

---

Marko Šušnjar i Katarina Petrović

# Usporavanje svetlosti upotrebom elektromagnetno indukovane transparentije u višeslojnoj sfernoj kvantnoj tački kaskadne energetske konfiguracije

---

*U ovom radu je proučavano kako spoljašnji uslovi (pritisk i temperatura) utiču na pojavu elektromagnetno indukovane transparentije i na grupnu brzinu svetlosti u višeslojnoj sfernoj kvantnoj tački različitih dimenzija sa prisustvom primesa. Korišćena je zavisnost efektivne mase elektrona i energetske procepa od pritiska i temperature. Proučavani su sistemi sa tri i četiri energetska nivoa kaskadnog tipa i određivani indeks prelamanja i apsorpcije. Talasne funkcije i svojstvene vrednosti energija su određivani numerički, shooting metodom. Dobijeno je da je svetlost moguće usporiti do malih brzina, čime je postignut željeni efekat, ali i da se pri određenim frekvencijama lasera javlja superluminalno kretanje.*

---

## Uvod

Tokom poslednjih godina, posebnu pažnju je privukao fenomen usporavanja svetlosti do grupnih brzina značajno manjih od  $c$  (slow light effect) u okolnom medijumu. Iz Maksvelovih jednačina javlja se posledica da grupna brzina svetlosti zavisi od optičkih svojstava disperzivnog medijuma. Prvi put diskusija na ovu temu je pokrenuta početkom 20. veka, kada je izučavana i grupna brzina svetlosti viša od  $c$ . Arnold Sommerfeld i Leon Brillouin su bili jedni od prvih koji su se bavili pomenutim fenomenom i

pokazali da se informacija ne može prenositi brže od  $c$  (Brillouin 1960).

Metod koji je korišćen u našem radu za postizanje efekta spore svetlosti zasniva se na principu elektromagnetno indukovane transparentije (EIT). EIT predstavlja efekat destruktivne kvantne interferencije koji omogućava protok svetlosti u do tada netransparentnoj sredini (Fleischhauer *et al.* 2005). Dešava se pod uticajem dva laserska polja koja deluju na kvantni sistem koji se posmatra, pri čemu dolazi do promena u apsorpcionom spektru kao i u indeksu prelamanja sistema (slika 1). Nagla promena indeksa prelamanja u zavisnosti od frekvencije probnog lasera dovodi do naglog smanjenja grupne brzine svetlosti, stvarajući „slow light effect”.

Fenomen elektromagnetno indukovane transparentije se javlja u kvantnim tačkama. Kvantne tačke su jedna od interesantnijih tema kojima se bavi kvantna optika. Predstavljaju male čestice nastale preklapanjem poluprovodnika na nano nivou, čija optička i električna svojstva bitno odstupaju od sličnih svojstava poznatih makroskopskom svetu (El Moussaouy *et al.* 2014), što ih čini posebno zanimljivim. Neke od mnogih njihovih primena su, između ostalog, izrada tranzistora, LED ekrana, diodnih lasera i u kvantom računarstvu za izradu qbita.

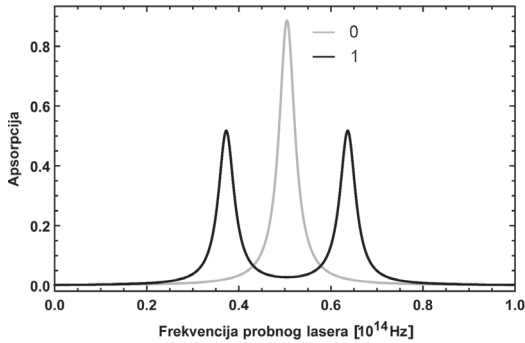
Kvantni sistem za koji smo se mi odlučili je višeslojna sferna kvantna tačka kaskadne energetske konfiguracije (Karimi *et al.* 2014) (slika 2). Rađen je numerički proračun za slučajeve sa tri i četiri energetska nivoa. Tokom proračuna su varirani spoljašnji uslovi (pritisk i temperatura u slojevima) kao i dimenzije kvantne tačke, na

---

*Marko Šušnjar (1998), Pančevo, Novoseljski put 58, učenik 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu*

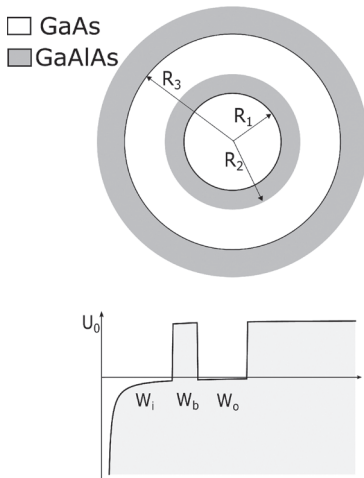
*Katarina Petrović (1998), Beograd, Stanoja Glavaša 30, 1998, učenica 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu*

*MENTOR: Vladan Pavlović, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Nišu*



Slika 1. Koeficijent apsorpcije u zavisnosti od frekvencije probnog lasera – kada je kontrolni laser isključen (0), sredina nije transparentna; kada je kontrolni laser uključen (1), umesto maksimalne apsorpcije javlja se popusnost sredine.

Figure 1. Absorption coefficient versus probe laser frequency – if the control laser is turned off (0), medium is not transparent; if the control laser is turned on (1), the transparency occurs instead of maximal absorption.



Slika 2. Šematski prikaz višeslojne sferne kvantne tačke i potencijala koji joj odgovara

Figure 2. Schematic representation of multi-layered spherical quantum dot and its potential

osnovu čega su dobijeni grafici zavisnosti realnog i imaginarnog dela susceptibilnosti, kao i grupe brzine od frekvencije probnog lasera. Dobijeni rezultati dobro se poklapaju sa radovima iz kvante optike (Mirzaei *et al.* 2014; Rezaei *et al.* 2014).

## Metod

### Višeslojna sferna kvantna tačka

Sistem koji proučavamo je sferna kvantna tačka sačinjena od više slojeva. Prvi sloj, širine  $W_i$ , napravljen je od GaAs, drugi sloj širine  $W_b$  od  $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$ , a treći širine  $W_o$  ponovo od GaAs. Ovde  $x$  predstavlja molarni udeo Al u smeši. Oko GaAs je opet sloj  $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$ .

Zbog razlike u materijalu, razlikuju se i efektivna masa elektrona, energetski procep i relativna dielektrična konstanta u zavisnosti od rastojanja od centra kvantne tačke:

$$m, U, \varepsilon(r) = \begin{cases} m_1, 0, \varepsilon_{r1}; & \text{za } r \leq R_1 \vee R_2 \leq r \leq R_3 \\ m_2, U_0, \varepsilon_{r2}; & \text{za } R_1 < r < R_2 \vee r > R_3 \end{cases}$$

gde je  $R_1 = W_i$ ,  $R_2 = W_i + W_b$ ,  $R_3 = W_i + W_b + W_o$ . Efektivna masa, energetski procep i relativna dielektrična konstanta takođe zavise i od pritiska i temperature:

$$m_1(p, T) = \frac{m_e}{1 + E_p \left( \frac{2}{E_g(p, T)} + \frac{1}{E_g(p, T) + \Delta_0} \right)}$$

gde je  $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$  kg masa elektrona, konstante  $E_p = 7.51$  eV i  $\Delta_0 = 0.341$  eV,  $E_g(p, T) = \left( 1519 + 126 \cdot 10^{-2} p - 377 \cdot 10^{-5} p^2 + \frac{5405 \cdot 10^{-4} T^2}{T + 204} \right)$  eV.

Pritisak izražavamo u kbar, a temperaturu u K. Energetski procep zavisi kao:

$$U_0 = 0.6 \cdot (1.555x + 0.37x^2 - 1.3 \cdot 10^{-3} xP - 1.11 \cdot 10^{-4} xT) \text{ eV}$$

Slično, određujemo i relativnu dielektričnu konstantu kao:

$$\varepsilon_r(r) = \begin{cases} 12.74 e^{-1.73 \cdot 10^{-3} p} e^{9.4 \cdot 10^{-5} (T - 75.6)}; & \text{za } T < 200 \text{ K} \\ 13.18 e^{-1.73 \cdot 10^{-3} p} e^{20.4 \cdot 10^{-5} (T - 300)}; & \text{za } T \geq 200 \text{ K} \end{cases}$$

Od pritiska zavise i dimenzije kvantne tačke  $W_{i,b,o}(p) = W_{i,b,o}(0) \cdot (1 - 1.9 \cdot 10^{-3} p)$ .

Efektivna masa i relativna dielektrična konstanta u sloju  $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$  zavise od koncentracije aluminijuma  $x$ :

$$m_2 = m_1 + 0.083 x m_e, \quad \varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1} - 3.12x.$$

Za ovaj sistem tražimo svojstvene vrednosti energije i odgovarajuće talasne funkcije rešavajući Šredingerovu jednačinu. Zbog sferne simetrije, talasna funkcija se može podeliti na radijalni deo i sferni harmonik:  $\psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) = R_{n,l}(r)Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ . Radijalni deo zavisi samo od  $n$  i  $l$ , a sferni harmonik od  $l$  i  $m$ , gde  $n$ ,  $l$  i  $m$  redom predstavljaju glavni, sporedni i magnetni kvantni broj. Onda Šredingerovu jednačinu zapisujemo u obliku:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial R(r)}{\partial r} - \\ & \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( U(r) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \right) \right) \cdot R(r) = \\ & = -\frac{2m}{\hbar^2} ER(r) \end{aligned}$$

Slučaj kada je  $Z = 1$  predstavlja prisustvo primesa u poluprovodniku modelovanih Kulo-novim potencijalom. Za  $Z = 0$ , nema primesa. U našem radu uzeto je  $Z = 1$ .

Prelazi kojima se mi bavimo ispunjavaju uslov  $\Delta l = \pm 1$  i  $\Delta m = \pm 1$ . Odgovarajući tranzicioni dipolni momenti po jediničnom naelektrisanju tih prelaza računaju se kao:

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \int \psi_i^*(x - iy)\psi_j dV = \\ &= \int_0^\infty R_i r^3 R_j dr \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_i^* Y_j \sin^2 \theta (\cos \varphi + i \sin \varphi) d\theta d\varphi \end{aligned}$$

U ovom radu je ispitivana zavisnost razlike energija susednih energetskih nivoa i dipolnih momenata odgovarajućih prelaza od spoljašnjih faktora i od dimenzija unutrašnjeg sloja kvantne tačke. Šredingerova jednačina je rešavana numerički shooting metodom (Taş i Şahin 2012), tako što je rastojanje od kvantne tačke podeljeno na jednake delove i, koristeći granične uslove, određeni svojstvena energija i talasna funkcija. Onda se dipolni momenti dobijaju kao:

$$\mu_{ij} = \sum R_i(r)r^3 R_j(r)hC$$

gde je  $h$  dužina jednog dela, a  $C$  vrednost integrala sfernih harmonika.

## Elektromagnetno indukovana transparentija

Svaki energetski nivo predstavlja određeno kvantno stanje elektrona u kvantnoj tački. U

slučaju kada posmatramo prva tri nivoa, to su stanja  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  i  $|3\rangle$  (osnovno, metastabilno i pobuđeno stanje). Postoje tri moguća prelaza, ali u zavisnosti od toga koji je prelaz između nivoa zabranjen, postoje tri vrste energetskih konfiguracija ovakvih nivoa. Kada je zabranjen prelaz  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ , to je  $\lambda$  konfiguracija, kada je zabranjen prelaz  $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$  V konfiguracija, a kada je zabranjen prelaz  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ , to je kaskadna konfiguracija (Sen *et al.* 2015).

U našem radu ispitivana je višeslojna sferna kvantna tačka kaskadnog energetskog tipa, što znači da su dozvoljeni prelazi  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  i  $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ . Nivoi između kojih je dozvoljen prelaz povezani su rezonantnim frekvencijama  $\omega_{12} = \frac{E_{12}}{\hbar}$  i  $\omega_{23} = \frac{E_{23}}{\hbar}$ , gde je  $E_{ij}$  razlika energija između nivoa  $i$  i  $j$ . Korišćena su dva lasera: probni, postavljen između prvog i drugog nivoa, i kontrolni, postavljen između drugog i trećeg nivoa. Frekvencija probnog lasera  $\omega_p$  se kontinualno menja dok frekvenciju kontrolnog lasera  $\omega_c$  držimo konstantnom. Frekvencije lasera su određene tako da budu bliske rezonantnim frekvencijama prelaza koji su dozvoljeni. Efekat EIT na kvantnoj tački dešava se usled laserskih polja  $E_p$  i  $E_c$ , koja su redom polja probnog i kontrolnog lasera.

Koeficijenti raspada drugog i trećeg energetskog nivoa na niže nivoe su obeleženi sa  $\gamma_{12}$  i  $\gamma_{23}$ . Tranzicioni dipolni momenti predstavljaju električne dipolne momente povezane sa prelazima između dva kvantna stanja i jednaki su 0 ukoliko je prelaz zabranjen. Koeficijenti raspada zavise od tranzicionih dipolnih momenata na sledeći način:  $\gamma_{ij} = \frac{e^2 \mu_{ij}^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} \omega_{ij}^3$ .

Kada posmatramo prva četiri energetska nivoa i kaskadnu konfiguraciju, dozvoljeni su prelazi  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ ,  $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$  i  $|3\rangle \rightarrow |4\rangle$ . Analogno se uvode frekvencije  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{23}$  i  $\omega_{34}$ , kao i koeficijenti raspada  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{23}$  i  $\gamma_{34}$ . Takođe uvodimo još jedan kontrolni laser između trećeg i četvrtog nivoa (Wang *et al.* 2004).

U ovom radu ispitivani su prelazi između nivoa  $1s_0$ ,  $2p_{-1}$  i  $3d_{-2}$ , odnosno  $1s_0$ ,  $2p_{-1}$ ,  $3d_{-2}$  i  $4f_{-3}$  u drugom slučaju. Izračunati tranzicioni dipolni momenti za svaku kombinaciju od dva nivoa pokazuju da se radi o kaskadnoj konfiguraciji. Nivoi više energije raspadaće se tačno na jedan

odgovarajući niži energetski nivo, što čini dovoljan razlog za izbor prethodno spomenutih nivoa.

## Blohove jednačine

Definišimo Rabijeve frekvencije kao

$$\Omega_p = \frac{E_p \mu_{12} e}{2\hbar} \text{ i } \Omega_C = \frac{E_C \mu_{23} e}{2\hbar}, \text{ a odstupanja frekvencija probnog i kontrolnog lasera od rezonantnih frekvencija kao } \Delta_p = \omega_{12} - \omega_p \text{ i } \Delta_C = \omega_{23} - \omega_C.$$

Analogno se uvodi i za drugi kontrolni laser kada proučavamo četiri energetska nivoa. Hamiltonijan koji odgovara celom sistemu kada posmatramo prva tri energetska nivoa možemo predstaviti kao:

$$H = -\hbar \begin{bmatrix} 0 & \Omega_p & 0 \\ \Omega_p & \Delta_p & \Omega_C \\ 0 & \Omega_C & \Omega_p + \Delta_C \end{bmatrix}$$

a za četiri nivoa:

$$H = -\hbar \begin{bmatrix} 0 & \Omega_p & 0 & 0 \\ \Omega_p & \Delta_p & \Omega_{C1} & 0 \\ 0 & \Omega_{C1} & \Delta_p + \Delta_{C1} & \Omega_{C2} \\ 0 & 0 & \Omega_{C2} & \Delta_p + \Delta_{C1} + \Delta_{C2} \end{bmatrix}.$$

Blohove jednačine dobijamo iz matrice gustina  $\rho$  koja se dobija iz jednačine:

$$\dot{\rho} = [H, \rho] + L_p$$

gde je  $[H, \rho] = H\rho - \rho H$ , a  $L_p$  član koji se dobija zbog koeficijentata raspada i određuje se, za  $n$  nivoa, kao:

$$L_p = \sum_{i,j, 1 \leq i < j \leq n} \frac{\gamma_{i,j}}{2} (2\sigma_{ij}\rho\sigma_{ji} - \sigma_{ji}\sigma_{ij}\rho - \rho\sigma_{ji}\sigma_{ij})$$

Ovde  $\sigma_{i,j}$  predstavlja matricu koju dobijamo kao proizvod vektora kolone koji na  $i$ -tom mestu ima 1, a na ostalim 0 i vektora vrste koji na  $j$ -om mestu ima 1, a na ostalim 0.

Za tri nivoa za kaskadnu konfiguraciju, uz uslov  $\gamma_{1,3} = 0$ , dobijamo sledećih devet jednačina:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= \gamma_{12}\rho_{22} - i(\rho_{12} - \rho_{21})\Omega_p \\ \dot{\rho}_{12} &= -\frac{1}{2}\gamma_{12}\rho_{12} - \\ &\quad - i(\Delta_p\rho_{12} + \rho_{13}\Omega_C + (\rho_{11} - \rho_{22})\Omega_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{13} &= -\frac{1}{2}\rho_{13}\gamma_{23} - \\ &\quad - i(\rho_{13}\Delta_C + \rho_{13}\Delta_p + \rho_{12}\Omega_C - \rho_{23}\Omega_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{21} &= -\frac{1}{2}\rho_{21}\gamma_{12} + \\ &\quad + i(\rho_{21}\Delta_p + \rho_{31}\Omega_C) + (\rho_{11} - \rho_{22})\Omega_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{22} &= -\rho_{22}\gamma_{12} + \rho_{33}\gamma_{23} + \\ &\quad + i((-\rho_{23} + \rho_{32})\Omega_C) + (\rho_{12} - \rho_{21})\Omega_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{23} &= -\frac{1}{2}\rho_{23}\gamma_{12} - \frac{1}{2}\rho_{23}\gamma_{23} + \\ &\quad + i(-\rho_{23}\Delta_C + (\rho_{33} - \rho_{22})\Omega_C + \rho_{13}\Omega_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{31} &= -\frac{1}{2}\rho_{31}\gamma_{23} + \\ &\quad + i(\rho_{31}\Delta_C + \rho_{31}\Delta_p - \rho_{21}\Omega_C - \rho_{32}\Omega_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{32} &= -\frac{1}{2}\rho_{32}\gamma_{12} - \frac{1}{2}\rho_{32}\gamma_{23} + \\ &\quad + i(\rho_{32}\Delta_C + (\rho_{22} - \rho_{33})\Omega_C + \rho_{31}\Omega_p) \end{aligned}$$

$$\dot{\rho}_{33} = -\rho_{33}\gamma_{23} + i(\rho_{23} - \rho_{32})\Omega_C$$

Elementi matrice  $\rho$  na dijagonali predstavljaju verovatnoću nalaženja elektrona na odgovarajućem energetskom nivou, pa važi:

$$\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} = 1.$$

Koristeći uslov da je u ravnotežnom stanju  $\dot{\rho} = 0$ , dobijamo rešenja ovog sistema.

Slično, za četiri energetska nivoa važi:

$$\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44} = 1$$

i za kaskadnu konfiguraciju  $\gamma_{13} = \gamma_{14} = \gamma_{24} = 0$ , pa dobijamo sledećih šesnaest jednačina iz matrice gustina:

$$\dot{\rho}_{11} = \gamma_{12}\rho_{22} - i(\rho_{12} - \rho_{21})\Omega_p$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{12} &= -\frac{1}{2}\gamma_{12}\rho_{12} - \\ &\quad - i(\Delta_p\rho_{12} + \rho_{13}\Omega_{C1} + (\rho_{11} - \rho_{22})\Omega_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{13} &= -\frac{1}{2}\gamma_{23}\rho_{13} - \\ &\quad - i(\Delta_{C1}\rho_{13} + \Delta_p\rho_{13} + \rho_{12}\Omega_{C1} + \rho_{14}\Omega_{C2} - \rho_{23}\Omega_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{14} &= -\frac{1}{2}\gamma_{34}\rho_{14} - \\ &\quad - i((\Delta_{C1} + \Delta_{C2} + \Delta_p)\rho_{14} + \rho_{13}\Omega_{C2} - \rho_{24}\Omega_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{21} &= -\frac{1}{2}\gamma_{12}\rho_{21} + \\ &\quad + i(\Delta_p\rho_{21} + \rho_{31}\Omega_{C1} + (\rho_{11} - \rho_{22})\Omega_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{22} &= -\gamma_{12}\rho_{22} + \gamma_{23}\rho_{33} + \\ &+ i(\rho_{32} - \rho_{23})\Omega_{C1} + (\rho_{12} - \rho_{21})\Omega_p) \\ \dot{\rho}_{23} &= -\frac{1}{2}\gamma_{12}\rho_{23} - \frac{1}{2}\gamma_{23}\rho_{23} - \\ &- i(\Delta_{C1}\rho_{23} + (\rho_{22} - \rho_{33})\Omega_{C1} + \rho_{24}\Omega_{C2} - \rho_{13}\Omega_p) \\ \dot{\rho}_{24} &= -\frac{1}{2}\gamma_{12}\rho_{24} - \frac{1}{2}\gamma_{34}\rho_{24} - \\ &- i((\Delta_{C1} + \Delta_{C2})\rho_{24} - \rho_{34}\Omega_{C1} + \rho_{23}\Omega_{C2} - \rho_{14}\Omega_p) \\ \dot{\rho}_{31} &= -\frac{1}{2}\gamma_{23}\rho_{31} + \\ &+ i(\Delta_{C1}\rho_{31} + \Delta_p\rho_{31} + \rho_{21}\Omega_{C1} + \rho_{41}\Omega_{C2} - \rho_{32}\Omega_p) \\ \dot{\rho}_{32} &= -\frac{1}{2}\gamma_{12}\rho_{32} - \frac{1}{2}\gamma_{23}\rho_{32} + \\ &+ i(\rho_{32}\Omega_{C1} + (\rho_{22} - \rho_{33})\Omega_{C1} + \rho_{42}\Omega_{C2} - \rho_{31}\Omega_p) \\ \dot{\rho}_{33} &= -\gamma_{23}\rho_{33} + \gamma_{34}\rho_{44} + \\ &+ i(\rho_{23} - \rho_{32})\Omega_{C1} + (\rho_{43} - \rho_{34})\Omega_{C2}) \\ \dot{\rho}_{34} &= -\frac{1}{2}\gamma_{23}\rho_{34} - \frac{1}{2}\gamma_{34}\rho_{34} - \\ &- i(\Delta_{C2}\rho_{34} - \rho_{24}\Omega_{C1} + (\rho_{33} - \rho_{44})\Omega_{C2}) \\ \dot{\rho}_{41} &= -\frac{1}{2}\gamma_{34}\rho_{41} + \\ &+ i((\Delta_{C1} + \Delta_{C2} + \Delta_p)\rho_{41} + \rho_{31}\Omega_{C2} - \rho_{42}\Omega_p) \\ \dot{\rho}_{42} &= -\frac{1}{2}\gamma_{12}\rho_{42} - \frac{1}{2}\gamma_{34}\rho_{42} + \\ &+ i((\Delta_{C1} + \Delta_{C2})\rho_{42} - \rho_{43}\Omega_{C1} + \rho_{32}\Omega_{C2} - \rho_{41}\Omega_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{43} &= -\frac{1}{2}\gamma_{23}\rho_{43} - \frac{1}{2}\gamma_{34}\rho_{43} + \\ &+ i(\Delta_{C2}\rho_{43} - \rho_{42}\Omega_{C1} + (\rho_{33} - \rho_{44})\Omega_{C2}) \\ \dot{\rho}_{44} &= -\gamma_{34}\rho_{44} + i(\rho_{34} - \rho_{43})\Omega_{C2} \end{aligned}$$

Do rešenja opet dolazimo iz uslova da je u stacionarnom stanju  $\dot{\rho} = 0$ .

Koristeći uslov:

$$\chi = \frac{2\rho_{12}\mu_{12}N}{\epsilon_0 E_p},$$

gde  $N$  predstavlja gustinu sistema, dobijamo realni i imaginarni deo susceptibilnosti:

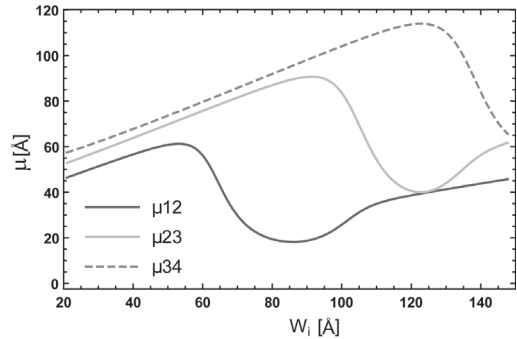
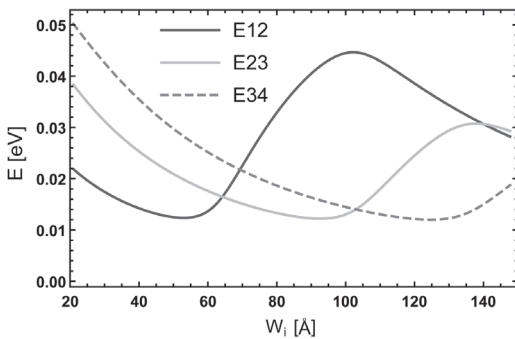
$$\text{Re } \chi = \frac{2\mu_{12}N}{\epsilon_0 E_p} \text{Re } \rho_{12} \text{ i } \text{Im } \chi = \frac{2\mu_{12}N}{\epsilon_0 E_p} \text{Im } \rho_{12}$$

Realni deo susceptibilnosti se koristi u izračunavanju indeksa prelamanja kroz medijum, dok je imaginarni deo srazmeran apsorpciji.

Indeks prelamanja od susceptibilnosti zavisi po formuli  $n = 1 + \frac{1}{2} \text{Re } \chi$ , a grupna brzina od indeksa prelamanja po formuli:

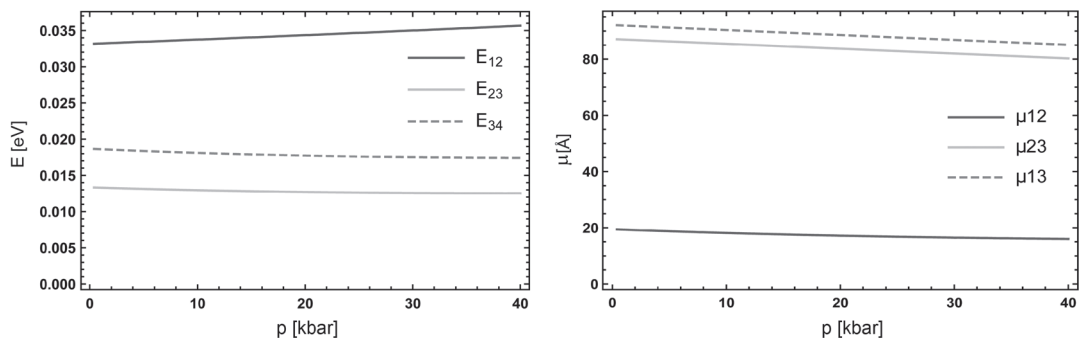
$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn(\omega)}{d\omega}}$$

Primetimo da za nagle promene indeksa prelamanja u zavisnosti od frekvencije, prvi izvod uzima veliku vrednost i grupna brzina može biti značajno manja od  $c$ . To je poznato kao „slow light effect”.



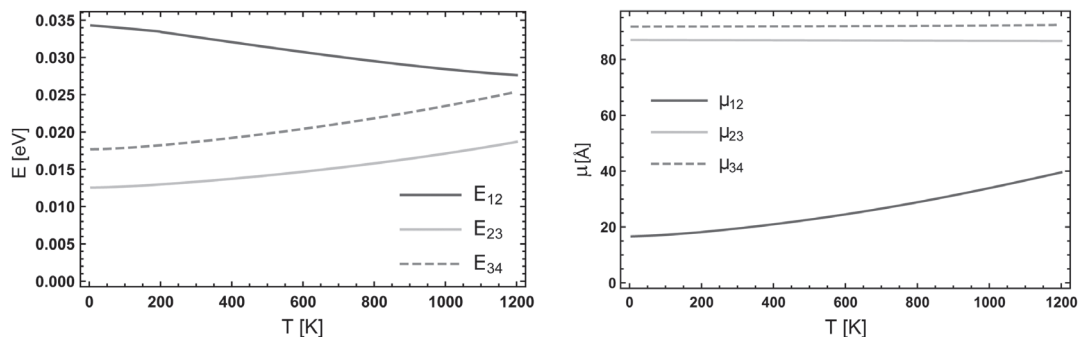
Slika 3. Grafici zavisnosti razlika energija susjednih energetskih nivoa i tranzicionih dipolnih momenata od širine unutrašnjeg sloja  $W_i$  pri konstantnim  $W_b = 3$  nm i  $W_o = 6$  nm za  $p = 1$  kbar i  $T = 300$  K

Figure 3. Graphs of energy differences of adjacent energy levels and transition dipole moment versus inner layer width  $W_i$  with constant  $W_b = 3$  nm and  $W_o = 6$  nm for  $p = 1$  kbar and  $T = 300$  K



Slika 4. Grafici zavisnosti razlika energija susjednih energetskih nivoa i tranzicionih dipolnih momenata od pritiska pri konstantnim  $W_i = 8$  nm,  $W_b = 3$  nm,  $W_o = 6$  nm za  $T = 300$  K

Figure 4. Graphs of energy differences of adjacent energy levels and transition dipole moment versus pressure with constant  $W_i = 8$  nm,  $W_b = 3$  nm and  $W_o = 6$  nm and for  $T = 300$  K



Slika 5. Grafici zavisnosti razlika energija susjednih energetskih nivoa i tranzicionih dipolnih momenata od temperature pri konstantnim  $W_i = 8$  nm,  $W_b = 3$  nm,  $W_o = 6$  nm za  $p = 1$  kbar

Figure 5. Graphs of energy differences of adjacent energy levels and transition dipole moment versus temperature with constant  $W_i = 8$  nm,  $W_b = 3$  nm and  $W_o = 6$  nm and for  $p = 1$  kbar

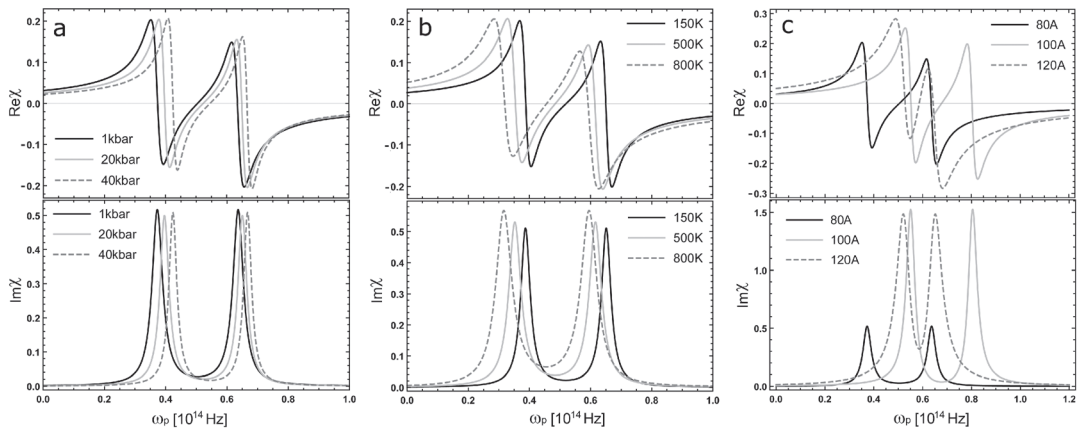
## Rezultati i diskusija

U ovom radu ispitivana je višeslojna sferna kvantna tačka za slučaj tri i četiri energetska nivoa. Ispitivana je zavisnost grupe brzine svjetlosti od frekvencije probnog lasera kao i od odgovarajućih spoljašnjih uslova. U svim proračunima korišćeni su parametri za koncentraciju aluminijuma  $x = 0.3$  i za širine kvantne tačke  $W_b = 3$  nm i  $W_o = 6$  nm.

Određene su razlike energija susjednih energetskih nivoa i odgovarajućih dipolnih momenata u zavisnosti od širine unutrašnjeg sloja GaAs i u zavisnosti od pritiska i temperature. Na

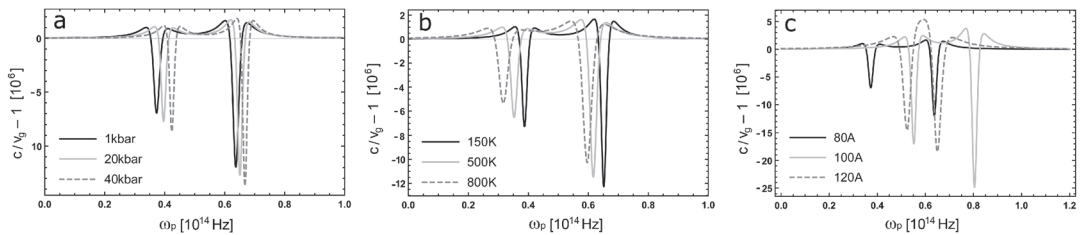
slici 3 prikazana je zavisnost ovih veličina od  $W_i$  pri konstantnim širinama slojeva  $W_b$  i  $W_o$  i pri pritisku  $p = 1$  kbar i temperaturi  $T = 300$  K. Primetimo da zavisnosti nisu monotone i da većim vrednostima razlike energija odgovara manji dipolni moment (tada je manje verovatan prelaz) i obrnuto.

Na slikama 4 i 5 prikazane su dobijene zavisnosti energija i dipolnih momenata prelaza između susjednih nivoa pri konstantnom  $W_i = 80$  Å. A od različitih spoljašnjih uslova. Dobijene zavisnosti pokazuju da razlika energija opada sa povećanjem pritiska, dok ista raste sa povećanjem temperature u kvantnoj tački, osim za



Slika 6. Grafici zavisnosti realnog i imaginarnog dela susceptibilnosti u arbitrarnim jedinicama od frekvencije probnog lasera za tri energetska nivoa za različite vrednosti a) pritiska, b) temperature i c) širine  $W_i$

Figure 6. Graphs of the real and imaginary part of susceptibility in arbitrary units versus probe laser frequency for three-level system and different values of a) pressure, b) temperature and c) width  $W_i$



Slika 7. Grafici zavisnosti grupnog indeksa brzine svetlosti od frekvencije probnog lasera za tri energetska nivoa za različite vrednosti a) pritiska, b) temperature i c) širine  $W_i$

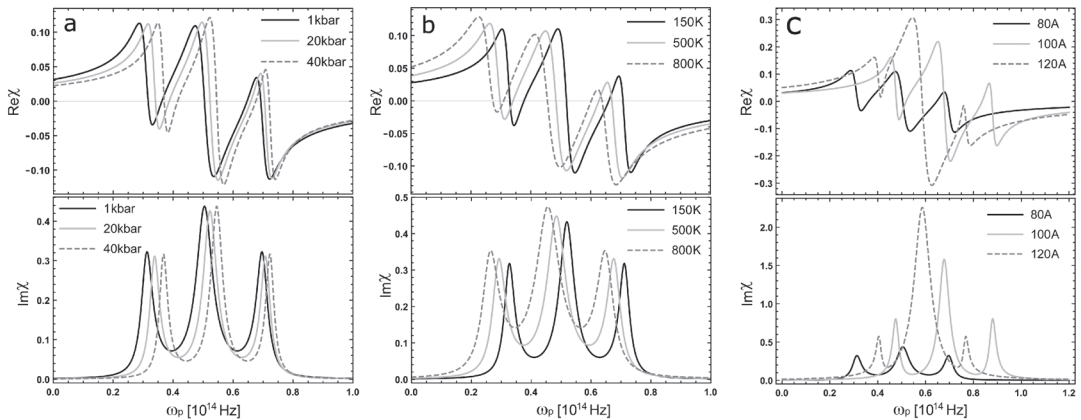
Figure 7. Graphs of the speed of light group index versus probe laser frequency for three-level system and different values of a) pressure, b) temperature and c) width  $W_i$

prva dva energetska nivoa, gde je uticaj primesa veći. Dipolni momenti se smanjuju sa pritiskom, dok se sa temperaturom samo neznatno menjaju, sa izuzetkom  $\mu_{12}$  koji se povećava. Glavni uzrok za monotonu promenu ovih veličina je zavisnost efektivne mase i energetskog procepa od pritiska i temperature.

Dobijeni rezultati se koriste za određivanje rezonantnih frekvencija, Rabijevih frekvencija i koeficijena raspada. Za kontrolni laser uzimamo da je odstupanje od rezonantne frekvencije  $\Delta c = 0$ . Jačine polja probnog i kontrolnog lasera

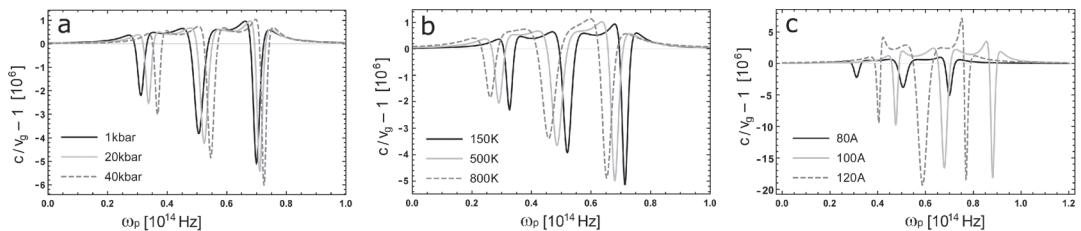
držimo konstantnim:  $E_p = 10^6$  V/m i  $E_c = 2 \cdot 10^6$  V/m.

Na slici 6 prikazane su redom zavisnosti realnog i imaginarnog dela susceptibilnosti u arbitrarnim jedinicama za tri energetska nivoa od frekvencije probnog lasera za različite vrednosti pritiska, temperature i širine  $W_i$ . Maksimumi na grafiku imaginarnog dela predstavljaju frekvencije probnog lasera za koje je apsorpcija svetlosti najveća, a postoje vrednosti frekvencije kada dolazi do transparentije medijuma. U određenim oblastima grafika realnog dela može se



Slika 8. Grafici zavisnosti realnog i imaginarnog dela susceptibilnosti u arbitrarnim jedinicama od frekvencije probnog lasera za četiri energetska nivoa za različite vrednosti a) pritiska, b) temperature i c) širine  $W_i$

Figure 8. Graphs of the real and imaginary part of susceptibility in arbitrary units versus probe laser frequency for four-level system and different values of a) pressure, b) temperature and c) width  $W_i$



Slika 9. Grafici zavisnosti grupnog indeksa brzine svetlosti od frekvencije probnog lasera za četiri energetska nivoa za različite vrednosti a) pritiska, b) temperature i c) širine  $W_i$

Figure 9. Graphs of the speed of light group index versus probe laser frequency for four-level system and different values of a) pressure, b) temperature and c) width  $W_i$

primetiti da funkcija naglo raste, odnosno da je prvi izvod veliki. Tada grupna brzina svetlosti naglo opada, kao što je prikazano na graficima zavisnosti grupnog indeksa  $n_g = \frac{c}{v_g} - 1$  brzine

svetlosti od frekvencije, za različite vrednosti pritiska, temperature i širine  $W_i$  (slika 7). Za parametar  $N$  uzeli smo  $10^{10}$ .

Sa druge strane, možemo primetiti da postoje frekvencije probnog lasera za koje je grupni indeks manji od nule. Tada je grupna brzina veća od  $c$  ili čak negativna. Međutim, ovo ipak nije u neskladu sa specijalnom teorijom relativnosti. Talas predstavlja matematičku interpretaciju

prenosa energije kroz elastičnu sredinu, pa samim tim postoji više različitih brzina talasa, u zavisnosti od definicije. Pored grupne, postoji i signalna brzina koja predstavlja brzinu prenosa informacije i energije kroz medijum i koja je uvek manja od  $c$ . U slučaju kada je grupna brzina veća od  $c$ , nije jednaka signalnoj brzini, pa ne predstavlja brzinu prenosa informacije (Wang *et al.* 2000).

Primitimo da je sa povećanjem pritiska efekat više izražen, odnosno da je manji koeficijent apsorpcije i veće usporenje svetlosti na odgovarajućoj frekvenciji probnog lasera. Takođe, sa povećanjem temperature je efekat manje izražen,



ali u oba slučaja promene nisu veoma velike. Sa druge strane, za različite dimenzije kvantne tačke  $W_i$  dobijaju se značajno različiti rezultati. Uzrok za ovakvo ponašanje sistema je zavisnost energija i dipolnih momenata, a samim tim i Rabijevih frekvencija od spoljašnjih faktora. Promena sa pritiskom i temperaturom je monotona, dok je zavisnost od dimenzija kvantne tačke mnogo složenija i izraženija.

Isti postupak je ponovljen i za slučaj kaskadne konfiguracije sa četiri energetska nivoa. Na slici 8 prikazana je zavisnost realnog i imaginarnog dela susceptibilnosti za različite spoljašnje uslove, a na slici 9 zavisnost grupnog indeksa svetlosti. Možemo da primetimo da je dobijen sličan oblik grafika kao i za tri nivoa, ali sada postoje po jedan lokalni maksimum i minimum više na graficima realnog i imaginarnog dela, kao i na grafiku grupnog indeksa. Uzrok za to je postojanje jedne rezonantne frekvencije probnog lasera više nego u prethodnom slučaju.

Zavisnost susceptibilnosti u sistemu od četiri nivoa od spoljašnjih faktora je slična kao i u sistemu od tri nivoa. Ipak, primetimo da se u njemu dobijaju manje grupne brzine svetlosti, odnosno veći grupni indeksi, za iste spoljašnje parametre. Dakle, usporenje svetlosti i sam efekat su više izraženi u ovom slučaju.

## Zaključak

U ovom radu ispitivan je efekat spore svetlosti koji se dešava u određenim kvantnim sistemima. Posmatrani su slučajevi sa tri i četiri energetska nivoa kaskadne konfiguracije. Našim radom pokazano je da se data pojava dešava u sistemu višeslojne sferne kvantne tačke i ispitivana je njena izraženost u zavisnosti od različitih parametara. Izračunate su svojstvene energije i talasne funkcije datog sistema i iz Blohiovih jednačina dobijeno je kako grupna brzina svetlosti zavisi od frekvencija probnog lasera, dimenzija kvantne tačke, kao i spoljašnjih uticaja – temperature i pritiska. Do rešenja jednačina smo dolazili numerički, koristeći shooting metod, a naš rad i način rešavanja se lako može prilagoditi drugim konfiguracijama ili sistemima sa drugačijim energetskim procepom.

Dobijeni rezultati pokazali su da se ponašanje sistema menja sa promenom svih spoljašnjih

faktora, ali je najosetljiviji na promene dimenzija kvantne tačke. Pokazano je da se svetlost u kvantnim tačkama može usporiti do veoma malih brzina. Postojanje ovog efekta i mogućnost kontrolisanja elektromagnetno indukovane transparentije u kvantnim tačkama menjanjem temperature i hidrostatičkog pritiska čine ove sisteme superiornim u odnosu na atomske.

**Zahvalnost.** Zahvaljujemo se svom mentoru, Vladanu Pavloviću, na velikoj pomoći tokom izrade ovog projekta, na svim objašnjenjima prilikom upoznavanja novih oblasti, na izuzetno korisnoj literaturi i na pomoći prilikom rešavanja svih problema na koje smo nailazili.

## Literatura

Brillouin L. 1960. *Wave propagation and group velocity*. Academic Press

Fleischhauer M., Imamoglu A., Marangos J. P. 2005. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. *Reviews of modern physics*, **77** (2): 633.

El Moussaouy A., Ouchani N., El Hassouani Y., Benami A. 2014. Bound polaron states in GaAs/Ga<sub>1-x</sub>Al<sub>x</sub>As cylindrical quantum dot under hydrostatic pressure effect. *Surface science*, **624**: 95.

Karimi M. J., Rezaei G., Nazari M. 2014. Linear and nonlinear optical properties of multilayered spherical quantum dots: Effects of geometrical size, hydrogenic impurity, hydrostatic pressure and temperature. *Journal of luminescence*, **145**: 55.

Mirzaei M., Askari H. R., Raki Z. 2014. Group velocity of light in V and K-types cylindrical quantum dots with electromagnetically induced transparency. *Superlattices and microstructures*, **74**: 61.

Rezaei G., Shojaeian Kish S., Vaseghi B., Taghizadeh S. F. 2014. Electromagnetically induced transparency in a two-dimensional quantum dot: Effects of impurity, external fields, hydrostatic pressure and temperature. *Physica E*, **62**: 104.

Sen S., Dey T. K., Nath M. R., Gangopadhyay G. 2015. Comparison of Electromagnetically Induced Transparency in lambda, cascade and vee three-level systems. *Journal of modern optics*, **62** (3): 166-174.

Taş H., Şahin M. 2012. The electronic properties of a core/shell/well/shell spherical quantum dot with and

without a hydrogenic impurity. *Journal of applied physics*, **111**: 083702.

Wang L. J., Kong L. B., Tu X. H., Jiang K. J., Li K., Xiong H. W., Zhu Y., Zhan M. S. 2004.

Electromagnetically induced transparency in multi-level cascade scheme of cold rubidium atoms. *Physics Letters A*, **328**: 437.

Wang L. J., Kuzmich A., Dogariu A. 2000.  
Gain-assisted superluminal light propagation. *Nature*, **406**: 277.

---

*Marko Šušnjar and Katarina Petrović*

## Slowing Light Using Electromagnetically Induced Transparency in a Ledder-Type Multilayered Spherical Quantum Dot

This paper studied how external conditions affect the optical properties of a multilayered spherical quantum dot (MSQD) and the occurrence of electromagnetic induced transparency (EIT). It is demonstrated that the absorption and dispersion of quantum systems in three-level and

four-level configurations can be controlled by changing the dimension of barriers and wells, and by changing pressure and temperature. Our quantum system consisted of a MSQD and two laser beams which were necessary for the EIT phenomena to occur. We used the dependence of the effective mass of electrons and energy gap on the pressure and temperature. Energy eigenvalues and wavefunctions were calculated using the shooting method and optical properties were obtained using the density matrix formalism and master equations. Our results showed that it is possible to make specific material transparent to light. Increasing the hydrostatic pressure and temperature lead to monotonic changes in energy eigenvalues and dipole moment matrix elements, while changes in widths of barrier and wells lead to non-monotonic changes. As a result of increasing the hydrostatic pressure (temperature), the peaks of the optical properties experience a blue-shift (red-shift). By changing the widths of barrier and wells, we find that it is possible to obtain EIT, efficient EIT, or that EIT window disappears for a range of parameters. From our results we additionally found the group velocity of light going through MSQD. We showed that the light can be slowed down to a low speed as well as that at specific laser frequencies superluminal motion occurs. 