

Van der Pauwov metod na uzorku sa izolovanom rupom

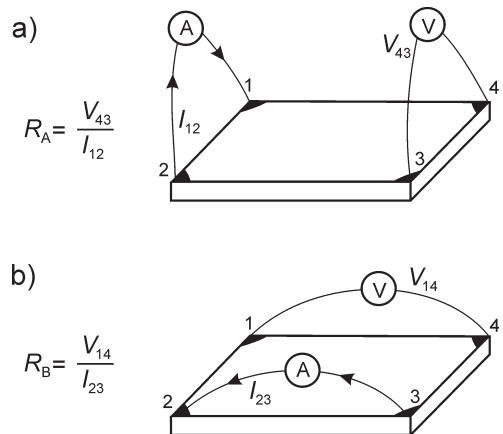
Van der Pauwov metod se koristi za izračunavanje otpora i Holovog koeficijenta dvodimenzionalnog čvrstog metalnog homogenog uzorka proizvoljnog oblika. Međutim, ukoliko uzorak sadrži izolovanu rupu, tada se na njega može primeniti modifikovani Van der Pauwov metod kako bi se utvrdilo postojanje te rupe. U ovom radu proučavano je kolika je najmanja veličina rupe koja može biti detektovana na ovaj način. Dobijeni rezultati pokazuju da najmanja kružna rupa koja može biti detektovana zauzima 0.56% od ukupne površine uzorka, a rupe koje imaju oblik pukotine mogu biti detektovane ako zauzimaju više od 0.05% površine. Zaključeno je da veličina rupe koja može biti detektovana zavisi od njenog oblika, pa samim tim i vrednost dobijena za uzorak sa pukotinom nije ista za sve pukotine, zavisi od njenog oblika, odnosno širine i dužine. Ovakav modifikovan metod može se koristiti za brzo i efikasno detektovanje defekata u materijalu.

Uvod

Van der Pauwov (VdP) metod primenjuje se na tanke uzorke koji su homogeni i bez izolovanih rupa kako bi se odredili Holov koeficijent i specifična otpornost materijala (Van der Pauw 1958). Ovaj metod određen je Van der Pauw jednačinom (2).

Klasičan Omov zakon izražava otpor preko struje i napona i dat je formulom:

$$R = UI \quad (1)$$



Slika 1. Ilustracija Van der Pauwovog metoda. Prikazan je metalni uzorak kvadratnog oblika, na njemu je merena struja između tačaka 1 i 2 na jednoj ivici uzorka i napon na suprotnoj ivici između tačaka 3 i 4 (a). Zatim je uzorak rotiran za 90° i merena je struja između tačaka 2 i 3, kao i napon između tačaka 1 i 4 (b).

Figure 1. Illustration of Van der Pauw method. A metallic sample of the square shape is shown, on which the current is measured between points 1 and 2 on one edge of the sample and the voltage on the opposite edge between points 3 and 4 (a). Then the sample was rotated by 90° and the current between points 2 and 3 was measured, as well as the voltage between points 1 and 4 (b).

Za tačno određene tačke, pomoću Omovog zakona meri se otpor, kao na slici 1, a zatim se iz VdP jednačine:

$$v = 1 = \exp\left(-\frac{R_{12,34}}{R}\right) + \exp\left(-\frac{R_{23,14}}{R}\right) \quad (2)$$

gde su $R_{12,34}$ i $R_{23,14}$ mereni otpori u tačkama 1, 2, 3 i 4 izračunava R, specifični otpor materijala.

Milica Božanić (1999), Šabac, Sremska 7b/1, učenica 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

Kristina Nikolić (1999), Požarevac, Stevana Sremca 14, učenica 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

MENTOR: Stefan Badža, University of Cambridge, Ujedinjeno Kraljevstvo

Međutim, ova relacija, kao i metod, važi samo za čvrst i uzorak bez izolovane rupe. Ako se na uzorku nalazi izolovana rupa onda se vrednost v smanjuje, odnosno manja je ili jednaka 1 (Szymański *et al.* 2013). Ovakav VdP koeficijent (v) može se takođe računati po formuli (2), gde se R računa kao:

$$R = \frac{\rho}{\pi d}$$

gde je ρ specifični otpor uzorka, a d debljina uzorka.

Klasičan VdP metod ima veliku primenu u radu sa tankim metalnim uzorcima (debljina je zanemarljiva u odnosu na dužinu i širinu), pre svega zbog mogućnosti da se primeni na uzorke proizvoljnog oblika, dokle god zadovoljavaju ostale neophodne navedene uslove. Na brz i efikasan način mogu se odrediti važne karakteristike materijala poput specifične otpornosti i Holovog koeficijenta. Ukoliko bi se metod primenjivao na uzorcima sa potencijalnim oštećenjem u vidu izolovane rupe, moglo bi se lako zaključiti da li je rupa postojana i ako jeste, koliko utiče na kvalitet uzorka, što bi olakšalo rad sa ovim uzorcima.

Rupa može imati manji ili veći uticaj na protok struje kroz uzorak u zavisnosti od oblika i veličine. U ovom radu je posmatrana promena VdP koeficijenta v za rupe oblika kvadrata, kruga i pukotine različitih veličina i razmatrano je da li se ovim putem može utvrditi njihovo postojanje na uzorku. Takođe su određeni uslovi za detekciju rupe.

Metod

Simulacija

Kako bi se odredile dimenzije uzorka na kome su vršena merenja, u programskom jeziku MatLab simuliran je metod izračunavanja VdP koeficijenta. Uzorak je implementiran kao crno-bela slika gde je rupa na uzorku obojena belom bojom, a materijal crnom. Zatim je slika predstavljena kao matrica čije svako polje predstavlja mali deo površine uzorka. Simuliran je protok struje kroz uzorak. Određivanje potencijala u svakoj tački uzorka rađeno je metodom potencijala čvorova (Pokorni 2015). Ovaj metod

se koristi kod električnih kola sa velikim brojem čvorova i služi za određivanje napona između dva čvora u kolu. Jedan čvor u kolu se postavi za referentni (čvor na kome je potencijal jednak nuli), a za ostale čvorove se piše sistem od $n_\xi - 1$ jednačina sa $n_\xi - 1$ nepoznatih, gde je n_ξ broj čvorova u tom kolu. Koristeći I Kirhofovo pravilo izvodi se sistem jednačina:

$$\begin{aligned} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + G_{13}V_3 + \dots + G_{1n}V_n &= I_{\xi_1} \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 + \dots + G_{2n}V_n &= I_{\xi_2} \\ \vdots & \\ G_{n1}V_1 + G_{n2}V_2 + G_{n3}V_3 + \dots + G_{nm}V_n &= I_{\xi_n} \end{aligned}$$

gde su:

V_j – potencijal čvora j , $j = 1, 2, \dots, n$,

G_{jj} – zbir provodnosti svih grana koje izlaze iz čvora j ,

$G_{jk} = G_{kj}$ ($j \neq k$) – zbir provodnosti svih grana koje direktno spajaju čvorove j i k , $k = 1, 2, \dots, n$, uzet sa negativnim predznakom,

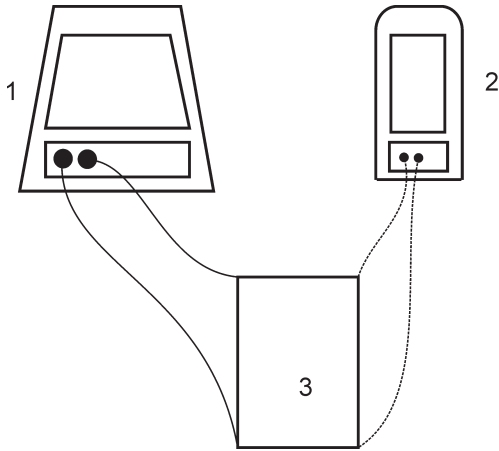
I_{ξ_j} – suma struja strujnih generatora koji se sastaju u čvoru j (sa pozitivnim predznakom ako je referentni smer struje usmeren ka čvoru, u suprotnom sa negativnim predznakom), plus suma napona naponskih generatora (čije se grane sastaju u čvoru j) podeljenih sa otpornošću redno vezanom za te generatore (sa pozitivnim predznakom ako je „+” u referentnom smeru naponskog generatora usmeren ka čvoru, a u suprotnom sa negativnim predznakom).

Iz ovako dobijenog sistema jednačina može se izračunati potencijal na svakom od čvorova kola. Metod je primenjen u simulaciji tako što je metalni uzorak predstavljen kao matrica, a svako polje matrice predstavlja jedan čvor u kolu. Simuliran je protok struje kroz uzorak, a otpor na svakoj grani kola je jednak količniku debljine uzorka (d) i specifične otpornosti uzorka (ρ).

Tako je dobijen napon na drugoj ivici uzorka, dok su jačina struje, specifična otpornost uzorka i njegova debljina zadati parametri koji se mogu varirati. Rezultati simulacije su kasnije upoređeni sa rezultatima eksperimenta.

Eksperiment

Na slici 2 prikazana je aparatura korišćena u eksperimentu. Delovi aparature su voltmetar korišćen za merenje napona na uzorku i izvor električne struje koja je puštena kroz uzorak.

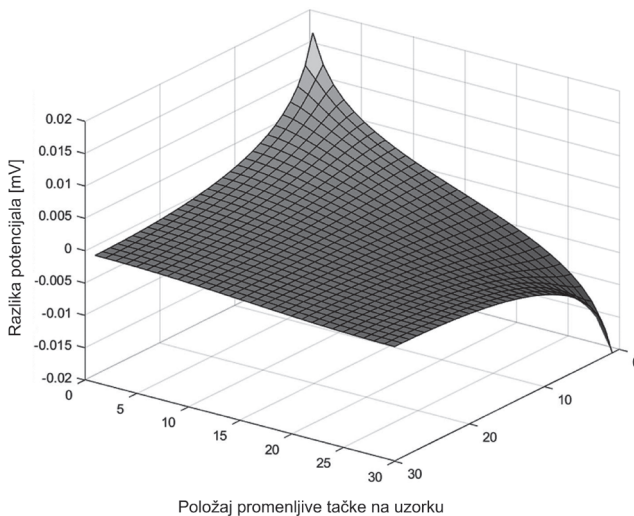


Slika 2. Aparatura korišćena prilikom vršenja eksperimenta: 1 – voltmetar, 2 – izvor električne struje, 3 – metalni uzorak

Figure 2. Apparatus used during the experiment: 1 – voltmeter, 2 – source of electric current, 3 – metal sample

Merenja su vršena na aluminijumskoj foliji kvadratnog oblika. Na početku vršeno je merenje na uzorku bez izolovane rupe da bi se odredila vrednost specifične otpornosti aluminijumske folije. Merenje je vršeno klasičnim VdP metodom, a specifična otpornost uzorka ρ dobijena je iz formule:

$$\rho = \frac{V\pi d}{I \ln 2} \quad (3)$$



Slika 3. 3D prikaz pada napona kroz uzorak

Figure 3. 3D display of voltage drop across the sample

gde je V napon na ivici uzorka, I jačina električne struje na ivici uzorka naspram one na kojoj je meren napon, a d debljina uzorka.

Zatim su merenja vršena na uzorcima sa izolovanim rupom kružnog oblika. Rupe su pravljene u više veličina. Uzorak je meren u dva položaja kao i u klasičnom VdP metodu. Na jednoj ivici uzorka dovedena je struja konstantne vrednosti I , a na drugoj ivici je meren napon U_1 . Zatim je uzorak okrenut za 90° , postupak je ponovljen i dobijen napon U_2 . Iz formule (1) izračunati su otpori R_1 i R_2 , a iz formule (2) dobijen je VdP koeficijent. Zatim su identična merenja vršena na uzorku sa rupom u vidu pukotine različitih dužina i debljina.

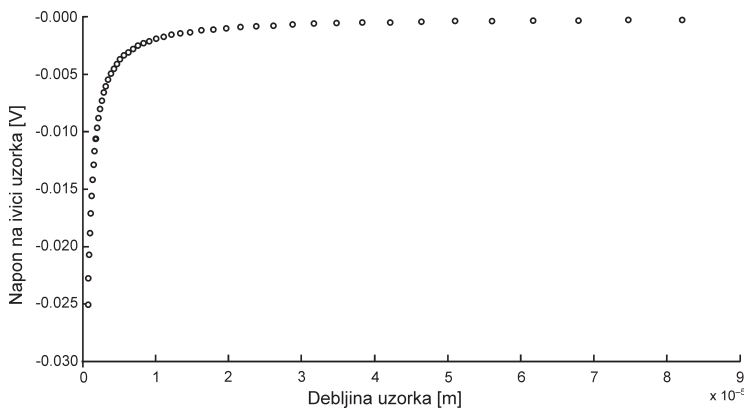
Uzorci istih karakteristika implementirani su kao slika u simulaciju i upoređeni su dobijeni rezultati.

Rezultati

Simulacija

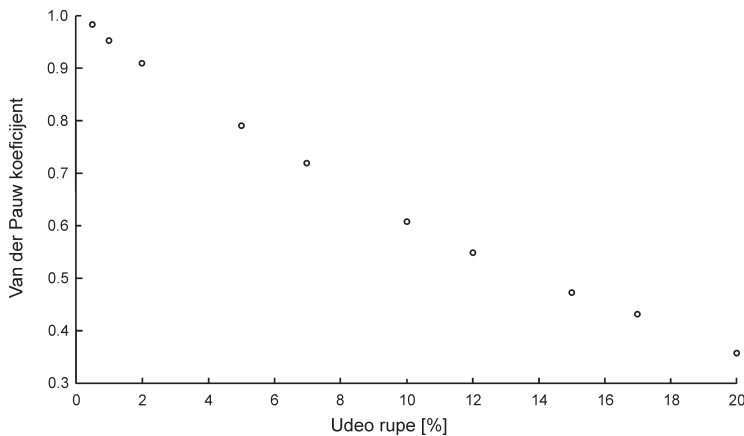
Pad napona kroz celu površinu uzorka prikazan je na slici 3.

Na osnovu podataka sa priloženog grafika uočavamo da je razlika potencijala na krajevima suprotnim od onih na koje je prikazan izvor struje znatno manja nego drugi napon, pa u skladu sa ovim zaključujemo da će biti potreban uređaj koji može da meri napon reda veličine 10^{-6} V.



Slika 4. Grafik zavisnosti napona na ivici uzorka od njegove debljine

Figure 4. Dependency graph of voltage at the edge of the sample from its thickness



Slika 5. Grafik zavisnosti Van der Pauw koeficijenta od procenta površine uzorka koju zauzima kvadratna rupa

Figure 5. Dependency graph of the Van der Pauw coefficient of the percentage of the sample surface occupied by a square hole

Na slici 4 je prikazana zavisnost napona na ivici uzorka od debljine uzorka.

Analizirajući ovaj grafik zaključeno je da je za merenja na uzorcima debljine veće od 1 mm potrebna aparatura velike preciznosti kako bi se izmerio napon na ivici uzorka. Naime, pri pokušaju merenja sa pločicom od mesinga debljine 0.1 mm nije bilo moguće očitati napon reda veličine 10^{-5} V koji se javljao na krajevima uzorka, kao što se može videti i na grafiku za odgovarajuću debljinu. Zato je odlučeno da se merenja vrše na aluminijumskoj foliji debljine $d = 7 \mu\text{m}$.

Zavisnost VdP koeficijenta od veličine kvadratne rupe data je na slici 5.

Za rupe čija je površina manja od 1% površine uzorka vrednost VdP koeficijenta je blizu 1, pa zaključujemo, da će zbog nepreciznosti merenja, postojanje rupe ovih veličina biti teško sa sigurnošću potvrditi.

Eksperiment

Iz jednačine (3) izračunata je specifična otpornost aluminijumske folije korišćene u eksperimentu. Dobijena vrednost iznosi:

$$\rho = (2.286 \pm 0.006) \times 10^{-8} \Omega\text{m}$$

Rezultati merenja napona na ivicama uzorka i Van der Pauw koeficijent za te uzorke prikazani su u tabelama 1, 2 i 3. Uzorci su od aluminijumske folije debljine $d = 7 \mu\text{m}$.

U tabeli 1 prikazani su rezultati za uzorke sa rupom kružnog oblika u centru uzorka različite veličine. Apsolutna greška merenja za VdP koeficijent (Δv) računata je po formuli:

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial I_{1,2}} \Delta I_{1,2} + \frac{\partial v}{\partial I_{3,4}} \Delta I_{3,4} + \frac{\partial v}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial v}{\partial V_{1,2}} \Delta V_{1,2} + \frac{\partial v}{\partial V_{3,4}} \Delta V_{3,4} + \frac{\partial v}{\partial \rho} \Delta \rho$$

gde su $V_{1,2}$, $V_{3,4}$, $I_{1,2}$ i $I_{3,4}$ mereni naponi i struja na ivicama uzorka, redom, d debljina uzorka i ρ specifična otpornost uzorka. Ova greška merenja u svim slučajevima iznosila je $\Delta v = 0.019$.

Kao što je i očekivano, što je veća rupa, odnosno što je veća površina uzorka koju ona obuhvata, to je VdP koeficijent manji. Zaključeno je

da veličina rupe veoma utiče na VdP koeficijent, a samim tim i na kvalitet i na strukturu uzorka. Što je veća rupa, ona se lakše može uočiti i time potvrditi njeno postojanje.

U tabeli 2 prikazani su rezultati za uzorke sa rupom u vidu pukotine konstantne dužine $l = 2$ centimetra, dok su u tabeli 3 prikazani rezultati

Tabela 1. Prikaz rezultata merenja VdP koeficijenta na uzorku sa kružnom izolovanom rupom

| Merenje | Napon u prvom položaju [mV] | Napon u drugom položaju [mV] | Struja [A] | VdP koeficijent | Udeo površine uzorka koju zauzima rupa [%] |
|---------|-----------------------------|------------------------------|------------|-----------------|--|
| 1 | 2.53 | 2.51 | 2.51 | 0.811 | 6.25 |
| 2 | 2.37 | 2.35 | 2.52 | 0.812 | 5.00 |
| 3 | 2.18 | 2.24 | 2.51 | 0.857 | 3.75 |
| 4 | 2.11 | 2.08 | 2.52 | 0.898 | 2.50 |
| 5 | 1.92 | 1.97 | 2.52 | 0.952 | 1.25 |
| 6 | 1.90 | 1.88 | 2.51 | 0.969 | 0.84 |
| 7 | 1.86 | 1.87 | 2.51 | 0.978 | 0.56 |
| 8 | 1.83 | 1.83 | 2.51 | 0.992 | 0.42 |

Tabela 2. Rezultati merenja VdP koeficijenta na uzorku sa rupom u vidu pukotine konstantne dužine $l = 2$ cm, za različite površine rupe

| Merenje | Napon u prvom položaju [mV] | Napon u drugom položaju [mV] | Struja [A] | VdP koeficijent | Udeo površine uzorka koju zauzima rupa [%] |
|---------|-----------------------------|------------------------------|------------|-----------------|--|
| 1 | 1.97 | 1.99 | 2.53 | 0.942 | 1.11 |
| 2 | 1.93 | 1.97 | 2.53 | 0.953 | 0.83 |
| 3 | 1.93 | 1.92 | 2.52 | 0.959 | 0.56 |
| 4 | 1.89 | 1.90 | 2.53 | 0.972 | 0.28 |
| 5 | 1.85 | 1.90 | 2.53 | 0.980 | 0.05 |

Tabela 3. Rezultati merenja VdP koeficijenta na uzorku sa rupom u vidu pukotine konstantne površine $P = 28.8 \text{ mm}^2$ (0.2 % površine celog uzorka) i različite dužine

| Merenje | Napon u prvom položaju [mV] | Napon u drugom položaju [mV] | Struja [A] | VdP koeficijent | Dužina pukotine [cm] |
|---------|-----------------------------|------------------------------|------------|-----------------|----------------------|
| 1 | 1.95 | 1.95 | 2.53 | 0.953 | 0.029 |
| 2 | 1.86 | 1.90 | 2.52 | 0.976 | 0.019 |
| 3 | 1.87 | 1.88 | 2.52 | 0.977 | 0.016 |
| 4 | 1.86 | 1.87 | 3.53 | 0.984 | 0.014 |

Tabela 4. Minimalne vrednosti procentulane površine uzorka koje može da zauzima rupa da bi mogla biti detektovana. Rupe su kružnog oblika i oblika pukotine

| Oblik rupe | VdP koeficijent | Procentat površine uzorka koju zauzima rupa [%] | Dužina rupe [cm] |
|------------|-----------------|---|------------------|
| Krug | 0.978 | 0.56 | – |
| Pukotina | 0.980 | 0.05 | 2.0 |
| Pukotina | 0.977 | 0.20 | 1.6 |

za pukotine konstantne površine $P = 28.8 \text{ mm}^2$. Sve rupe su se nalazile na sredini uzorka.

Iz tabela 2 i 3 zaključujemo da pukotina ima mnogo veći uticaj na protok struje i pad napona kroz uzorak, što znači da se oštećenje lakše uočava i izraženije je kada je rupa pukotina, što pokazuju i rezultati za različite oblike rupe koji zauzimaju istu površinu. Razlog tome je što pukotina ima mnogo veći obim i samim tim utiče na mnogo više veza između delova uzorka što uzrokuje veće defekte na uzorku. Dakle, uočljivost rupe zavisi i od njenog obima.

U tabeli 4 prikazane su granične površine kružne i rupe oblika pukotine koje mogu biti detektovane na ovaj način. Granične vrednosti za pukotinu prikazane su za njene dve različite dužine.

Za svaku manju površinu od one prikazane u tabeli 4 za tačno određenu vrstu rupe vrednost VdP koeficijenta sa apsolutnom greškom merenja prelazi 1, tako da nije moguće tvrditi da li uzorak ima oštećenja u vidu izolovane rupe ili nema, dok je za date površine u tabeli kao i za sve veće od njih VdP koeficijent uvek manji od 1, tako da zaključujemo da postoji izolovana rupa na uzorku.

Zaključak

Na osnovu rezultata dobijenih merenjem kao i simulacijom zaključeno je da VdP metod može detektovati samo rupe određenih karakteristika. Rupe moraju biti u određenom opsegu veličina u zavisnosti od oblika. Rupa kružnog oblika može biti detektovana samo u slučajevima kada je njena površina veća od $(0.56 \pm 0.05)\%$ ukupne površine uzorka, a ako je rupa pukotina, onda ju

je moguće detektovati ako obuhvata $(0.14 \pm 0.05)\%$ ili više od ukupne površine uzorka.

Preciznija merenja bi se mogla vršiti uz pomoć voltmetra koji može da meri mnogo manje napone, jer bi tada mogao da se koristi deblji uzorak, a samim tim i čvršći. Tada ne bi dolazilo do deformisanja uzroka prilikom merenja, kao što se događalo sa aluminijumskom folijom. Takođe, tada bi bilo moguće detektovati rupe mnogo manjih dimenzija, koje su nevidljive golim okom. Time bi ovaj metod dobio bolju primenu, jer bi se na brz način mogao utvrditi kvalitet bilo kog uzorka i uočiti defekti za čiju identifikaciju su potrebni mnogo složeniji uređaji, kao što je mikroskop.

Takođe, ispitivanja se mogu dalje vršiti na nehomogenim dvodimenzionalnim uzorcima koji nemaju izolovanu rupu i tako istražiti da li takvi uzorci takođe pod nekim uslovima zadovoljavaju relaciju da je VdP koeficijent manji od 1. Rupa na uzorku može imati manji ili veći uticaj na protok struje kroz uzorak u zavisnosti od oblika i veličine, ali takođe i od položaja. Ukoliko utiče na protok struje, utiče i na VdP koeficijent (v). U ovom radu ispitivani su uzorci sa rupom koja se nalazi na sredini uzorka, tako da je on bio potpuno simetričan. Ispitivanja se mogu proširiti posmatranjem VdP koeficijenta u zavisnosti od položaja rupe na uzorku.

Zahvalnost. Zahvaljujemo se mentoru Stefanu Badži na nesebičnoj pomoći, Milanu Krstajiću i Danilu Đokiću, kao i ostalim saradnicima seminaru fizike na korisnim savetima i podršci pri izradi ovog projekta.

Literatura

Pokorni S. 2015. *Osnove elektrotehnike I*. Istočno Sarajevo: Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Elektrotehnički fakultet

Szymański K., Cieśliński J. L., Łapiński K. 2013. Van der Pauw method on a sample with an isolated hole. *Physics Letters*, **A 377**: 651.

Van der Pauw L. J. 1958. A method of measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape. *Philips Research Reports*, **13**: 220.

Milica Božanić and Kristina Nikolić

Van der Pauw Method on a Sample with an Isolated Hole

Van der Pauw method is used to calculate the resistance and Hole coefficient of a two-dimensional solid homogeneous metal sample of arbitrary shape. However, if the sample contains an isolated hole, then the modified Van der Pauw method can be applied to it to determine the existence of this hole. In this paper, the smallest size of the hole that can be detected in this way is studied. The obtained results show that the smallest circular hole that can be detected occupies 0.56% of the total surface area of the sample, and a hole that has the shape of a crack can be detected if it occupies more than 0.05% of the surface. It is concluded that the size of the hole that can be detected depends on its shape, and hence the value obtained for the sample with a crack is not the same for all cracks, it depends on its shape, its width and length. Such a modified method can be used to quickly and effectively detect defects in materials. 