dve topologije na skupu celih brojeva

U ovom radu proučavane su dve topologije na skupu celih brojeva: Furštenbergova i Golombova topologija. Dat je pregled osnovnih topoloških svojstava tako dobijenih topoloških prostora kao i dokaz tvrđenja o metrici koja indukuje Furštenbergovu topologiju, koje se u postojećoj literaturi pojavljuje na nivou hipoteze. Zatim su određena zatvorenja nekih podskupova skupa celih brojeva, pri čemu je dokazano opštije tvrđenje iz kog izvodimo neka postojeća tvrđenja na tu temu. Izložene su i dve teoreme o aritmetičkim progresijama koje se oslanjaju na topološka svojstva ovih topologija na Z.

Uvod

Jedno od prvih dokazanih tvrđenja u teoriji brojeva jeste da prostih brojeva ima beskonačno mnogo. Taj dokaz dao je Euklid koristeći jednostavan argument svođenja na protivurečnost: ako pretpostavimo da prostih brojeva ima konačno mnogo, označimo ih sa $p_1, p_2, \ldots, p_n$, tada je broj $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ složen, ali ipak nedeljiv niti jednim prostim brojem $p_1, p_2, \ldots, p_n$. To je nemoguće, prema tome, prostih brojeva ne može biti konačno mnogo. Danas je poznato više različitih dokaza ove fundamentalne činjenice, koji koriste alate iz raznih oblasti matematike.

Jedan takav dokaz jeste i Furštenbergov dokaz iz 1955. godine (Furstenberg 1955) pomoću topologije, koji ćemo prikazati u narednom odeljku. Ovaj dokaz, između ostalog, pruža interesantnu vezu između opšte topologije i teorije brojeva, koja je proučavana od strane više autora. Primera radi, Golomb (1959) je posmatrao sličnu topologiju, ovog puta na skupu N_0, i takođe dao dokaz beskonačnosti prostih brojeva na jeziku opšte topologije.

Cilj ovog rada je da pruži dalju analizu ovih topologija. Sem sumiranja i izvođenja nekih rezultata o osnovnim topološkim svojstvima ovih prostora, dokazujemo i tvrđenje o metrici koja indukuje Furštenbergovu topologiju, kao i izvesna tvrđenja o zatvorenjima podskupova celih brojeva u ovim topologijama. Često koristimo poznata tvrđenja teorije brojeva da

Dalibor Danilović (1998), Ivanjica, Stevana Čolovića 14, učenik 3. razreda Gimnazije u Ivanjici

MENTOR: Marko Đikić, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Nišu

bismo izučavali topološka svojstva skupova, ali i obrnuto, pomoću tvrđenja iz opšte topologije dokazujemo neke aritmetičke osobine celih brojeva.

Rad je strukturiran na sledeći način. U drugom odeljku uvodimo Furštenbergovu i Golombovu topologiju i prikazujemo već pomenuti Furštenbergov dokaz o beskonačnosti prostih brojeva. U trećem odeljku bavimo se osnovnim topološkim svojstvima, na čelu sa metrizabilnošću. Na kraju, u četvrtom odeljku, dokazujemo tvrđenja u vezi sa zatvorenjima podskupova skupa celih brojeva.

Podsetimo se da, ukoliko je X neprazan skup i τ kolekcija podskupova skupa X koja zadovoljava sledeće uslove: 1° $X, \varnothing \in \tau$; 2° ako je $\{A_i : i \in I\} \subseteq \tau$, tada je i $\bigcup_{i \in I} A_i$, gde je I proizvoljan indeksni skup; 3° ako su $A_1, A_2 \in \tau$ tada je i $A_1 \bigcap A_2 \in \tau$; tada kolekciju τ nazivamo **topologija nad X**, a uređeni par (X, τ) nazivamo **topološki prostor**. Za sve ostale pojmove i osnovne osobine topoloških prostora, upućujemo čitaoca na referentnu knjigu Engelkinga (Engelking 1989).

Furštenbergova i Golombova topologija

Uvedimo najpre Furštenbergovu topologiju. Primetimo da je familija aritmetičkih progresija celih brojeva: $\{a + b\mathrm{Z} : a, b \in \mathrm{Z}, b \neq 0\} \bigcup \{\varnothing\}$, gde smo sa $a + b\mathrm{Z}$ označili skup $\{a + bn : n \in \mathrm{Z}\}$, zatvorena za preseke i trivijalno pokriva skup Z. Prema tome, ova familija generiše topološki prostor, kome je ona baza.

Definicija 2.1. Furštenbergova topologija τ na skupu Z je kolekcija skupova $A \subseteq \mathrm{Z}$ takvih da je A ili prazan, ili za svako $a \in A$ postoji $b \in \mathrm{Z} \setminus \{0\}$ takvo da je $a + b\mathrm{Z} \subseteq A$.

Drugim rečima, otvoreni skupovi u Furštenbergovoj topologiji su oni i samo oni skupovi koji se mogu predstaviti kao unije proizvoljno mnogo aritmetičkih progresija. Prikažimo sada Furštenbergov dokaz beskonačnosti prostih brojeva.

Teorema 2.2 (Furstenberg 1955). Prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji konačno mnogo prostih brojeva i neka su to $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Posmatrajmo sada skup:

$$C := \bigcup_{i=1}^{k} p_i \mathrm{Z}$$

Svaki od skupova $p_i\mathrm{Z}$ je zatvoren u Furštenbergovoj topologiji, pa je takav i skup C, budući unija konačno mnogo njih. Kako svaki broj osim –1 i 1 ima bar jedan prost činilac, to je $C = \mathrm{Z} \setminus \{-1, 1\}$, pa sledi da je $\{-1, 1\}$ otvoren u ovoj topologiji, što je kontradikcija. Dakle, prostih brojeva ima beskonačno mnogo. ■

Pored Furštenbergove topologije, Golomb (1959) je definisao još jednu nama bitnu topologiju, ovaj put na skupu N_0.

Definicija 2.3. Golombova topologija na skupu N_0 je kolekcija podskupova A skupa N_0 takvih da je A ili prazan, ili za svako $a \in A$ postoji $b \in N$ tako da važi $(a, b) = 1$ i $a + bN_0 \subseteq A$.

Nije teško uočiti da je kolekcija skupova opisana u prethodnoj definiciji zaista topologija na skupu N_0 i da njenu bazu čini kolekcija aritmetičkih progresija $\{a + bN_0 : a \in N_0, b \in N, (a, b) = 1\} \cup \{\varnothing\}$. Poput Furštenberga, i Golomb daje dokaz beskonačnosti prostih brojeva i zatim se bavi proučavanjem raznih topoloških i aritmetičkih svojstava ove topologije.

Topološka svojstva – metrizabilnost

Dokažimo na početku osnovna topološka svojstva Furštenbergove topologije.

Teorema 3.1. Neka je (Z, τ) Furštenbergov topološki prostor. Tada on zadovoljava svojstvo:

1) T_2 prostora;

2) II-prebrojivosti.

Dokaz. 1) Neka su $x, y \in Z$ i $x \neq y$, i bez gubljenja opštosti pretpostavimo da je $x > y$. Dokažimo da postoje disjunktne okoline tačaka x i y u τ čime bismo, zbog proizvoljnosti tačaka x i y, pokazali da je ovaj prostor T_2. Neka je $b \in N$, $b > x - y$ i posmatrajmo okoline: $x + bZ$ i $y + bZ$. Ove okoline su evidentno disjunktne.

2) Najpre, ovaj prostor je I-prebrojiv jer za proizvoljan ceo broj x, familija $\{x + bZ : b \in N\}$ je prebrojiva baza za familiju okolina tačke x. Kako je Z i prebrojiv skup, to će biti i II-prebrojiv. ■

Napomenimo da je pokazano (Broughan 2003) da ovaj prostor ima veliku induktivnu dimenziju 0, pa će prema maloj Urisonovoj lemi (videti Engelking 1989) on biti i normalan, odnosno T_4 prostor.

Jedno od bitnijih svojstava topoloških prostora jeste metrizabilnost. Topološki prostor (X, τ) je metrizabilan ako postoji metrika na X koja indukuje topologiju τ. Iako svaki metrički prostor na prirodan način postaje topološki prostor, nije tačno da je svaka topologija indukovana izvesnom metrikom na posmatranom skupu. Metrizabilnost topološkog prostora povlači mnoge važne osobine tog prostora. Stoga postoji i mnogo rezultata koji govore kada je neki topološki prostor metrizabilan. Takva tvrđenja nazivaju se metrizacione teoreme, a jedna od njih data je u nastavku.

Teorema 3.2 (v. Engelking 1989). Za topološki prostor (X, τ), sledeći uslovi su ekvivalentni:

1) X je metrizabilan prostor;

2) X je T_3 prostor koji je II-prebrojiv.

Prethodna teorema je jedna od najpoznatijih (i prvih) metrizacionih teorema, poznata pod nazivom Urisonova metrizaciona teorema. Pored Urisonove, postoje i Bingova, Nagata-Smirnov, metrizaciona teorema Arhangelskog (I, II) i tako dalje. Sami rezultati kao i njihovi dokazi mogu se naći u knjizi Engelkinga (Engelking 1989).

Teorema 3.3. Furštenbergov topološki prostor je metrizabilan prostor.

Dokaz. Kako je svaki T_4 prostor ujedno i T_3 prostor, to teorema sledi iz Urisonove metrizacione teoreme i teoreme 3.1. ■

Sada kada znamo da je ovaj prostor metrizabilan, prirodno se postavlja pitanje metrike koja indukuje Furštenbergovu topologiju. U literaturi (Lovas i Mezo 2010) je data sledeća norma:

$$\|n\|_0 := \frac{1}{\{k \in \mathrm{N} : 1 \mid n, 2 \mid n, \ldots, k \mid n\}}, \quad \|0\|_0 := 0$$

i dokazano je da metrika $d_0(m, n) = \|m - n\|$ indukuju Furštenbergovu topologiju. Na kraju istog rada, data je i norma:

$$\|n\| := \sum_{k \in \mathrm{N}, k \nmid n} 2^{-k}, \quad \|0\| := 0$$

Naveden je izvor na kome se može naći dokaz da je odgovarajuća funkcija $d(m, n) = \|m - n\|$ metrika na Z, kao i heurističko, intuitivno objašnjenje da ona indukuje Furštenbergovu topologiju. Napominjemo da je u trenutku pisanja ovog članka navedeni izvor bio nedostupan. U nastavku dajemo dokaz ovih činjenica.

Teorema 3.4. Sa funkcijom rastojanja d definisanom ranije, (Z, d) postaje metrički prostor i metrika d indukuje Furštenbergovu topologiju.

Dokaz. Pokažimo prvo da je data funkcija metrika. Jednostavno se proverava da važe sve aksiome metričkog prostora, sem eventualno nejednakosti trougla, pa zato pokažimo da važi i ona. Neka su m i n proizvoljni celi brojevi. Najpre pokazujemo da važi sledeće:

$$\|m\| + \|n\| \geq \|m - n\|$$

Primetimo da ukoliko neko $k \in \mathrm{N}$ ne deli $m - n$, tada k ne može istovremeno deliti i m i n. Prema tome, ukoliko se u izrazu za $\|m - n\|$ javi sabirak oblika 2^{-k}, on će se javiti i u barem jednom od izraza za $\|m\|$ ili $\|n\|$. Odatle sledi navedena nejednakost. Sada nejednakost trougla dobijamo na sledeći način: za proizvoljne $m, n, l \in \mathrm{Z}$ važi:

$$d(m, n) = \|m - n\| = \|m - l + l - n\| \leq \|m - l\| + \|n - l\| = d(m, l) + d(n, l)$$

Dakle, (Z, d) je zaista metrički prostor. Pokažimo sada da d indukuje Furštenbergovu topologiju.

Neka je $A \subseteq \mathrm{Z}$ proizvoljan otvoren skup u smislu metrike d, i neka je $a \in A$ proizvoljan element. Tada postoji $r > 0$ takvo da je otvorena kugla $B(a, r) = \{x : \|a - x\| < r\}$ cela sadržana u A. Neka je $b \in \mathrm{N}$ takvo da je $\|b\| < r$ (uočimo da je $\|N!\| \leq 2^{-(N+1)} + 2^{-(N+2)} + \ldots = 2^{-N}$, pa za b možemo odabrati $N!$ za dovoljno veliko N). Za takvo b i svako $x \in \mathrm{Z}$ imamo:

$$d(a, a + bx) = \|a - (a + bx)\| = \|-bx\| = \|bx\| \leq \|b\| < r$$

pri čemu smo iskoristili nejednakost $\|bx\| \leq \|b\|$ koja jednostavno sledi iz definicije ove norme. Prema tome, $a + b\mathrm{Z} \subseteq B(a, r) \subseteq A$, pa je svaki skup koji je otvoren u smislu metrike d ujedno otvoren i u Furštenbergovoj topologiji.

Pokažimo sada obrnuti smer. Neka je podskup A skupa Z otvoren u smislu Furštenbergove topologije i neka je $a \in A$ proizvoljan element. Tada postoji $b \in \mathrm{Z} \setminus \{0\}$ tako da je $a + b\mathrm{Z} \in A$. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $b \in \mathrm{N}$. Uočimo otvorenu kuglu $B(a, 2^{-b})$. Ako je $c \in B(a, 2^{-b})$, tada iz $\|a - c\| < 2^{-b}$ zaključujemo da se sabirak 2^{-b} ne pojavljuje u sumi koja određuje $\|a - c\|$, tj. važi $b \mid a - c$. Odatle sledi da $c \in a + b\mathrm{Z}$, tj. važi $B(a, 2^{-b}) \subseteq a + b\mathrm{Z} \subseteq A$.

Ovim smo kompletirali dokaz. ■

Pokažimo sada kako se metrizabilnost Furštenbergovog topološkog prostora može iskoristiti za dokazivanje jednog rezultata o aritmetičkim progresijama na skupu Z. Pre toga, dokažimo jednu korisnu lemu.

Lema 3.5. Ako je topološki prostor (X, τ) metrizabilan, tada za svaku tačku x tog prostora, postoji prebrojiva familija okolina tačke x, čiji je presek jednak $\{x\}$.

Dokaz. Ukoliko uzmemo familiju otvorenih kugli $\left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathrm{N}\right\}$ definisanih odgovarajućom metrikom, presek ove familije je upravo $\{x\}$. ■

Dokažimo sada da za svaki ceo broj postoji prebrojiva familija aritmetičkih progresija koje ga sadrže i čiji je presek taj i samo taj broj.

Teorema 3.6. Za svaki ceo broj x, postoji prebrojiva familija prirodnih brojeva $\{b_i : i \in I\}$ takvih da važi:

$$\bigcap_{i \in I} (x + b_i \mathrm{Z})$$

Dokaz. Iz teoreme 3.3 znamo da je topološki prostor Furštenberga metrizabilan, pa iz leme 3.5 zaključujemo da možemo uočiti prebrojivu familiju okolina tačke x čiji je presek upravo $\{x\}$. Budući da aritmetičke progresije čine bazu za ovu topologiju, za svaku uočenu okolinu postoji aritmetička progresija $x + b_i\mathrm{Z}$ čitava sadržana u njoj. Za ovakvu familiju aritmetičkih progresija upravo važi traženo tvrđenje. ■

Napominjemo ovde da topologija Golomba, za razliku od Furštenbergove topologije, nije metrizabilna, i da Golombov topološki prostor jeste T_2. Dokaz se može naći u radu Golomba (1959).

Završimo ovaj odeljak navodeći još neka topološka svojstva Furštenbergove i topologije Golomba. Fuštenbergov topološki prostor je nepovezan, što se jednostavno dokazuje uočavanjem diskoneksije $2\mathrm{Z} \cup (2\mathrm{Z} + 1) = \mathrm{Z}$. Zapravo pokazano je (Szczuka 2013) i da Furštenbergov topološki prostor nije lokalno povezan. U literaturi (Lovas i Mezo 2010) se može naći i da je on totalno nepovezan, odnosno da su mu jedine komponente povezanosti jednočlani skupovi. Za razliku od Furštenbergovog, topološki prostor Golomba je povezan, ali nije lokalno povezan prostor. Dokazi se takođe mogu naći u drugim radovima (Szczuka 2010; 2013). Takođe se može naći dokaz da je prsten celih brojeva zapravo topološki prsten u odnosu na Furštenbergovu topologiju (Lovas i Mezo 2010).

Zatvorenja nekih podskupova nad Z

U ovom odeljku bavimo se zatvorenjima određenih podskupova skupa celih brojeva, kao što su prosti brojevi, Fermaovi i Kulenovi brojevi, a dokazujemo i dva opštija rezultata za određivanje zatvorenja nekih podskupova celih brojeva. Tako, na primer, tvrđenje o zatvorenju Fermaovih brojeva, koje je dokazano u literaturi (Broughan 2003), kod nas sledi kao jednostavna posledica opštijih tvrđenja.

Teorema 4.1. Neka za skup $A \subseteq Z$ važe sledeći uslovi:

1) $\{-1, 0, 1\} \in A$;

2) Za svako $a_i, a_j \in A \setminus \{0\}$ važi $(a_i, a_j) = 1$.

Tada je A zatvoren u Furštenbergovoj topologiji (Z, τ).

Dokaz. Dokažimo da je skup $Z \setminus A$ otvoren. Neka je $a_0 \notin A$ i pretpostavimo da svaka okolina $a_0 + bZ$ tačke a_0 ima neprazan presek sa A. Ako izaberemo $b_1 = a_0$, onda iz $(a_0 + b_1Z) \cap A \neq \emptyset$ zaključujemo da u A postoji element $a_1 \neq a_0$ koji je deljiv sa a_0. Ako izaberemo sada za $b_2 = ka_0$, takvo da je $b_2 > |a_1 - a_0|$, iz $(a_0 + b_2Z) \cap A \neq \emptyset$ zaključujemo da u A postoji element a_2 deljiv sa a_0, pri čemu je $a_2 \neq a_1$, jer $a_1 \notin a_0 + b_2Z$. Pošto $a_0 \notin \{-1, 0, 1\}$ i $a_0|a_1$ i $a_0|a_2$, sledi da u skupu A postoje dva elementa, konkretno a_1 i a_2, sa osobinom koja je u suprotnosti sa uslovom 2). Dakle, mora postojati okolina tačke a_0 koja ima prazan presek sa A. Dakle, skup $Z \setminus A$ je otvoren, odnosno A je zatvoren u (Z, τ). ■

Ispitajmo sada topološka svojstva nekih podskupva skupa Z nad Furštenbergovom topologijom. Počnimo najpre sa Fermaovim brojevima.

Teorema 4.2 (v. Broughan 2003). Skup Fermaovih brojeva $F = \{f_n = 2^{2^n+1} : n \in N\}$ je zatvoren i diskretan nad Furštenbergovom topologijom.

Dokaz. Pokažimo najpre da je ovaj skup zatvoren. Poznato je tvrđenje da su svaka dva Fermaova broja uzajamno prosta. Prema teoremi 4.1 jedini brojevi koji mogu biti u zatvorenju skupa F i ne pripadaju mu jesu –1, 0 i 1. Ispitajmo da li neki od njih može pripadati cl(F).

Ako $-1 \in cl(F)$, tada je presek $(-1 + bZ) \cap F$ neprazan za svako $b \in N$, pa za svaki prirodan broj b mora da postoji neko k tako da $b|(f_k + 1)$, odnosno $b \,|\, (2^{2^k} + 2)$. Recimo za $b = 4$ to nije ispunjeno, prema tome –1 nije u zatvorenju skupa F.

Ako $0 \in cl(F)$, slično kao ranije, ako izaberemo za b bilo koji paran prirodan broj, recimo $b = 2$, dolazimo do kontradikcije.

Ako $1 \in cl(F)$, tada birajući za b bilo koji neparan prirodan broj veći od 1, recimo $b = 3$, dolazimo do kontradikcije.

Dakle, skup Fermaovih brojeva jeste zatvoren nad ovom topologijom.

Dokažimo sada da je diskretan. Koristeći da je $(f_m, f_n) = 1$ za sve prirodne brojeve n i m, ako izaberemo proizvoljan element $f_k \in F$ i učimo njegovu okolinu $f_k + f_kZ$, slediće da je f_k jedini Fermaov broj u ovoj okolini. ■

Primećujemo dakle da je teorema 4.1 od koristi i kada proučavamo skupove koji zadovoljavaju samo drugi uslov te teoreme. Jedan od takvih skupova je i skup prostih brojeva, a neka njegova topološka svojstva iskazana su u narednoj teoremi.

Teorema 4.3. Skup prostih brojeva P ima sledeće osobine u Furštenbergovoj topologiji:

1) $cl(P) = P \cup \{-1, 1\}$;

2) skup P je lokalno povezan;

3) $\mathrm{int}(P) = \varnothing$;

4) skup P je diskretan.

Dokaz. 1) Dokaz izvodimo analogno dokazu teoreme 4.2, a koristeći teoremu 4.1. Jednostavno pokazujemo da $0 \notin \mathrm{cl}(P)$, dok $-1, 1 \in \mathrm{cl}(P)$ što sledi iz čuvene Dirihleove teoreme o prostim brojevima u aritmetičkim progresijama. Naime, svaka aritmetička progresija $\pm 1 + b\mathrm{Z}$ sadrži barem jedan prost broj, jer je $(\pm 1, b) = 1$, za svako $b \in \mathrm{Z}$, pa zato svaka okolina tačke ± 1 ima neprazan presek sa P.

2) Videti (Szczuka 2013).

3) Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji ceo broj x koji se nalazi u $\mathrm{int}(P)$, tj. $x \in P$ i postoji aritmetička progresija $x + b\mathrm{Z} \subseteq P$. Tada sledi da je $x + bx \in P$, ali $x \mid x + bx$, i pritom $x > 1$, jer $x \in P$. Ovo je kontradikcija.

4) Za proizvoljan prost broj p, posmatrajući okolinu $p + p\mathrm{Z}$, zaključujemo da će p biti jedini prost broj koji se nalazi u toj okolini i skupu P istovremeno. Prema tome, ovaj skup je diskretan.

Sada kada smo odredili zatvorenje skupa prostih brojeva nad Furštenbergovom topologijom, predstavimo sledeći rezultat, koji je direktna posledica prethodne teoreme i činjenice da je Furštenbergov topološki prostor T_3, tj. da se skup $\mathrm{P} \cup \{-1, 1\}$ može otvorenim skupom odvojiti od bilo koje tačke van njega.

Teorema 4.4. Za svaki ceo broj $x \notin \mathrm{P} \cup \{-1, 1\}$, postoje prirodni brojevi $b_0, b_1, b_2, \dots$ takvi da su skupovi $A = x + b_0\mathrm{Z}$ i $B = \bigcup_{i \in \mathrm{N}} (p_i + b_i\mathrm{Z})$ disjunktni, gde je $\mathrm{P} \cup \{-1, 1\} = \{p_1, p_2, \dots\}$.

Zanimljivo je pomenuti da je i skup Mersenovih brojeva $\mathrm{M} = \{2^p - 1 : p \in P\}$ takođe zatvoren i diskretan u Furštenbergovoj topologiji, a dokaz se može naći u literaturi (Broughan 2003). Dajemo sada jedan opštiji rezultat o zatvorenju izvesnih podskupova skupa prirodnih brojeva u Furštenbergovoj topologiji, čija će direktna posledica biti i određivanje zatvorenja skupa Kulenovih brojeva $\mathrm{C} = \{n2^n + 1 : n \in \mathrm{N}\}$, a može se iskoristit i za određivanje zatvorenja skupa Fermaovih brojeva.

Teorema 4.5. Neka su funkcjije $f, g : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ takve da je $f = O(g)$ i neka je skup C definisan sa:

$$C = \left\{ f(n) \cdot 2^{g(n)} + 1 \ : \ n \in \mathrm{N} \right\}$$

Tada je $\mathrm{cl}(C) \subseteq C \cup \{1\}$. Ako za svaki prirodan broj b postoji prirodan broj n takav da $b \mid f(n)$, onda je $\mathrm{cl}(C) = \mathrm{C} \cup \{1\}$. Ako postoji neparan broj b takav da $f(n)$ nije deljivo sa b ni za jedan prirodan broj n, onda je $\mathrm{cl}(C) = C$.

Dokaz. Primetimo najpre da se nijedan paran ceo broj ne može nalaziti u zatvorenju skupa C jer su svi njegovi članovi neparni, pa ga nijedna aritmetička progresija čiji su svi članovi parni brojevi neće seći. Pokažimo sada da nijedan neparan ceo broj $m \notin C \cup \{1\}$ ne može biti u $\mathrm{cl}(C)$.

Neka je m neparan ceo broj za koji važi suprotno. Tada za svaki prirodan broj b postoji ceo broj $k \neq 0$ takav da je $m + bk \in C$. Ukoliko je $m < 0$, takav ceo broj k mora biti prirodan, a ako je $m > 0$, onda broj k mora biti prirodan za sve dovoljno velike b. Prema tome, za sve dovoljno velike prirodne brojeve a, stavljajući da je $b = |(m - 1)| \cdot 2^a$, dobijamo da postoji prirodan broj k_a i prirodan broj n_a takav da važi $m + bk_a = f(n_a)\cdot 2^{g(n_a)} + 1$, odnosno:

$$|m-1|(\pm 1 + 2^a k_a) = f(n_a)\cdot 2^{g(n_a)}. \tag{1}$$

Kada a teži beskonačnosti izraz sa leve strane prethodne jednakosti teži ka beskonačnosti. Zbog toga sledi da je C neograničen skup, a iz relacije $f = O(g)$, zaključujemo da to implicira da je funkcija g neograničena (ako bi g bila ograničena, takva bi bila i f pa i čitav skup C). Iz jednakosti (1) primećujemo da za svako a važi $2^{g(n_a)} \mid m-1$. Kako $m \neq 1$, imamo da je $m-1 \neq 0$, pa je $2^{g(n_a)} \leq |m-1|$ za svako a. Ovo je u suprotnosti sa zaključkom da je funkcija g neograničena, jer je i skup $\{n_a : a \in \mathrm{N}\}$ neograničen, pa ne može uvek važiti $2^{g(n_a)} \leq |m-1|$. Ovim smo dokazali da nijedan broj $m \notin C \cup \{1\}$ nije u cl(C).

Da bismo kompletirali dokaz, uočimo da ako za svaki prirodan broj b postoji n tako da $b \mid f(n)$, onda i za svaki prirodan broj b okolina $1 + b\mathrm{Z}$ ima neprazan presek sa C. Prema tome $1 \in \mathrm{cl}(C)$, pa je $\mathrm{cl}(C) = C \cup \{1\}$. S druge strane, ako postoji neparan broj b takav da uvek važi $b \nmid f(n)$, tada okolina $1 + b\mathrm{Z}$ ima prazan presek sa C, jer bi u suprotnom za neko $n \in \mathrm{N}$ važilo $b \mid f(n)\cdot 2^{g(n)}$, tj. $b \mid f(n)$, što nikad nije ispunjeno. Prema tome u ovom slučaju $1 \notin \mathrm{cl}(C)$, drugim rečima $\mathrm{cl}(C) = C$. ■

Posledica 4.6. Zatvorenje Kulenovih brojeva $C = \{n2^n + 1 : n \in \mathrm{N}\}$ nad Furštenbergovom topologijom je skup $C \cup \{1\}$.

Zanimljiv je problem određivanja zatvorenja skupa Fibonačijevih brojeva u Furštenbergovoj topologiji. U radu (Broughan 2003) je data hipoteza o zatvorenju skupa Fibonačijevih brojeva, koja je dokazana 2008. godine (Hernández i Luca 2008). Ispostavilo se da je dokaz znatno složeniji od odgovarajućih dokaza za Fermaove ili Kulenove brojeve, koje smo dali ovde. U svakom slučaju, važi naredna teorema.

Teorema 4.7 (Hernández i Luca 2008). Zatvorenje skupa Fibonačijevih brojeva U u Furštenbergovoj topologiji je $U \cup \{(-1)^{n+1}u_n : n \in \mathrm{N}\}$ gde je u_n n-ti Fibonačijev broj.

Na kraju navodimo i tvrđenja u vezi sa zatvorenjima u topologiji Golomba. Posebno, određujemo zatvorenje skupa Fermaovih brojeva u ovoj topologiji.

Lema 4.8. Neka je $A \subseteq \mathrm{N}_0$ proizvoljan skup. Tada $0 \in \mathrm{cl}(A)$ u Golombovoj topologiji (N_0, τ_0).

Dokaz. Kako 0 ima samo jednu okolinu nad ovom topologijom, a to je N_0, to dokaz trivijalno sledi. ■

Teorema 4.9. Zatvorenje skupa Fermaovih brojeva u (N_0, τ_0) jeste $\mathrm{F} \cup \{0\}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je f_0 prirodan broj za koji je $f_0 \notin \mathrm{F}$ i $f_0 \in \mathrm{cl}(\mathrm{F})$. Tada je za svako $b \in \mathrm{N}$, za koje važi $(f_0, b) = 1$, presek $(f_0 + b\mathrm{N}_0) \cap \mathrm{F}$ neprazan. Ukoliko izaberemo $b = f_0 - 1$, dobijamo da za neko $k, m \in \mathrm{N}$ važi: $(f_0 - 1)bk = 2^{2^m}$, tj. $f_0 - 1 \mid 2^{2^m}$. Sada razlikujemo dva slučaja:

1) Ako je f_0 paran, iz $f_0 - 1 \mid 2^{2^m}$, sledi da je $f_0 - 1 = 1$, tj. $f_0 = 2$. Dakle, 2 je jedini paran broj koji je kandidat da pripada zatvorenju skupa F u τ_0.

Ukoliko za b izaberemo, recimo, $b = f_1^2$, tada je okolina 2 + bZ disjunktna sa skupom F. Zaista, u suprotnom postoji prirodan broj m takav da:

$$f_1^2 \mid 2^{2^m} - 1 = 3 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_{m-1}$$

što nije moguće, jer su Fermaovi brojevi po parovima uzajamno prosti i nisu deljivi sa 3.

2) Ako je f_0 neparan, iz $f_0 - 1 \mid 2^{2^m}$ za neko m, sledi da je $f_0 = 2n + 1$, za neki prirodan broj n. Ako posmatramo okolinu $f_0 + 2^{n+1}$Z, ukoliko ona ima neprazan presek sa F (element f_0 po pretpostavci nije u tom preseku), onda za neke prirodne brojeve k i m važi $2^n(1 + 2k) = 2^{2^m}$ što nije moguće, jer $1 + 2k \nmid 2^{2^m}$.

Prema tome, jedini prirodni brojevi koji se nalaze u skupu cl(F) su sami brojevi iz F.

Zajedno sa lemom 4.8 to daje cl(F) = F $\cup$ {0}. ■

Zanimljivo je pomenuti na kraju da je skup prostih brojeva gust u topologiji Golomba. Zapravo ta činjenica ekvivalentna je čuvenoj Dirihleovoj teoremi o prostim brojevima u aritmetičkim progresijama (Golomb 1959).

Literatura

Broughan K. A. 2003. Adic topologies for the Rational Integers. *Canadian Journal of Mathematics*, **55**: 711.

Engelking R. 1989. *General topology*. Berlin: Heldermann

Furstenberg H. 1955. On the infinitude of primes. *The American Mathematical Monthly*, **62**: 353.

Golomb S. W. 1959. A connected topology for the integers. *The American Mathematical Monthly*, **66**: 663.

Hernández S. H., Luca F. 2008. On a conjecture of Broughan. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **136** (2): 403.

Lovas R. L., Mezo I. 2010. On an exotic topology of the integers, *arXiv:1008.0713v1*.

Marjanović M., Vrećica S. 2012. *Topologija*. Beograd: Zavod za udžbenike

Szczuka P. 2010. The connectedness of arithmetic progressions in Furstenberg's, Golomb's, and Kirch's topologies. *Demonstratio Mathematica*, **43**: 899.

Szczuka P. 2013. Connections between connected topological spaces on the set of positive integers. *Central European Journal of Mathematics*, **11**: 876.

Dalibor Danilović

Two Topologies on Integers

In this paper we study two topologies on a set of integers: Furstenberg's and Golomb's topology. We give an overview of the basic properties of these topologies, and we prove a conjecture about a metric that could induce Furstenberg's topology. We proceed by studying closures of some interesting subsets of integers, where we prove a general result from which we can recover some existing results on the subject. We also give two statements about arithmetic progressions on integers based on the topological properties of the considered topologies.