

---

Bogdan Raonić i Andrej Jakovljević

## Eksperimentalno ispitivanje Ajnštajnovog i Debajevog modela

---

*Cilj rada je ispitivanje načina za određivanje Debajeve i Ajnštajnovne temperature, koje su mikroskopske karakteristike materijala, posrednim, makroskopskim metodama. Obrađene su dve metode. Prva koristi nelinearnost zavisnosti toplotnog kapaciteta od temperature, i ima sledeću postavku: kada metal ohladimo do željene temperature, dovodeći ga u kontakt sa tečnim azotom, merenjem količine azota koji je ispario, dobijamo toplotni kapacitet metala koji možemo uporediti sa teorijskom zavisnošću od Ajnštajnovne ili Debajeve temperature. Druga metoda koristi zavisnost brzine zvuka od mikroskopskih karakteristika metala, i svodi se na izračunavanje brzine zvuka u metalu. Brzina zvuka se meri tako što se odredi dužina trajanja kontakta između čekića i metala nakon što čekićem proizvedemo mehanički talas u metalu, koji se vraća kroz metal, delujući na čekić i prekidajući kontakt. Dobijeni rezultati za oba metoda se poklapaju sa referentnim vrednostima (Ashcroft 1988).*

---

### Teorijski uvod i cilj rada

Pre otkrića kvantne mehanike kristalna struktura čvrstih tela nije se mogla opisati na zadovoljavajući način. Atomi koji čine kristalnu rešetku su u stalnom kretanju. Oni osciluju oko svojih ravnotežnih položaja. Atomi se na različitim temperaturama različito ponašaju. Na nižim temperaturama se smanjuju frekvencije oscilovanja u odnosu na visoke temperature. Naučnike koji su se bavili fizikom čvrstog stanja, zanimala je zavisnost toplotnog kapaciteta od temperature.

Molarni toplotni kapacitet može biti izračunat razmatranjem vibracionog kretanja atoma kristalne rešetke metala. Dulong i Petit su početkom XIX veka, vršeći mnoge eksperimente, došli do zaključka da kod svakog čvrstog tela, molarni toplotni kapacitet iznosi  $3R$  na svakoj temperaturi ( $R$  – univerzalna gasna konstanta). Oni su problem vibracija atoma posmatrali sa strane klasične fizike. Njihova hipoteza je tačna samo u slučaju visokih temperatura, dok se, u slučaju nižih temperatura molarni toplotni kapacitet bitno razlikuje od konstante koje su oni dobili. Posmatrajući ovaj problem sa kvantno-mehaničke strane, dobijeni su modeli atoma kojima se preciznije može objasniti kako se i zašto menja molarni toplotni kapacitet pri različitim temperaturama. Pomenuti modeli su Ajnštajnov i Debajev model u kojima je glavna pretpostavka je da je energija vibracija kvantovana. Analogno sa fotonom u elektromagnetnom zračenju, uvodi se fonon. Fonon je kvazi-čestica koja je kvant energije oscilovanja (Kittel 1970). Fononi predstavljaju važan deo opisa ponašanja kristala, jer imaju značajnu ulogu u mnogim fizičkim osobinama materije, uključujući toplotnu i električnu provodljivost. Toplotne vibracije u kristalima su toplotno pobuđeni fononi. Fonon je kvantno-mehanički opis harmonijskog oscilovanja i svaka oscilacija u kristalnoj rešetci se može predstaviti kao superpozicija fonona.

Čvrsta tela imaju trodimenzionalnu rešetku ali je njeno ispitivanje kompleksno. S tim u vezi, posmatrajmo prvo jednodimenzionalnu, monoatomsku rešetku. Može se dokazati da se takva kristalna rešetka može predstaviti kao niz redno

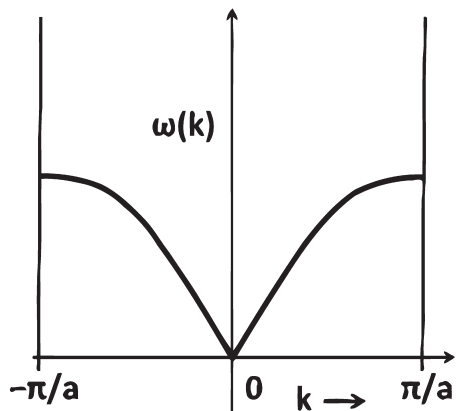
---

*Bogdan Raonić (2000), Kragujevac Vojvođanska 7/22, učenik 3. razreda Matematičke Gimnazije u Beogradu*

*Andrej Jakovljević (2000), Subotica, Koste Abraševića 34, učenik 3. razreda Matematičke Gimnazije u Beogradu*

*MENTOR: Stefan Badža, Univerzitet u Kembridžu, Ujedinjeno Kraljevstvo*

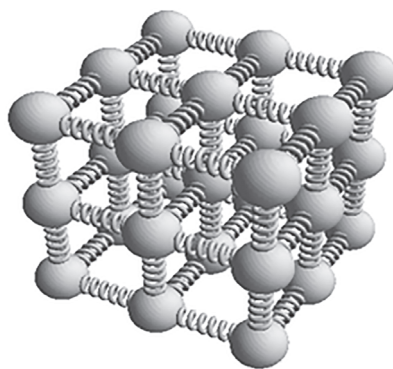
vezanih opruga jednakog koeficijenta elastičnosti. Takvom sistemu, moguće je odrediti zavisnost frekvencije od talasnog vektora (slika 1). Vidimo da je ta zavisnost oblika sinusoide i da na njoj postoji samo jedan neprekidan grafik, što će biti jako bitno za ispitivanje trodimenzionalne rešetke.



Slika 1. Disperziona kriva linearnog monoatomske lanca (Ashcroft *et al.* 1988)

Figure 1. Dispersion curve of a linear monoatomic chain (Ashcroft *et al.* 1988)

Sada posmatrajmo trodimenzionalnu, monoatomsku rešetku kakvu imaju metali (slika 2). Takvu rešetku možemo predstaviti kao skup atoma povezanih oprugama tako da su svaka dva susedna atoma povezana oprugom jednakog koeficijenta elastičnosti. Kao što je moguće naći zavisnost frekvencije od talasnog vektora u primeru jednodimenzionalne rešetke, moguće je naći pomenutu zavisnost i kod trodimenzionalne rešetke. Primetimo da na primeru jednodimenzionalne rešetke postoji samo jedna neprekidna linija na grafiku zavisnosti frekvencije od talasnog vektora. U slučaju trodimenzionalne rešetke, postoji veliki (ali konačni) broj tih linija. Te linije predstavljaju različite vrste oscilacija kojima mogu oscilovati atomi u rešetci. Različita stanja u kojima atomi mogu da se nalaze, odnosno različite oscilacije kojima atomi osciluju nazivaju se normalne mode. Kod jednodimenzionalne, monoatomske rešetke postoji samo jedna normalna moda, dok je u realnim rešetkama



Slika 2. 3D model rešetke (Blatt 1992)

Figure 2. 3D model of a lattice (Blatt 1992)

njihov broj veliki. Mode sa niskom frekvencijom će postojati na niskim temperaturama, a mode sa visokom frekvencijom će postojati na višim temperaturama. Dakle, atomi mogu oscilovati samo tačno određenim načinima.

Debaj je primetio postojanje normalnih moda i posmatrajući metal na ovaj način zaključio je da atomi osciluju zavisno jedni od drugih. U svom modelu, normalne mode je aproksimirao na linearne funkcije i tako lakše odredio potencijalnu energiju oscilovanja. Pomoću toga je odredio vezu između molarnog toplotnog kapaciteta i temperature (Mahmood *et al.* 2011):

$$C_V(T) = 9R \left( \frac{T}{\theta_D} \right)^{\theta_D/T} \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \quad (1)$$

U formuli (1)  $\theta_D$  predstavlja Debajevu temperaturu metala, a  $T$  je temperatura metala. Debajeva temperatura je sa jedne strane gornja granica integrala podeljena sa temperaturom (olakšava nam numeričko izračunavanje integrala), a sa druge strane, to je maksimalna temperatura koju može dostići telo samo vibracijama atoma u rešetci.

Ajnštajn je došao do hipoteze da svi atomi u metalu osciluju jednakim frekvencijama (tzv. Ajnštajnova frekvencija metala). On je zanemario postojanje normalnih moda. Ova pretpostavka će važiti samo na jako niskim i jako visokim temperaturama, dok u ostalim slučajevima nije

sasvim tačna. Koristeći se ovom hipotezom, Ajnštajn je aproksimirao vezu između temperature i molarnog toplotnog kapaciteta (formula 2) (Mahmood *et al.* 2011):

$$C_V(T) = 3R \left( \frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{\exp\left(\frac{\theta_E}{T}\right)}{\left( \exp\left(\frac{\theta_E}{T}\right) - 1 \right)^2} \quad (2)$$

Ajnštajn je u svom modelu pretpostavio da postoji samo jedna frekvencija. Ta frekvencija je direktno proporcionalna Ajnštajnovoj temperaturi  $\theta_E$  (sa koeficijentom  $\hbar/k_B$ ).

Cilj ovog rada je izračunavanje Ajnštajnovе i Debajeve temperature materijala koristeći dva eksperimenta. Prvi koristi nelinearnu zavisnost toplotnog kapaciteta od temperature i ima sledeću postavku: kada metal ohladimo do željene temperature, dovodeći ga u kontakt sa tečnim azotom, merenjem količine azota koji je ispario, dobijamo toplotni kapacitet metala, koji možemo uporediti sa teorijskom zavisnošću od Ajnštajnovе ili Debajeve temperature. Drugi eksperiment se zasniva na zavisnosti brzine zvuka u metalu od Debajeve temperature. Dakle, ovaj eksperiment se svodio na izračunavanje brzine zvuka u metalu. Brzina zvuka je računata tako što se meri trajanje kontakta između čekića i metala, nakon što čekićem proizvedemo mehanički talas u metalu, koji se vraća natrag kroz metal, delujući na čekić i prekidajući kontakt.

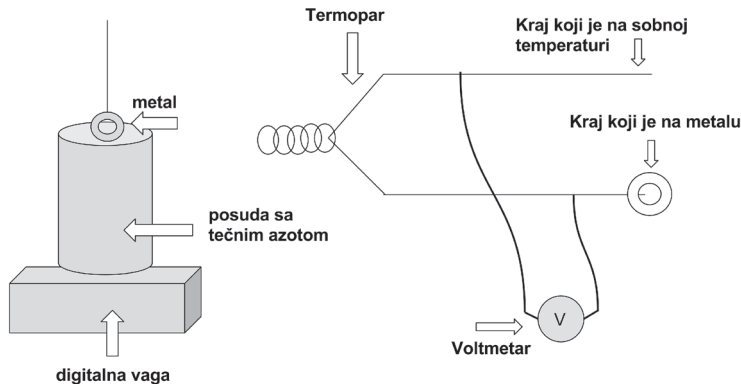
## Aparatura i metod

### Eksperiment sa tečnim azotom

Da bi se vrednosti Ajnštajnovе i Debajeve temperature odredile, potrebno je izračunati molarne toplotne kapacitete na određenim temperaturama i naći zavisnost molarnog toplotnog kapaciteta od temperature.

Za eksperiment su korišćeni bakar, aluminijum i mesing (legura koja se sastoji od 60% bakra i 40% cinka). Korišćen je i tečni azot, kao i termos koji je otporan na niske temperature ( $\sim 70$  K). Pomoću termopara (potrebna preciznost 1 K) izračunava se razlika između sobne i temperature metala, iz koje se lako izračunava temperatura samog metala. Masa tečnog azota u posudi merena je digitalnom vagom (korišćena je vaga čiji je najmanji podeok 0.1 g).

Metal kome se meri molarni toplotni kapacitet na određenoj temperaturi treba da se ohladi do te temperature. U ovom eksperimentu je to urađeno tako što se metal ubaci u posudu sa tečnim azotom (tada mu je temperatura 77 K) i onda se konstantno, termoparom, meri temperatura metala koja se tokom vremena polako povećava. Kada termopar pokazuje da je metal na željenoj temperaturi, komad metala se ubacuje u posudu sa tečnim azotom, pri čemu deo tečnog azota ispari. To se dešava zato što postoji razlika temperature između metala i tečnog azota, pa dolazi do razmene toplote i isparavanja azota. Tokom eksperimenta, posuda sa tečnim azotom se nalazi na digitalnoj vagi. Vagom je merena razlika masa tečnog azota pre i posle isparavanja, tj.



Slika 3. Aparatura eksperimenta sa tečnim azotom

Figure 3. The setup of the experiment with liquid nitrogen

masa isparenog azota. Na osnovu mase azota koji je ispario, lako se izračunava molarni toplotni kapacitet metala (Mahmood *et al.* 2011):

$$C_v(T) = \frac{L_v \Delta m}{n_m (T - 77 \text{ K})} \quad (3)$$

gde je  $L_v$  latentna toplota isparavanja azota,  $\Delta m$  masa azota koji je ispario,  $n_m$  broj molova metala kojem se meri molarni toplotni kapacitet,  $T$  temperature metala pre ubacivanja u tečni azot. Metal je nakon ubacivanja u tečni azot na temperaturi od 77 K (temperatura tečnog azota).

Iz formule (1) moguće je numerički izračunati Debajevu temperaturu. U programskom jeziku Matlab, dobijena je gustina verovatnoće Debajevе temperature. Vrh dobijenog gausijana određuje Debajevu temperaturu, dok je standardna devijacija gausijana direktno proporcionalna grešci merenja Debajevе temperature (sa koeficijentom  $\sqrt{2}$ ).

Istim postupkom koji je izveden za izračunavanje Debajevе temperature metala, pomoću formule (2), moguće je izračunati i Ajnštajnovu temperaturu kao i njenu grešku.

## Brzina zvuka i Debajeva temperatura

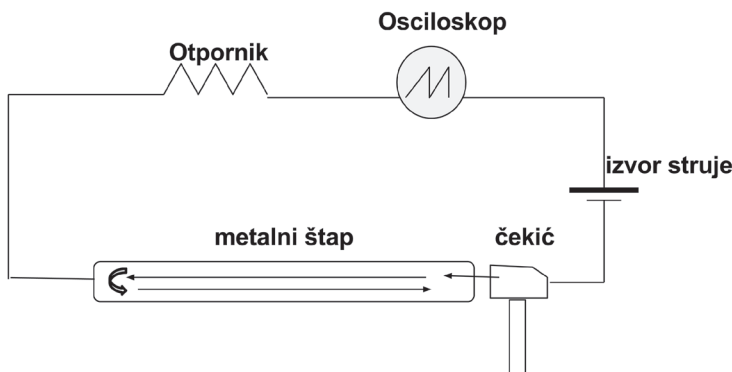
Veza između brzine prostiranja zvuka u metalu i Debajevе temperature tog metala ima oblik:

$$\theta_D = \frac{\hbar}{k_B} \left( \frac{3N}{4\pi V} \right)^{\frac{1}{3}} u_s \quad (4)$$

gde je odnos  $N/V$  konstanta rešetke metala,  $\hbar$  redukovana Plankova konstanta,  $k_B$  Bolcmanova konstanta,  $u_s$  brzina prostiranja zvuka u metalu.

Zvuk je mehanički talas koji se prostire kroz metale velikom brzinom, oko 10 puta brže nego u vazduhu. Koristeći dovoljno dugačak metalni štap i dovoljno precizan eksperiment za merenje trajanja određenog signala, moguće je izračunati brzinu prostiranja zvuka kroz metal.

Čekićem se proizvede vibracija koja se prostire od početka do kraja štapa i nazad (korišćen je bakarni štap). Kolo je tokom tog vremena zatvoreno, budući da postoji kontakt između čekića i metalnog štapa. Kada se talas koji se prostire kroz štap vrati na početak, delovaće silom na čekić, zbog čega će se kontakt izgubiti, pa kolo više neće biti zatvoreno. Na osciloskopu se očitava signal i meri vreme njegovog trajanja (vreme tokom kojeg je kolo bilo zatvoreno). To vreme je potrebno zvuku da stigne od početka do kraja štapa i nazad. Jedno merenje sadrži 128 uzastopnih udaraca. Prati se zavisnost napona na otporniku od vremena. Pošto je bilo 128 merenja, u trenutku  $t$  (vreme proteklo od trenutka udarca čekića u štap) napon je ili nula, ili je jednak naponu izvora. Usrednjena su sva merenja i dobijen odgovarajući grafik. Radi preciznosti eksperiment je ponovljen 10 puta. Pomoću dobijenog grafika je dobijena gustina verovatnoće trajanja kontakta. Kao i u prvom metodu, vrh dobijenog gausijana određuje vreme trajanja kontakta, a standardna devijacija je proporcionalna grešci tog vremena. Na osnovu dužine štapa nakon toga se lako izračunava brzina zvuka u metalu:



Slika 4. Aparatura drugog eksperimenta

Figure 4. The setup of the second experiment

$$u_s = \frac{2d_s}{\tau} \quad (5)$$

gde je  $d_s$  dužina štapa, a  $\tau$  vreme trajanja kontakta.

## Rezultati i diskusija

### Ekperiment sa tečnim azotom

Vrednost latentne toplote isparavanja azota je 199 J/g. Mase uzoraka iz kojih je izračunat broj molova uzoraka date su u tabeli 1.

Tabela 1. Mase korišćenih uzoraka

| Uzorak     | m[g]     | n[mol]      |
|------------|----------|-------------|
| Bakar      | 78.5±0.2 | 1.188±0.006 |
| Aluminijum | 15.2±0.2 | 0.563±0.008 |
| Mesing     | 14.0±0.2 | 0.350±0.005 |

Naponi na termoparu, masa isparenog azota i temperatura metala dati su u tabeli 2. Koristeći se ovim rezultatima i formulom (3) dolazimo do molarnih toplotnih kapaciteta metala.

Greška temperature je izračunata pomoću karakteristika korišćenog termopara (tip P). Korišćeni voltmetar je preciznosti do 0.1 mV. Na osnovu dobijenih molarnih toplotnih kapaciteta,

dobijeni su grafici koji prikazuju zavisnost između molarnih toplotnih kapaciteta od temperature metala. Dobijeni podaci su aproksimirani formulom (1). Uočava se da data kriva prolazi kroz većinu eksperimentalnih tačaka, što ukazuje na preciznost eksperimenta. Vidimo da je metod najmanje precizan kod bakra (slika 5), čemu je verovatno uzrok veličina ispitivanog uzorka. Najmanji temperaturni opseg je obrađen za aluminijum (slika 7), što je dovelo do lošijeg fita. Primetimo da kriva ide asimptotski ka  $3R$  ( $\approx 24.93$  J/molK), što predstavlja vrednost molarnog toplotnog kapaciteta metala za visoke temperature, kada se zanemare kvantni uticaji.

Na slici 8 prikazana je gustina verovatnoće Debajevе temperature. Za svaki metal dobijeni su slični gausijani. Na osnovu dobijenih gausijana, nađene su Debajevе temperature metala:

$$\theta_D(\text{Cu}) = 300 \pm 20 \text{ K}$$

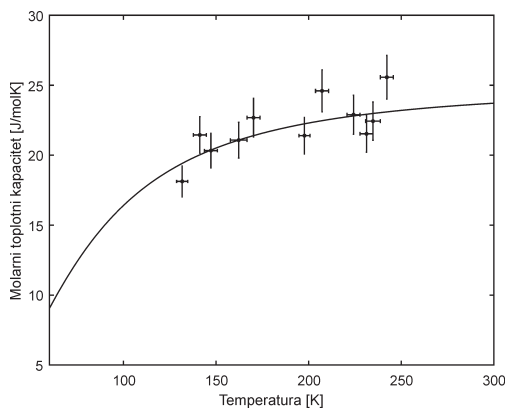
$$\theta_D(\text{Al}) = 450 \pm 20 \text{ K}$$

$$\theta_D(\text{mesing}) = 330 \pm 60 \text{ K}$$

Dobijene vrednosti Debajevе temperature su delimično precizne. U referentnim radovima je za Debajevу temperaturu bakra dobijeno 325–345 K (Ashcroft i Mermin 1988). Vidi se dobijeni rezultat ne ulazi u opseg, a kasnije će biti objašnjeno šta je to moglo da prouzrokuje. Što se tiče aluminijuma, vrednosti kojima smo se nadali su bile u opsegu 415–435 K (Ashcroft i Mermin

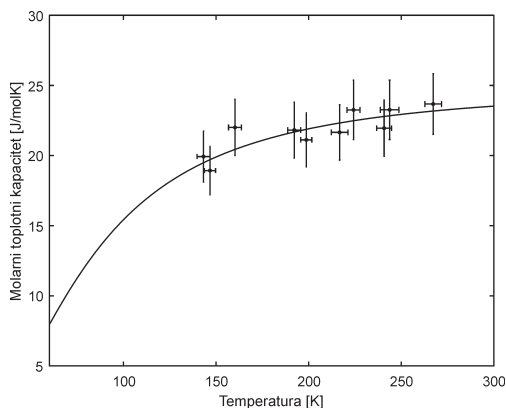
Tabela 2. Naponi na termoparu, mase azota koji je ispario i temperature različitih merenja

| N  | Bakar  |                |       |                | Aluminijum |                |       |                | Mesing |                |       |                |
|----|--------|----------------|-------|----------------|------------|----------------|-------|----------------|--------|----------------|-------|----------------|
|    | U [mV] | $\Delta m$ [g] | T [K] | $\Delta T$ [g] | U [mV]     | $\Delta m$ [g] | T [K] | $\Delta T$ [g] | U [mV] | $\Delta m$ [g] | T [K] | $\Delta T$ [g] |
| 1  | 4.7    | 6.8            | 131.7 | 3              | 4          | 4.4            | 151.9 | 3.5            | 4.3    | 3.2            | 143.2 | 3.5            |
| 2  | 4.4    | 9.1            | 141.2 | 3.5            | 3.6        | 5.5            | 165.4 | 2.5            | 4.2    | 3.2            | 146.7 | 3              |
| 3  | 4.2    | 9.4            | 147.2 | 3.5            | 3.5        | 5.3            | 168.4 | 4              | 3.8    | 4.1            | 160.2 | 3.5            |
| 4  | 3.8    | 11.6           | 162.2 | 4.5            | 3.3        | 6.6            | 174.9 | 3              | 2.8    | 5.3            | 192.2 | 5              |
| 5  | 3.5    | 13.5           | 170.2 | 3.5            | 3          | 6.4            | 184.9 | 4              | 2.6    | 5.4            | 198.7 | 3              |
| 6  | 2.8    | 16.3           | 197.7 | 3.5            | 2.7        | 7.4            | 194.4 | 3.5            | 2.1    | 6.2            | 216.7 | 4.5            |
| 7  | 2.4    | 20             | 207.2 | 3              | 2.1        | 8              | 215.4 | 2.5            | 1.9    | 6.9            | 224.2 | 4.5            |
| 8  | 1.9    | 21             | 224.2 | 4              | 2          | 10.2           | 218.9 | 2              | 1.4    | 7.2            | 240.7 | 3.5            |
| 9  | 1.7    | 20.7           | 231.2 | 3.5            | 1.6        | 10.5           | 233.4 | 3.5            | 1.3    | 7.7            | 243.7 | 3.5            |
| 10 | 1.6    | 22             | 234.7 | 3.5            | 1.5        | 9.5            | 235.9 | 3              | 0.7    | 8.8            | 267.2 | 4              |
| 11 | 1.4    | 26.1           | 242.2 | 3.5            | –          | –              | –     | –              | –      | –              | –     | –              |



Slika 5. Zavisnost molarnog toplotnog kapaciteta bakra od temperature (Debajev model)

Figure 5. Dependency of molar heat capacity of copper on temperature (Debye model)

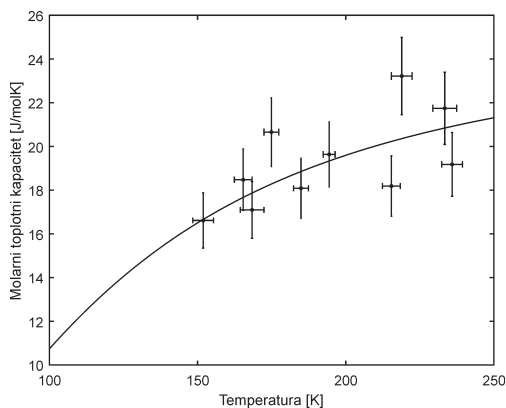


Slika 6. Zavisnost molarnog toplotnog kapaciteta mesinga od temperature (Debajev model)

Figure 6. Dependency of molar heat capacity of brass on temperature (Debye model)

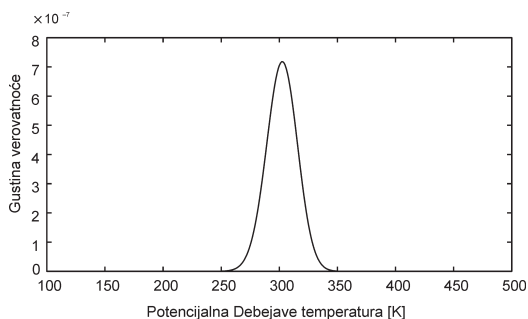
1988). Ovo nam pokazuje da je za aluminijum dobijen precizan rezultat. Što se tiče mesinga, zbog nepoznatog odnosa bakra i cinka u njemu, nije moguće utvrditi neku univerzalnu Debajevu temperaturu, jer postoje različite vrste mesinga.

Na osnovu Ajnštajnovog modela, korišćenjem formule (2), na isti način su izračunate Ajnštajnovne temperature i dobijeni odgovarajući grafici (slike 9 i 10).



Slika 7. Zavisnost molarnog toplotnog kapaciteta aluminijuma od temperature (Debajev model)

Figure 7. Dependency of molar heat capacity of aluminium on temperature (Debye model)



Slika 8. Bakar – aproksimacija gustine verovatnoće (Debajev model)

Figure 8. Copper – approximation of probability density (Debye model)

Slični grafici se dobijaju i za mesing i aluminijum. Iz grafika gustina verovatnoće, dobijene su sledeće Ajnštajnovne temperature:

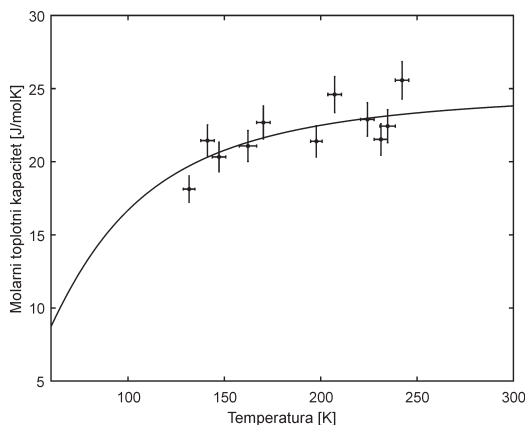
$$\theta_E (\text{Cu}) = 220 \pm 40 \text{ K}$$

$$\theta_E (\text{Al}) = 340 \pm 50 \text{ K}$$

$$\theta_E (\text{mesing}) = 250 \pm 40 \text{ K}$$

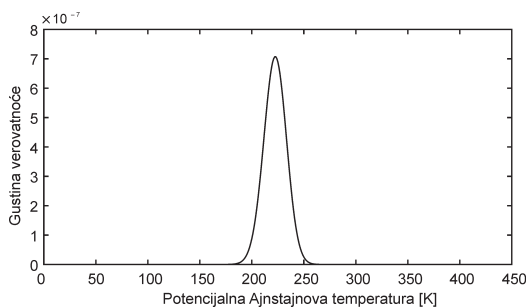
Očekivana Ajnštajnova temperatura za bakar nalazi se u opsegu 240–260 K. U radovima koji se bave Ajnštajnovim modelom, vrednost Ajnš-





Slika 9. Zavisnost molarnog toplotnog kapaciteta bakra od temperature (Ajnštajnov model)

Figure 9. Dependancy of molar heat capacity of copper on temperature (Einstein model)



Slika 10. Bakar – aproksimacija gustine verovatnoće (Ajnštajnov model)

Figure 10. Copper – approximation of probability density (Einstein model)

tajnovne temperature aluminijuma je u opsegu od 290 do 310 K. Isto što je važno za Debajevu temperaturu mesinga i njenu „neodređenu” vrednost važi i za Ajnštajnovu temperaturu.

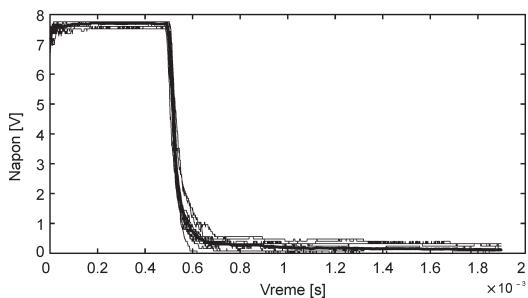
Može se primetiti da su rezultati zadovoljavajući. Pošto je metod neprecizan, greške se kreću i do 20%. Do toga je moglo doći zbog preciznosti voltmeta koji je korišćen (0.1 mV). Kada bi se koristio precizniji voltmetar, rezultati bi bili dosta precizniji. Drugi problem je bio u hlađenju metala. Pošto se nakon ubacivanja u posudu sa tečnim azotom temperatura metala povećavala jako brzo, nije bilo moguće da se

istog trenutka, na željenoj temperaturi metala izmeri molarni toplotni kapacitet. Predlažemo da se isti eksperiment izvrši sa preciznijim voltmetrom, i drugim načinom za hlađenje metala do niskih temperatura (~150 K). Takođe, temperatura bi mogla da se meri na precizniji način (recimo termometrom koji meri niske temperature).

## Brzina zvuka i Debajeva temperatura

Označimo konstantu kristalne rešetke sa  $a = N/V$ . Tablična vrednostove konstante za bakar je  $a_{Cu} = 361.49 \text{ pm}$  (Kittel 1970). Dužina korišćenog bakarnog štapa je  $l_{Cu} = 0.9 \text{ m}$ .

Izvršeno je deset merenja, na osnovu kojih je dobijen usrednjeni grafik zavisnosti napona od vremena (slika 11). Na ovom grafiku tanke linije predstavljaju pojedinačna merenja, dok deblja linija predstavlja usrednjenu vrednost svih 10 merenja.



Slika 11. Bakar – usrednjena zavisnost napona u vremenu (deblja linija)

Figure 11. Copper – mean dependency of voltage in time (thicker line)

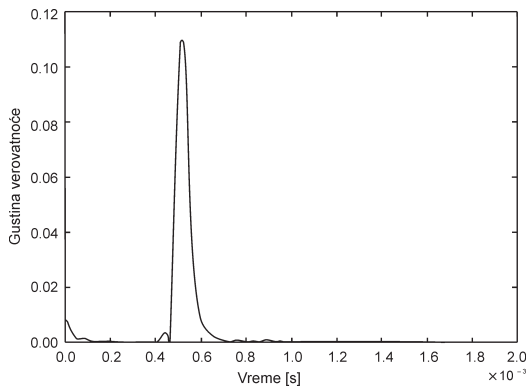
Iz ovog grafika je dobijena gustina verovatnoće vremena trajanja kontakta između čekića i metalnog štapa (slika 12). Vrh gausijana određuje trenutak kontakta čekića sa metalni štapom, a njena standardna devijacija grešku merenja:

$$\tau = (52 \pm 4) \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

Iz formule (5) dobijena je brzina prostiranja zvuka u bakru:

$$u_s = 3500 \pm 300 \text{ m/s}$$

Ubacivši ovu vrednost brzine u formulu (4) dobija se Debajeva temperatura bakra:



Slika 12. Gustina verovatnoće trajanja kontakta čekića i šipke

Figure 12. Probability density of duration of the contact between the hammer and the bar

$$\theta_D(\text{Cu}) = 285 \pm 26 \text{ K}$$

Kako je očekivana Debajeva temperatura bakra je u opsegu 325–345 K, dobijeni rezultat ne ulazi u taj opseg. Razlozi za to verovatno potiču od nečistoće korišćenog bakra, kao i zbog nepravilnosti realne kristalne rešetke, pošto teorijski model pretpostavlja idealnu rešetku.

Ovo je jako interesantan način računanja brzine zvuka, kao i Debajevu temperature metala, i bilo bi zanimljivo da se ovaj eksperiment izvrši i sa drugim vrstama metala.

## Zaključak

Dati eksperimenti koji mere toplotni kapacitet, kao i brzinu zvuka, pokazuju da je moguće indirektno meriti mikroskopske osobine materijala preko makroskopskih osobina kao što je molarni toplotni kapacitet i brzina zvuka, za šta je predložen lako ostvarljiv eksperiment. Metode daju zadovoljavajuće rezultate i poboljšavanjem mernih instrumenata (precizniji voltmetar, način hlađenja koji će uniformno da hladi materijal, termometar za niske temperature), mogli bi se dobiti još precizniji rezultati. Takođe, predložimo dalji rad sa drugim legurama, kako bi se možda mogla izvesti teorijska zavisnost za Debajevu i Ajnštajnovu temperature legura u zavisnosti od metala od kojih su sačinjene.

## Literatura

Ashcroft N., Mermin N. 1988. *Solid state physics*. Fort Worth: Saunders College

Blatt F. 1992. *Modern physics*. McGraw-Hill

Kittel C. 1970. *Uvod u fiziku čvrstog stanja*. Beograd: Savremena administracija

Mahmood W., Sabieh Anwar M., Zia W. 2011. Experimental determination of heat capacities and their correlation with theoretical predictions. *American Journal of Physics*, **79** (11): 1099.

Simeon V. 1980. *Termodinamika*. Zagreb: Školska knjiga

---

*Bogdan Raonić and Andrej Jakovljević*

## Experimental Testing of Einstein and Debye model

The purpose of this project was to determine Einstein and Debye temperature, the microscopic characteristics of some materials, with indirect, macroscopic methods. In this paper we covered two methods.

The first one covers nonlinearity of the dependence of heat capacity with the cooling of a metal to a given temperature. We bring the metal into contact with liquid nitrogen, and by measuring the amount of nitrogen that vaporized we can determine the heat capacity of that metal and compare it with the theoretical relation of Einstein or Debye temperature.

The second method uses the dependence of the speed of sound on microscopic characteristics of a material. The goal of the second experiment is to determine the speed of sound in a metal. This is done by measuring the duration of contact between a hammer and metal after producing a mechanical wave in the metal. The wave is sent back through the metal bar, it gives momentum to the hammer and suspends the contact.

The results of both methods are within predicted values (Ashcroft and Mermin 1988). This confirms that these methods can be used in measuring microscopic characteristics of materials. 