

Analiza metoda za numeričku simulaciju nestišljivih fluida

U ovom radu je ispitivano ponašanje različitih metoda za numeričku simulaciju nestišljivih fluida. Korišćeni metodi su eksplicitni metod rešavanja Navije-Stoksovih jednačina i implicitni metod. Analiza metoda je sprovedena sa i bez čvrstih prepreka u okviru domena. Rezultati su pokazali da implicitni metod pokazuje stabilnije ponašanje i ne unosi energiju u sistem, kao što je slučaj kod eksplicitnog.

Uvod

Simulacije danas igraju ključnu ulogu u nauci, ali i u video-igrama. Simulacija fluida je važna jer se može iskoristiti u nauci za predviđanje nekih događaja koji zavise od kretanja fluida (vetar, voda, itd.). Mogu se koristiti i u video-igrama za animaciju vode.

Simulaciji fluida se može pristupiti na dva glavna načina. Prvi je predstavljanje fluida kao skup čestica i simulacija svake čestice posebno; glavni metod koji se koristi za ovu svrhu je Smoothed particle hydrodynamics (SPH) (Manenti 2009). Drugi način je predstavljanje fluida kao diskretizovane mreže. Za ovaj slučaj su razvijeni razni metodi. Neki od njih se oslanjaju na samu fizičku prirodu fluida i rade direktnu simulaciju korišćenjem jednačina koje opisuju kretanje fluida, kao na primer (Stam 1999) i (Chorin 1968), ali ima i onih koji pokušavaju da imitiraju vizuelno kretanje fluida bez direktne primene jednačina (Bao i Meskas 2011).

Ovaj rad se fokusira na ispitivanje metoda za simulaciju nestišljivih fluida. Nestišljiv fluid je

onaj kojem se gustina ne menja, odnosno gde je gustina uvek ista na bilo kojoj poziciji i trenutku.

Urađeno je poređenje ponašanja eksplicitne i implicitne numeričke integracije jednačina koje opisuju kretanje nestišljivog fluida u dvodimenzionalnom slučaju na diskretizovanoj mreži.

Jednačine koje opisuju kretanje nestišljivog fluida u dve dimenzije su:

1. **Navije-Stoksova jednačina**, koja definiše ubrzanje čestice na poziciji (x,y) u datom trenutku t :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x, y, t) = -\frac{1}{\rho}(\vec{u}(x, y, t) \cdot \nabla) \vec{u}(x, y, t) + \mu \nabla \cdot \nabla \vec{u}(x, y, t) - \nabla p(x, y, t) + \vec{f}(x, y, t)$$

Kako bi se lakše razumela, jednačina se može podeliti u četiri dela:

- delovanje eksterne sile \vec{f} po jedinici mase
- advekcija $-\frac{1}{\rho}(\vec{u}(x, y, t) \cdot \nabla) \vec{u}(x, y, t)$, koja

predstavlja nelinearni deo jednačine

- difuzija: $\mu \nabla \cdot \nabla \vec{u}(x, y, t)$
- oduzimanje dela polja sa divergencijom različitom od nule, koje zapravo čini gradijent pritiska: $\nabla p(x, y, t)$

2. **Jednačina kontinuiteta:**

$$\nabla \vec{u}(x, y, t) = 0$$

Ova jednačina se dobija iz uslova da je fluid nestišljiv.

Simulacija se svodi na numeričku integraciju ove dve jednačine. Dva dovoljna svojstva koja trebaju biti poznata u svakoj ćeliji diskretizovane mreže su brzina i pritisak. Brzina predstavlja vektor koji određuje pravac, smer i intenzitet kretanja određene čestice u polju. Pritisak predstavlja skalar koji je definisan za svaku česticu u polju.

Stefan Nožinić, Šabac, učenik 3. razreda Tehničke škole

MENTOR: Vladimir Makarić, student Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu

Metode

Navije-Stoksova jednačina je rešavana pomoću eksplicitnog i implicitnog metoda, dok je jednačina kontinuiteta rešavana projekcijom na bezizvorno polje. Projekcija ne zavisi od metoda rešavanja Navije-Stoksovih jednačina, pa je ista za implicitni i eksplicitni metod.

Eksplicitni metod. Upotrebljena je jednostavna Ojlerova aproksimacija za izračunavanje polja bez projekcije na bezizvorno polje.

Ovo je urađeno na sledeći način: izračuna se faza advekcije, difuzije i doda se eksterna sila po jedinici mase i primeni se Ojlerova aproksimacija da se dobije međukorak pre projekcije na bezizvorno polje. Ovaj međukorak je obeležen kao polje u trenutku $t + \frac{\Delta t}{2}$:

$$u(x, y, \frac{\Delta t}{2}) = u(x, y, t) + \Delta t \cdot \left(-\frac{1}{\rho} (u(x, y, t) \cdot \nabla) u(x, y, t) + \mu \nabla \cdot \nabla u(x, y, t) + f \right)$$

Implicitni metod (Stam). Kod ovog metoda advekcija i difuzija, umesto eksplicitno kao kod goreopisanog metoda, rešavaju se implicitno, odnosno ceo korak u vremenu se deli na međukorake na sledeći način.

Prvo se kreće od brzine koja je već izračunata

$$w_0 = u(x, y, t)$$

Na tu brzinu se dodaje impuls po jedinici mase, koja se dodaje eksplicitno, odnosno:

$$w_1 = w_0 + \Delta t f$$

Potom je potrebno uraditi advekciju na sledeći način:

$$w_2(\vec{r}) = w_1(\vec{r} - \Delta t w_1(\vec{r}))$$

Ovaj deo je detaljno opisan u (Stam 1999).

Difuzija je računata isto implicitno, odnosno:

$$(I - \Delta t \mu \nabla^2) w_3 = w_2.$$

Kada se diferencijalni operator diskretizuje, rešava se sistem jednačina i tako određuje naredni međukorak. Sada je međukorak koji predstavlja vektorsko polje pre projekcije jednak:

$$u(x, y, t + \frac{\Delta t}{2}) = w_3$$

Projekcija na bezizvorno polje. Nakon izračunavanja međukoraka ovim metodama, potrebno je uraditi projekciju na polje čija je divergencija jednaka nuli. Ovo se radi tako što se od brzine oduzme gradijent pritiska:

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x, y, t + \frac{\Delta t}{2}) - \Delta t \nabla p$$

Kako za novo polje mora važiti da mu je divergencija jednaka nuli, dobija se Laplasova jednačina (Chorin 1968):

$$\Delta t \nabla \cdot \nabla p = \nabla \cdot u(x, y, t + \frac{\Delta t}{2})$$

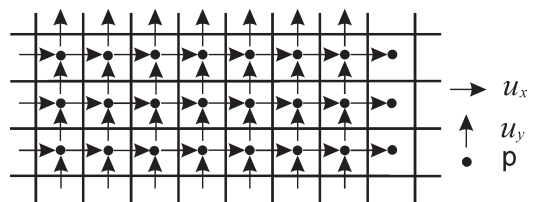
Kada se polje pritiska i brzine diskretizuje, dobija se sistem linearnih jednačina za svaku ćeliju u diskretizovanoj mreži.

Kada se sistem reši i dobije se skalarno polje pritiska, može se izračunati krajnji rezultat:

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x, y, t + \frac{\Delta t}{2}) - \Delta t \nabla p.$$

Raspoređena mreža prilikom projekcije na bezizvorno polje. Prilikom rešavanja linearnog sistema jednačina koji se dobija diskretizacijom Laplasove jednačine primećeno je da je upotreba centralizovane mreže, gde se brzina i pritisak javljaju na istim pozicijama, neprecizna i podložna greškama.

Zbog ovoga je metod opisan u Chorin (1968) izmenjen i u delu kada se vrši rešavanje sistema linearnih jednačina za polje pritiska upotrebljavana je raspoređena mreža, gde se brzina definiše na ivicama ćelije a pritisak u centru. Primer ova-kve mreže je prikazan na slici 1. Na ovaj način



Slika 1. Primer mreže gde se pozicije brzine i pritiska ne poklapaju

Figure 1. Mesh where values of velocity and pressure are not on the same position

postiže se da je divergencija definisana na istoj poziciji gde je i pritisak i ona zavisi od brzina koje se nalaze na ivicama date ćelije.

Kako se pre projekcije za izračunavanje međukoraka koristi centralizovana mreža, potrebno je prebacivanje na ovaj tip mreže. To se može uraditi tako što se brzina na ivici između dve ćelije računa kao prosečna vrednost brzina ćelija između kojih se ivica nalazi.

Diskretizacija operatora. Prilikom projekcije i implicitne aproksimacije difuzije, potrebno je uraditi diskretizaciju operatora.

Ako se ćelija ne nalazi na ivici domena ili pored ćelije nije ćelija koja označava čvrsto telo, onda se laplasijsan diskretizuje standardnom metodom:

$$\nabla \cdot \nabla p(x, y) = p(x+1, y) + p(x-1, y) + p(x, y+1) + p(x, y-1) - 4p(x, y)$$

Ako se čvrsto telo nalazi iznad ili ispod ćelije ili je ćelija na gornjoj ili donjoj ivici, onda važi:

$$\nabla \cdot \nabla p(x, y) = p(x+1, y) + p(x-1, y) - 2pxy$$

Ako se čvrsto telo nalazi levo ili desno od ćelije ili se ćelija nalazi na levoj ili desnoj ivici, važi:

$$\nabla \cdot \nabla p(x, y) = p(x, y+1) + p(x, y-1) - 2p(x, y)$$

Ako su oba uslova zadovoljena (ćelija je u ćošku), onda se pritisak (ili brzina u slučaju implicitne aproksimacije difuzije) postavlja na nulu.

Ostali operatori se diskretizuju upotrebom metoda konačne razlike (Heath 1997).

Inicijalni uslovi i generisanje prepreka.

Prepreke su generisane tako što su ćelije koje su namenjene da imitiraju prepreku markirane kao prepreke i pri svakom koraku se brzina u ćelijama markiranim kao prepreka postavlja na nulu. Inicijalno se u svakoj ćeliji brzine postavljaju na nulu. Za svaku ćeliju u svakom trenutku se zadaje sila u analitičkom obliku, tako da se za svaku ćeliju u svakom trenutku zna vrednost sile.

Prilikom rešavanja sistema jednačina za pritisak, ćelije koje predstavljaju granicu između fluida i prepreka posmatraju se kao ćelije na ivicama terena. Pritisak u ovim ćelijama se postavlja tako da se u tim delovima brzina ponaša kao da je čestica udarila o zid, pa je time dobijen efekat sudaranja i odbijanja.

Ovo znači da se isti efekti dešavaju na ćelijama pored prepreka i na ćelijama pored zidova na kraju terena.

Implementacija. Navedeni metodi su implementirani u programskom jeziku Python sa upotrebom biblioteke NumPy za numerička izračunavanja i Matplotlib za iscrtavanje vektorskog i skalarnog polja. Ceo sistem se sastoji iz 3 dela: obrada geometrije, simulator i animator. Ovakav model omogućava upotrebu istih iscrtavanja geometrije i animatora (prikaz nekih svojstava kao što je vektorsko polje) za različite metode (simulatore).

Rezultati i diskusija

Oba metoda su testirana na sledećim slučajevima:

- domen bez prepreka
- domen sa jednom preprekom u obliku kruga (simetrična situacija)
- domen sa preprekom koju predstavlja pravougaonik koji je rotiran tako da se dobije nesimetričan domen u odnosu na y ili x osu.

Prepreke su statične i tokom trajanja simulacije se ne pomeraju i ne rotiraju.

U svakom test slučaju sila se postavlja da bude radijalna sa centrom (-1, 50) i opada obrnuto proporcionalno rastojanju tačke od centra.

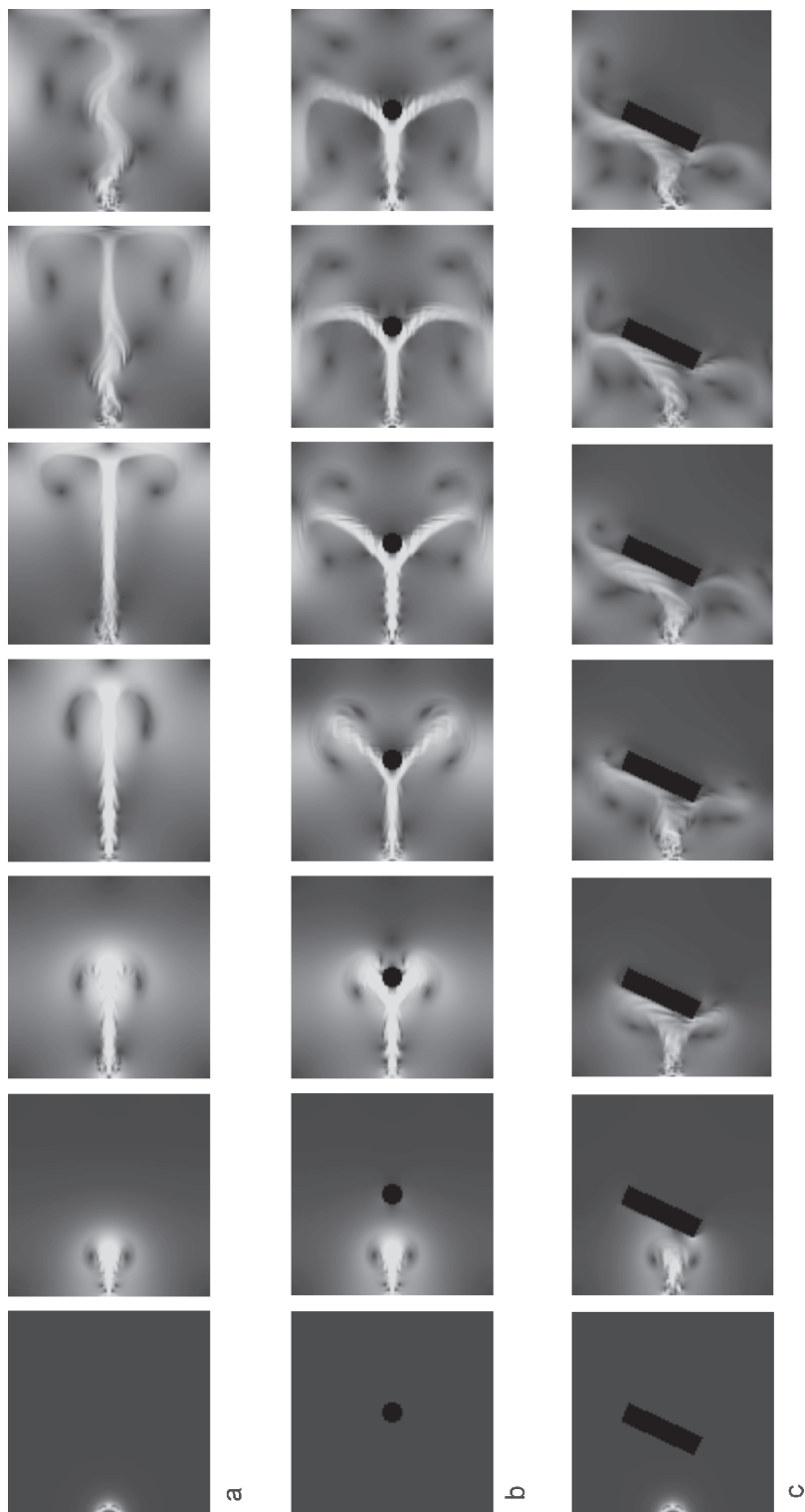
Eksplisitni metod je pri upotrebi vremenskog koraka od 0.1 pokazao da je nestabilan već posle nekoliko iteracija, dok je za mali vremenski korak od 0.01 pokazao da je stabilan ako su i brzine dovoljno male. Ovakav način funkcionisanja nije moguće primeniti u praksi.

Implicitni metod je pokazao očekivane rezultate za vremenski korak 0.1. Dobijeno ponašanje je bilo stabilno i polje je bilo bezizvorno.

Na slici 2 prikazana je funkcionalnost implicitnog metoda za svaki test primer respektivno.

Slika 2 (naspramna strana). Simulacije dobijene implicitnim metodom za domen bez prepreka (a), domen sa jednom kružnom preprekom (b) i pravougaonom preprekom (c)

Figure 2 (opposite page). Simulation using the implicit method for a domain with no obstacles (a), domain with one circular obstacle (b) and a rectangular obstacle (c)



Izmerene su i performanse oba metoda i prikazane u tabeli 1. Dobijeni rezultati pokazuju da je eksplicitni metod brži po iteraciji, ali kako mu je potrebno više iteracija zbog malog vremenskog koraka, implicitni metod pokazuje bolje performanse kada se izmeri ukupno vreme.

Tabela 1. Performanse metoda

Metod	Vreme po iteraciji	Ukupno
Eksplicitni	0.030	148.458
Implicitni	0.042	21.034

Zaključak

Implicitni metod pokazuje vizuelno zadovoljavajuće rezultate. Pored toga, ukupno vreme izvršavanja je manje od eksplicitnog metoda iako mu je vreme po iteraciji veće. Eksplicitni metod je lakše implementirati, ali ne daje očekivane rezultate i zbog toga nije ga moguće primeniti u praktičnim aplikacijama.

Istraživanje se može nastaviti ispitivanjem ponašanja ovih metoda u 3 dimenzije. Pored toga, performanse se mogu poboljšati tako što će se jedan deo čitavog procesa prebaciti na grafičku karticu.

U ovom radu je eksplicitna integracija vršena Ojlerovim metodom, ali je potrebno napomenuti da je moguće bolje ponašanje primenom RK4 metode. Ipak, ne očekuje se stabilnije ponašanje u odnosu na implicitni metod.

Postoji još metoda projekcije na nedivergentno polje pored goreopisanog, pa se istraživanje može nastaviti i u tom pravcu.

Literatura

Bao Y. B. Meskas J. 2011. *Lattice Boltzmann method for fluid simulation*. Dostupno na: <http://www.cims.nyu.edu/~billbao/report930.pdf>

Chorin A. J. 1968. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of computation*, **22** (104): 745.

Heath M. T. 1997. *Scientific Computing: An Introductory Survey*. McGraw-Hill, str. 262

Manenti S. 2009. *Smoothed particle hydrodynamics: Basics and applications*. Pavia: University of Pavia.

NumPy dokumentacija
<http://docs.scipy.org/doc/>

Stam J. 1999. Stable Fluids. U *SIGGRAPH 99 Conference Proceedings*, str. 121-128.

Stefan Nožinić

Comparison and Analysis of Numerical Methods for Incompressible Fluid Simulation in Domain with Solid Obstacles

This paper compares different methods for numerical simulation of incompressible fluids. The used methods are explicit and implicit treatment of Navier-Stokes equations. Analysis has been done with and without solid bodies inside the domain. Results show that the implicit treatment of equations shows better visual behavior than the explicit treatment. The explicit method for numerical approximation of Navier-Stokes equations is unstable and cannot be applied in practical applications such as video games. The implicit method shows stable results and consumes less mass as predicted from the constraint that divergence has to be zero. Performance has also been measured and it is shown that the explicit method is faster per iteration, but it needs more iterations. This means that the implicit method is faster when the whole computation time is considered. ☹