Dušan Dragutinović i Vukoman Pejić

Graf pebling

Graf pebling je matematička igra sa kuglicama na grafu, koja ujedno predstavlja model transporta resursa. Posmatrajmo neusmereni povezani graf G *u čijim se čvorovima nalazi određen broj kuglica. Pebling potez se sastoji od uklanjanja dve kuglice sa nekog čvora (na kome su se pre toga nalazile bar dve kuglice) i dodavanje jedne kuglice nekom njegovom susedu. Pebling broj grafa* G, *u oznaci* $\pi(G)$, *najmanji je prirodan broj za koji važi da ma kako rasporedili* $\pi(G)$ *kuglica u čvorove grafa* G *i ma koji čvor izabrali na početku, posle konačno mnogo poteza je moguće postići da se u izabranom čvoru nalazi bar jedna kuglica. U ovom radu određeni su pebling brojevi nekih klasa grafova nastalih dodavanjem čvorova i puteva na kompletne grafove i cikluse. Takođe, uvedeno je novo uopštenje graf peblinga, u kome se, po ceni jedne kuglice, na susedan čvor može prebaciti najviše njih* p *za neko* $p \in \mathbb{N}$ *i predstavljeno je nekoliko rezultata u vezi sa ovim uopštenjem.*

Uvod

Na početku rada definisani su osnovni pojmovi iz teorije grafova i predstavljen je problem graf peblinga, kao i pozadina u kojoj je nastao. U nastavku, data su naša tvrđenja nastala u razmatranju ovog problema na nekim uopštenjima kompletnog i cikličnog grafa. U poslednjem poglavlju postavili smo novo uopštenje problema graf peblinga i dali određena tvrđenja u vezi sa njim.

Osnovni pojmovi

Graf G je uređeni par (V, E) gde V predstavlja skup čvorova, a E – skup grana grafa kojima su neki čvorovi grafa povezani. Sa n označavaćemo ukupan broj čvorova grafa koji posmatramo ($n = |V(G)|$). Spomenimo sada neke klase grafova koji su korišćeni u daljem radu. Put od čvora v_1 do v_S, u oznaci P_n, predstavlja niz čvorova: $v_1, v_2, \ldots, v_n$, gde su grane (v_i, v_{i+1}), $i \in$ $\in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ (slika 1). Kompletan graf, u oznaci K_n, graf je u kome su svi čvorovi međusobno povezani granama. Cikl C_n se sastoji od niza

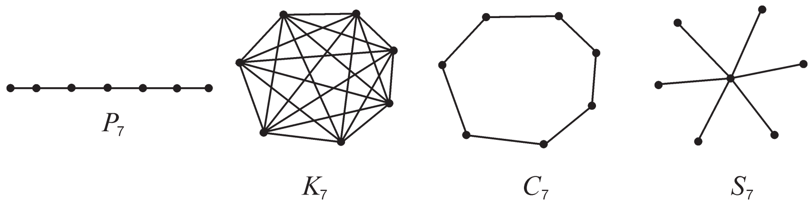
Dušan Dragutinović, (1996), Pančevo, Kikindska 3, učenik 4. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

Vukoman Pejić (1998), Aleksandrovac, Vinogradarska 3, učenik 2. razreda S. Š. „Sveti Trifun" u Aleksandrovcu

MENTOR: Nikola Milosavljević, asistent na Departmanu za računarske nauke Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu

čvorova koji počinju i završavaju se u istom čvoru, a da su pritom svaka dva susedna čvora povezana granom. Zvezda S_n je graf koji ima jedan čvor koji je povezan sa svim ostalim i pored tih grana nema drugih.

Broj susednih čvorova čvoru v zove se stepen čvora i označava sa deg(v) (skraćeno od engleske reči degree).



Slika 1.
Put, kompletan graf, ciklus i zvezda sa 7 čvorova

Figure 1.
Path, complete graph, cycle graph and a star with 7 vertices

Rastojanje od čvora u do čvora v, u oznaci $d(u, v)$ predstavlja dužinu najkraćeg puta između čvorova u i v.

Dijametar grafa G, u oznaci diam(G), predstavlja najveće rastojanje između čvorova grafa G.

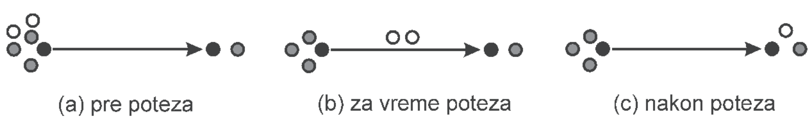
Čvor koji ima samo jednog suseda nazivamo listom.

Dekartov prizvod grafova $G \times H$ grafova G i H predstavlja graf takav da važi: skup čvorova $G \times H$ je Dekartov proizvod $V(G) \times V(H)$ i pritom su bilo koja dva čvora (u, u_1) i (v, v_1) susedna u $G \times H$ akko važi: $u = v$ i u_1 je susedan čvor v_1 u H, ili $u_1 = v_1$ i u je susedan čvor v u G.

Graf pebling

Graf pebling je matematička igra na grafu sa određenim brojem kuglica na svojim čvorovima. Izmislili su je 1989. Lagarijas i Saks da bi poslužila kao oruđe za rešavanje određenog problema iz teorije brojeva, a iste godine je Čung uvela definiciju pebling broja i objavila pionirske radove na ovu temu. Takođe, bitni rezultati na ovu temu objavljeni su od strane Crull *et al.* (2005), Hurlbert (1999), Hurlbert (2014) i Pachter *et al.* (1994).

Pebling potez (slika 2) definišemo kao uklanjanje dve kuglice sa čvora $u \in V(G)$ i prebacivanje jedne kuglice na susedni čvor $v \in V(G)$. Kažemo da je čvor dostižan ukoliko se nakon određenog niza pebling poteza na njemu može nalaziti bar jedna kuglica. Pebling potez se ne može ostvariti u slučaju da na nekom čvoru imamo jednu (ili nijednu) kuglicu, jer nećemo imati dovoljan broj kuglica da prebacimo na sledeći čvor. Pebling raspored



Slika 2.
Pebling potez

Figure 2.
Pebbling move

predstavlja raspored kuglicâ na čvorove grafa i za njega kažemo da je rešiv ukoliko je bilo koji odabrani čvor (ciljni čvor) dostižan.

Graf pebling predstavlja transportni model i mrežnu optimizaciju za transport resursa. Struja, toplota i drugi izvori energije mogu delom nestati prilikom transporta sa jedne lokacije na drugu, tankeri mogu koristiti naftu da bi prevezli naftu sa jednog mesta na drugo. Kuglice posmatramo kao resurse; pri pebling potezu (pri transportu resursa) gubi se jedna kuglica (deo resursa), a kuglica koju prebacimo je resurs koji smo prebacili sa jednog mesta na drugo.

Pebling broj $\pi(G)$ predstavlja najmanji broj takav da će se za bilo koju postavku $\pi(G)$ kuglica na čvorove grafa G i biranjem bilo kog čvora za ciljni čvor nakon određenog broja pebling poteza u ciljnom čvoru naći bar jedna kuglica. Na primer, za graf sa dva čvora i jednom granom pebling broj je dva, jer ma kakva postavka bila uvek ćemo moći da dospemo u bilo koji ciljni čvor.

Pokrivajući pebling broj $\gamma(G)$ je najmanji broj kuglica takav da se iz bilo koje postavke kuglicâ na početku nakon niza pebling poteza na svakom čvoru grafa može naći barem jedna kuglica. Na primer, za graf sa dva čvora i jednom granom, kaver pebling broj je tri, jer ma kakva postavka bila uvek će moći da na svakom čvoru bude bar jedna kuglica.

Posmatrajmo kompletan graf. Lako je zaključiti da je njegov pebling broj jednak broju čvorova, tj. $\pi(K_n) = n$, gde je n broj čvorova. Jasno je da, ako pretpostavimo da je pebling broj kompletnog grafa jednak $n-1$, možemo postaviti kuglice na sve čvorove grafa sem jednog, tako da jedan čvor ostaje nedostižan, stoga $n-1$ nije pebling broj kompletnog grafa. Dakle, pebling broj je veći od $n-1$. Pretpostavimo da je pebling broj kompletnog grafa jednak n. Ukoliko postavimo po jednu kuglicu u svaki čvor grafa, onda je slučaj rešen. Ukoliko se na jednom ili više čvorova grafa ne nalazi nijedna kuglica, po Dirihleovom principu na nekom od ostalih čvorova će se naći bar dve kuglice, a po definiciji pebling poteza, jasno uočavamo da možemo stići u bilo koji čvor grafa, tj. svaki čvor grafa je dostižan (pa i ciljni čvor), odakle sledi da je pebling broj kompletnog grafa jednak upravo n.

Poznate su neke donje i gornje granice za pebling broj određenog grafa. Osnovna donja granica je da pebling broj mora biti veći ili jednak broju čvorova, tj. $\pi(G) \geq n$, gde n predstavlja broj čvorova grafa. U suprotnom, možemo postaviti kuglice na sve čvorove sem jednog i u tom slučaju nikada ne možemo prebaciti jednu kuglicu na čvor na kome nema kuglica. Takođe, $\pi(G) \geq 2^{\operatorname{diam}(G)}$. U suprotnom, postavićemo sve kuglice na rastojanju $\operatorname{diam}(G)$ od ciljnog čvora, te će ciljni čvor ostati nedostižan.

Gornja granica pebling broja $\pi(G)$ je $\pi(G) \leq (n-1)(2^{\operatorname{diam}(G)}-1)+1$. U slučaju kada je na čvorove grafa postavljeno $(n-1)(2^{\operatorname{diam}(G)}-1)+1$ kuglica, po Dirihleovom principu na jednom čvoru se mora naći $2^{\operatorname{diam}(G)}$ kuglica i tada možemo prebaciti bar jednu kuglicu na bilo koji čvor ili će se na svakom čvoru nalaziti po jedna kuglica.

Grafovi u kojima je pebling broj jednak broju čvorova se nazivaju 0-klasa grafova.

Za veliki broj klasa grafova već je određen pebling broj. U ovom radu koristimo vrednosti pebling brojeva za kompletan graf, put, kao i ciklus sa parnim brojem čvorova. Za kompletan graf je to broj čvorova kao što smo već napisali – $\pi(K_n) = n$, za put sa n čvorova pebling broj je jednak $\pi(P_n) = 2^{n-1}$, a za ciklus sa $2k$ čvorova pebling broj je jednak $\pi(C_{2k}) = 2^k$. Kako je pebling broj puta jednak $\pi(P_n) = 2^{n-1}$, da bismo sa čvora u na neki čvor v prebacili jednu kuglicu na čvoru u je potrebno da se nalazi $2^{d(u,v)}$ (ili više) kuglica. Pomenućemo i Grejemovu hipotezu koja glasi: pebling broj Dekartovog proizvoda dva grafa manji je ili jednak pebling broju proizvoda ta dva grafa, tj. $\pi(G_1 \times G_2) \le \pi(G_1)\pi(G_2)$.

Opšta napomena. Sa $p(u)$ označavaćemo broj kuglica koje se nalaze na čvoru u.

Pebling brojevi uopštenja ciklusa i kompletnog grafa

U ovom poglavlju određeni su pebling brojevi za određene klase grafova koje predstavljaju uopštenja ciklusa i kompletnog grafa.

Napomena. Sa O označavaćemo centar zvezde, a listove koji su povezani sa njim sa $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Sledeća lema predstavlja jedno od osnovnih sredstava koja se koriste u dokazima iz ovog poglavlja.

Lema 1. Ako je u čvorovima zvezde S_n, $n \ge 2$ postavljeno ne manje od $2k+n-2$ kuglicâ, $k \in N$, tada uvek postoji niz poteza kojim se barem k kuglicâ može smestiti u centar zvezde.

Dokaz. U slučaju kada se na O ne nalazi nijedna kuglica, kada je $p(a_i) = 1$, $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, a $p(a_1) = 2k-1$, tada se na centar zvezde može premestiti najviše $k-1$ kuglica, te broj kuglica na zvezdi S_n mora biti veći od $2k+n-3$ da bi se u centar uvek moglo smestiti k kuglica. Neka se sada na čvorovima grafa nalazi $2k+n-2$ kuglica i pretpostavimo da se u čvoru O ne može naći k kuglica. Označimo redom sa $p(O)$, $p(a_1)$, $p(a_2)$, …, $p(a_{n-1})$ broj kuglica na čvorovima O, a_1, a_2, …, a_{n-1}. Tada bi moralo da važi:

$$p(O) + \left\lfloor \frac{p(a_1)}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{p(a_{n-1})}{2} \right\rfloor < k$$

Razmotrimo dva slučaja.

Ako je $p(O) > 0$, tada imamo da je leva strana nejednakosti veća ili jednaka od $\frac{p(O)}{2} + \frac{p(O)}{2} + \frac{p(a_1)-1}{2} + \ldots + \frac{p(a_{n-1})-1}{2}$ i nakon korišćenja činjenice da je $p(O) + p(a_1) + p(a_2) + \ldots + p(a_{n-1}) = 2k+n-2$, dobijamo da je leva strana nejednakosti veća ili jednaka od $\frac{p(O)}{2} + \frac{2k-1}{2} \ge k$.

Ako je $p(O)=0$, tada zbog parnosti u jednakosti $p(a_1)+p(a_2)+\ldots+p(a_{n-1})=2k+n-2$ važi da je barem jedan $p(a_i), i\in\{1, 2, \ldots, n-1\}$ paran, te je leva strana jednakosti veća ili jednaka od $\frac{p(a_1)-1}{2}+\frac{p(a_2)-1}{2}+\ldots+\frac{p(a_{n-1})-1}{2}+\frac{1}{2}=k.$

U oba slučaja dobijena je kontradikcija sa pretpostavkom, te se na čvoru O može naći barem k kuglica. ■

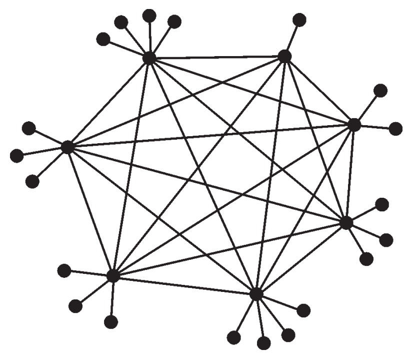
Napomena. Ekvivalent prethodne leme, koji ćemo takođe koristiti u dokazima narednih tvrđenja glasi: Ako se na čvorovima zvezde S_n nalazi d kuglica ($d \geq n$), tada se za svaki raspored tih kuglica nakon konačnog niza pebling poteza u centru zvezde može naći $\left\lfloor \frac{d-n+2}{2} \right\rfloor$ kuglica.

Lema 2. Ako se u centar zvezde ne može smestiti k kuglica nakon određenog broja poteza, tada se u centar zvezde ne može smestiti k kuglica ni u slučaju kada se na svaki čvor a_i, $i\in\{1, 2, \ldots, n-1\}$ na kome se nalazi paran broj kuglica, doda još jedna kuglica.

Dokaz ovoga očigledno sledi iz same definicije pebling poteza.

Uopštenja kompletnog grafa

Graf $K_{n;\,l1,\,l2,\,\ldots,\,ln}$ definišimo kao graf u čijoj osnovi se nalazi kompletan graf sa n čvorova, koje ćemo označiti brojevima iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$ i pritom je svaki čvor i povezan sa još l_i listova, $i\in\{1, 2, ..., n\}$. Jedan primer ove klase grafova dat je na slici 3.



Slika 3. $K_{7;\,3,\,4,\,3,\,2,\,1,\,4,\,3}$

Figure 3. $K_{7;\,3,\,4,\,3,\,2,\,1,\,4,\,3}$

Napomena. Listove povezane sa čvorom a_i označavaćemo sa $a_{i;1}$, $a_{i;2}, \ldots, a_{i;l_i}$.

Teorema 1. Za prirodne brojeve $n\geq 3$ i $l_1, l_2, \ldots, l_n \geq 1$ važi:

$$\pi(K_{n;l_1,l_2,\ldots,l_n})=\sum_{i=1}^{n} l_i+2n+2$$

Dokaz. Posmatrajmo sledeći raspored kuglicâ: neka se na listovima $a_{i;1}$, $i\in\{2, 3, \ldots, n-1\}$ nalaze po tri kuglice, na listu $a_{1;1}$ sedam kuglica, na listu $a_{n;1}$ nijedna kuglica, a na preostalim listovima (ukoliko ih ima) po jedna kuglica. Tada čvor $a_{n;1}$ neće biti dostižan, odakle sledi:

$$\pi(K_{n;l_1,l_2,\ldots,l_n}) > \sum_{i=1}^{n} l_i + 2n + 1.$$

Ograničimo sada $\pi(K_{n;l_1,l_2,\ldots,l_n})$ sa gornje strane. Pretpostavimo da je na taj graf postavljeno $\sum_{i=1}^{n} l_i + 2n + 2$ kuglica.

Bez umanjenja opštosti neka je ciljni čvor list $a_{n;1}$. Ako je $A_n = \sum_{i=1}^{l_n} p(a_{n;i}) + p(a_n)$, podelimo ovo razmatranje na tri dela:

(1) $A_n > l_n + 1$: iz leme 1, primenjene na zvezdu sa centrom u a_n, čiji su listovi $a_{n,1}, \ldots, a_{n;l_n}$, na čvoru a_n nakon određenog niza poteza moraju se nalaziti barem dve kuglice, te će odatle jedna kuglica moći da se prebaci na čvor $a_{n;1}$.

(2) $A_n = l_n + 1$ ili $A_n = l_n$: prema lemi 1 (primenjene na istu zvezdu kao i malopre) na čvoru a_n nakon određenog niza poteza mora se nalaziti barem jedna kuglica, te je potrebno sa ostatka grafa prebaciti jednu kuglicu na čvor a_n da bi sledila tačnost. Pokažimo sada zašto će to morati da važi. Neka je $A_j = \sum_{i=1}^{l_i} p(a_{j;i}) + p(a_j)$ za $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Tada važi:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} \geq l_1 + l_2 + \ldots + l_{n-1} + 2n + 1$$

Prema Dirihleovom principu i lemi 1, na nekom od čvorova $a_i, i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ mogu se dobiti dve kuglice, jer će za neki A_i važiti $A_i \geq l_i + 3$ (a ta zvezda ima $l_i + 1$ čvor), odakle sledi tačnost tvrđenja u ovom slučaju.

(3) $A_n \leq l_n - 1$: tada važi:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} \geq l_1 + l_2 + \ldots + l_{n-1} + 2n + 3$$

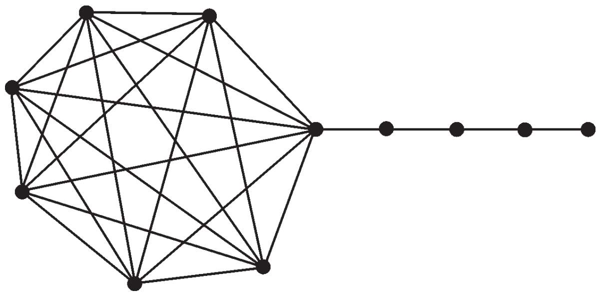
U ovom slučaju čvor a_n može biti bez kuglica na sebi. Pokažimo sada da će postojati neki indeks x tako da je $A_x \geq l_x + 7$ ili će postojati neka dva indeksa y, z tako da je $A_y \geq l_y + 3$ i $A_z \geq l_z + 3$, odakle bi sledila tačnost tvrđenja i u ovom slučaju. Pretpostavimo da nijedna od te dve opcije nije moguća. Neka za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ važi da je $A_i \leq l_{i+2}$. Tada je:

$$\sum_{i=1}^{n-1} A_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} l_i + 2(n-1)$$

što je u kontradikciji sa prethodnom nejednakosti, te postoji neki indeks x tako da je $A_x \geq l_x + 3$. Ako je x jedini indeks za koji to važi, na isti način dobija se da mora važiti $A_x \geq l_x + 7$. Međutim, ako postoji još neki indeks y tako da $A_y \geq l_y + 3$, odatle ponovo sledi tačnost tvrđenja.

Prethodna razmatranja takođe pokrivaju i slučaj kada je ciljni čvor neki unutrašnji čvor, jer su se u sva tri slučaja preko čvora a_n vršila prebacivanja kuglica. ■

Slično prethodnom, posmatrali smo još jedno uopštenje kompletnog grafa. Graf $KP_{k;l}$ definišimo kao graf u čijoj osnovi se nalazi kompletan graf sa k čvorova i pritom je jedan njegov čvor spojen sa putem sa l čvorova. U



Slika 4. $KP_{7;4}$

Figure 4. $KP_{7;4}$

literaturi je ova klasa grafova poznata pod nazivom tadpole (punoglavac) graf. Na slici 4, nalazi se primer ovakvog grafa.

Teorema 2. Za prirodne brojeve $k \geq 3$ i $l \geq 1$ važi:

$$\pi(KP_{k;l}) = 2^{l+1} + k - 2$$

Dokaz. Označimo sa a_1 čvor kompletnog grafa koji je (direktno) povezan sa putem, njegov susedni čvor sa puta sa b_1, a čvor sa puta koji je na najvećem rastojanju od a_1 neka je b_l. Čvorove između b_1 i b_l označimo redom. U rasporedu u kojem se na čvoru b_l nalazi $2^{l+1} - 1$ kuglica, a na čvorovima kompletnog grafa $a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}$ po jedna kuglica, čvor a_k ostaće nedostižan (jer je, kao što je rečeno u uvodu, pebling broj puta $\pi(P_n) = 2^{n-1}$), te je $\pi(KP_{k;l}) > 2^{l+1} + k - 3$.

Pokažimo da je $\pi(KP_{k;l}) \leq 2^{l+1} + k - 2$. Neka je $2^{l+1} + k - 2$ kuglica raspoređeno na čvorove ovog grafa. Neka je $K = \sum_{i=1}^{k} p(a_i)$ i $P = \sum_{i=1}^{l} p(b_i)$. Posmatrajmo sledeće netrivijalne slučajeve:

(1) Ciljni čvor se nalazi na kompletnom grafu:

$K \leq k - 2$: U ovom slučaju na putu se nalazi više ili jednako od $2^{l+1} = \pi(P_{l+2})$ kuglicâ, te je ciljni čvor dostižan.

$K = k - 1$: U netrivijalnom slučaju, potrebno je da sa puta na čvor a_1 dospe jedna kuglica da bi ovo tvrđenje važilo, što i jeste tačno, jer je $P = 2^{l+1} - 1 > 2^l = \pi(P_{l+1})$.

(2) Ciljni čvor se nalazi na putu: Ovaj problem se svodi na pitanje da li važi: $\left\lfloor \frac{K-k+2}{2} \right\rfloor + P \geq 2^l$. Prema lemi 1, ako čvorove i (određene) grane kompletnog grafa posmatramo kao zvezdu sa centrom u čvoru a_1, $\left\lfloor \frac{K-k+2}{2} \right\rfloor$ predstavlja broj kuglica koje se sa čvorova kompletnog grafa mogu prebaciti na čvor a_1. Kako važi da je $K + P = 2^{l+1} + k - 2$, važi:

$$\left\lfloor \frac{K-k+2}{2} \right\rfloor + P = \left\lfloor \frac{2^{l+1} - P}{2} \right\rfloor + P$$

Ako je P deljivo sa 2, tada sledi:

$$\left\lfloor \frac{2^{l+1} - P}{2} \right\rfloor + P = \frac{2^{l+1} - P}{2} + P = 2^l + \frac{P}{2} \geq 2^l$$

Ako P nije deljivo sa 2, važi:

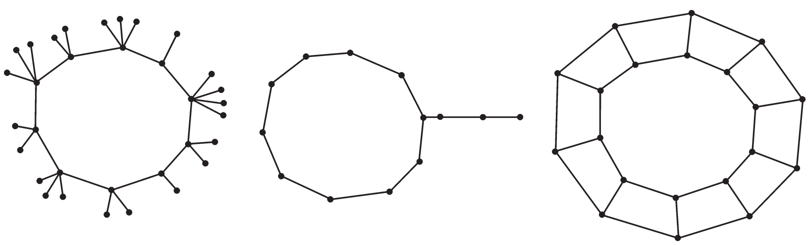
$$\left\lfloor \frac{2^{l+1}-P}{2} \right\rfloor + P = \frac{2^{l+1}-P}{2} - \frac{1}{2} + P = 2^l + \frac{1}{2}(P-1) \geq 2^l$$

U oba slučaja je pokazana nejednakost, odakle konačno sledi tačnost ovog tvrđenja. ■

Uopštenja ciklusa

Analogno posmatranim uopštenjima kompletnog grafa, definisaćemo dva unициklična uopštenja ciklusa sa parnim brojem čvorova i, pored ta dva, posmatraćemo još jedno uopštenje koje nije unициklično.

Prvo posmatrano uopštenje ciklusa, u oznaci $C_{2k;l_1,l_2,\ldots,l_{2k}}$, predstavlja klasu grafova u čijoj se osnovi nalazi ciklus dužine $2k$, a pritom su njegovi čvorovi povezani još sa određenim brojem listova, i to tako što je prvi čvor povezan sa još l_1 listova, drugi sa l_2 i tako redom. Drugo uopštenje, poznato kao lolipop graf, u oznaci $CP_{2k,l}$, predstavlja klasu u čijoj je osnovi, kao i malopre, ciklus, a jedan od njegovih čvorova je povezan sa putem sa l čvorova. Poslednje uopštenje koje smo posmatrali naziva se prizma grafovima (na nekim mestima i cikličnim merdevinama); predstavlja Dekartov proizvod grafova C_{2k} i P_2, ima $4k$ čvorova i označava sa CL_{2k}. Drugim rečima, graf CL_{2k} sačinjen je od dva ciklusa dužina $2k$ tako što je, ako su označavani sa $xa_1a_2\ldots a_{k-1}vb_{k-1}\ldots b_2b_1x$, odnosno $yc_1c_2\ldots c_{k-1}ud_{k-1}\ldots d_2d_1y$, čvorovi a_i, i c_i, b_i i d_i, zatim x i y, kao i v i u, međusobno povezani za $i \in \{1, 2, \ldots k-1\}$. Ciklus $xa_1a_2\ldots a_{k-1}vb_{k-1}\ldots b_2b_1x$ nazovimo unutrašnjim ciklusom, a $yc_1c_2\ldots c_{k-1}ud_{k-1}\ldots d_2d_1y$ spoljašnjim ciklusom. Primeri odgovarajućih klasa prikazani su redom na slici 5.



Slika 5. $C_{10;2,3,2,1,2,4,1,3,2,3}$, $CP_{10,3}$, CL_{10}

Figure 5. $C_{10;2,3,2,1,2,4,1,3,2,3}$, $CP_{10,3}$, CL_{10}

Teorema 3. Za prirodne brojeve $k \geq 2$ i $l_1, l_2, \ldots, l_{2k} \geq 1$ važi:

$$\pi(C_{2k;l_1,l_2,\ldots,l_{2k}}) = \sum_{i=1}^{2k} l_i + 2^{k+2} - 2$$

Dokaz. Neka je ciklus u osnovi označen sa $xa_1a_2\ldots a_{k-1}vb_{k-1}\ldots b_2b_1x$. Neka je v čvor na koji je zakačen ciljni list v_1.

Neka je x povezan sa l_1 listova, a_1 sa l_2 listova i tako redom. Neka se na svim listovima nalazi po jedna kuglica izuzev na listu v_1, koji je prazan.

Pretpostavimo da na raspolaganju imamo $\sum_{i=1}^{2k} l_i + 2^{k+2} - 3$ kuglica. Ako ostale kuglice smestimo na list l_1 (dodamo na „gomilu" sa onom jednom koja je već tu), tada će list v_1 ostati nedostižan jer će $p(x_1)$ biti jednak $2^{k+2} - 1 < 2^{d(x_1, v_1)}$. Odatle je jasno da $\pi(C_{2k; l_1, l_2, \ldots, l_{2k}}) > \sum_{i=1}^{2k} l_i + 2^{k+2} - 3$.

Pretpostavimo sada da na raspolaganju imamo $\sum_{i=1}^{2k} l_i + 2^{k+2} - 2$ kuglica. U slučaju da je neki list, koji nije v_1, prazan – na osnovu leme 2 (primenjene na zvezde sa centrom u čvoru sa ciklusa i odgovarajućim listovima), na njega uvek možemo dodati jednu kuglicu i time nećemo uticati na dostizanje čvora v_1, te neka se na svim listovima nalazi po jedna kuglica izuzev na listu v_1. Preostaje još $2^{k+2} - 1$ kuglica. Neka je $A = \sum_{i=1}^{k-1} p(a_i)$, a $B = \sum_{i=1}^{k-1} p(b_i)$. Na put $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ može doći još kuglica sa listova povezanih sa čvorovima tog puta. Neka na taj način na put $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ može doći tačno $d_1, d_1 \geq 0$ kuglica. Na sličan način, neka na put $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ može doći još tačno $d_2, d_2 \geq 0$ kuglica. Da bi to bilo moguće, moralo bi zbog leme 1 (primenjene na sve čvorove a_i i odgovarajuće listove i potom sumirajući) da na listovima spojenim sa tim putevima bude još najviše $2d_1$, odnosno $2d_2$ kuglica. Tada se na čvoru x i njegovim listovima nalazi još $2^{k+2} - 1 - A - B - 2d_1 - 2d_2$ kuglica (ne računajući već raspoređene kuglice). Prema lemi 1 (primenjene na čvor x i listove koji su nakačeni na njega) na čvor x može biti prebačeno $\left\lfloor \frac{2^{k+2} - A - B - 2d_1 - 2d_2}{2} \right\rfloor$ kuglica.

Pretpostavimo da sa ukupnim brojem kuglica postavljenih na ovaj graf nije moguće dostići ciljni čvor. Tada bi morale da važe sledeće nejednakosti:

$$\left\lfloor \frac{2^{k+2} - A - B - 2d_1 - 2d_2}{4} \right\rfloor + d_1 + A \leq 2^k - 1$$

$$\left\lfloor \frac{2^{k+2} - A - B - 2d_1 - 2d_2}{4} \right\rfloor + d_2 + B \leq 2^k - 1$$

Prva nejednakost proizilazi iz situacije kada prebacimo sve kuglice koje možemo sa čvora x na čvor a_1. Druga se analogno dobija iz posmatranja kada se se sa x prebacuje na b_1.

Minimizovanjem levih strana dobijamo:

$$\frac{2^{k+2} - A - B - 2d_1 - 2d_2}{4} - \frac{3}{4} + d_1 + A \leq 2^k - 1$$

$$\frac{2^{k+2} - A - B - 2d_1 - 2d_2}{4} - \frac{3}{4} + d_2 + B \leq 2^k - 1$$

Sabiranjem ovih nejednakosti nakon sređivanja dobijamo:

$$\frac{A+B}{2} + 2^{k+1} - \frac{3}{2} \leq 2^{k+1} - 2$$

što je netačno, odakle sledi da je sa ovim brojem kuglica uvek moguće dostići ma koji ciljni čvor. ■

Teorema 4. Za prirodne brojeve $k \geq 2$ i $l \geq 1$ važi:

$$\pi(CP_{2k,l}) = 2^{k+l}$$

Dokaz. Neka za posmatrani ciklus $xa_1 a_2 \ldots a_{k-1} vb_{k-1} \ldots b_2 b_1 x$ važi da je čvor v povezan (direktno) sa putem dužine l, tako da je čvor c_1 na najmanjem, a c_l na najvećem rastojanju od v. Ostale čvorove puta označimo redom. Ako se na čvoru x nalazi $2^{k+l} - 1$ kuglica, tada će čvor c_l ostati nedostižan, te je $\pi(C_{2k,l}) > 2^{k+l} - 1$. Pretpostavimo da je 2^{k+l} kuglica raspoređeno na čvorove ovog grafa. Označimo sa C broj svih kuglica na ciklusu, a sa P broj svih kuglica na putu.

Može se pokazati da je broj kuglica potreban da bi se nakon određenog broja poteza u nekom čvoru puta nalazilo t kuglica jednak $t\pi(P_n)$, a za ciklus sa parnim brojem čvorova $t\pi(C_{2k})$.

U slučaju kada se ciljni čvor se nalazi na putu dovoljno je pokazati da važi:

$$\left\lfloor \frac{C}{2^k} \right\rfloor + P \geq 2^l$$

$\left\lfloor \frac{C}{2^k} \right\rfloor$ predstavlja broj kuglica koji može biti prebačen sa ciklusa na čvor v. Koristeći da je $C + P = 2^{k+l}$ dobijamo:

$$\left\lfloor \frac{C}{2^k} \right\rfloor + P = \left\lfloor \frac{2^{k+l} - P}{2^k} \right\rfloor + P = \left\lfloor 2^l - \frac{P}{2^k} \right\rfloor + P$$

$$\left\lfloor 2^l - \frac{P}{2^k} \right\rfloor + P = 2^l - \left\lfloor \frac{P}{2^k} \right\rfloor + P \geq 2^l$$

U slučaju kada se ciljni čvor se nalazi na ciklusu, dovoljno je pokazati da važi:

$$C + \left\lfloor \frac{P}{2^l} \right\rfloor \geq 2^k$$

Ovo postižemo na isti način kao u prethodnom slučaju, odakle sledi tačnost ovog tvrđenja. ■

Teorema 5. Za prirodan broj $k \geq 2$ važi:

$$2^{k+1} \leq \pi(CL_{2k}) \leq 2^{k+1} + 1$$

Dokaz. Ako se na čvoru x nalazi $2^{k+1} - 1$ kuglica, jasno je da je čvor u nedostižan (jer je $d(x,u) = k+1$), te je $\pi(CL_{2k}) \geq 2^{k+1}$.

Pretpostavimo da je na čvorove grafa postavljeno $2^{k+1} + 1$ kuglica. Neka je $AC = \sum_{i=1}^{k-1} p(a_i) + \sum_{i=1}^{k-1} p(c_i)$, a $BD = \sum_{i=1}^{k-1} p(b_i) + \sum_{i=1}^{k-1} p(d_i)$. Zbog simetričnosti grafa, bez umanjenja opštosti, neka je u ciljni čvor. Ako se na čvoru v nalazi jedna kuglica, tada će po Dirihleovom principu ili na unutrašnjem ciklusu biti više ili jednako od 2^k kuglica, pa će još jedna kuglica moći da dođe do čvora v ili će na spoljašnjem ciklusu biti više ili jednako od 2^k, te će čvor u biti dostižan. Zato u ostatku dokaza posmatrajmo samo slučaj kada je $p(v) = 0$. Posmatrajmo sada sledeće cikluse ovog grafa: $a_1 a_2 \ldots a_{k-1} vuc_{k-1} \ldots c_2 c_1 a_1$ i $b_1 b_2 \ldots b_{k-1} vud_{k-1} \ldots d_2 d_1 b_1$. Prebacivanjem svih mogućih kuglica sa čvorova x i y na a_1 i c_1, odnosno na b_1 i d_1, i pretpostavkom da je sa $2^{k+1}+1$ kuglica nemoguće dostići ciljni čvor u dobijamo sledeće nejednakosti:

$$\left\lfloor \frac{p(x)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p(y)}{2} \right\rfloor + AC \leq 2^k - 1$$

$$\left\lfloor \frac{p(x)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p(y)}{2} \right\rfloor + BD \leq 2^k - 1$$

Minimizovanjem levih strana nejednakosti i potom sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo:

$$p(x) + p(y) - 2 + AC + BD \leq 2^{k+1} - 2$$

što je netačno zbog $p(x) + p(y) + AC + BD = 2^{k+1} + 1$, te važi

$$\pi(CL_{2k}) \leq 2^{k+1} + 1. \ \blacksquare$$

Razmotrimo sada slučaj kada je na čvorove ovog grafa postavljeno 2^{k+1} kuglica ($p(x) + p(y) + AC + BD = 2^{k+1}$). Primetimo da se ne može tvrditi da će taj broj kuglica biti sa sigurnošću dovoljan da bi se dostigao čvor u u slučaju jednakosti prethodne tri formule. Te jednakosti se dostižu kada su oba $p(x)$ i $p(y)$ neparni i kada je $AC = BD$. Nazovimo ovaj slučaj kritičnim. U svim ostalim slučajevima 2^{k+1} kuglica je dovoljno da bi se ciljni čvor dostigao. Za male vrednosti broja k može se pokazati da će i u kritičnom slučaju biti dovoljno 2^{k+1} kuglica. Takođe, primetimo da će, ako bi $\pi(CL_{2k})$ bilo jednako $2^{k+1}+1$, Grejamova hipoteza biti oborena, te zbog toga i prethodnog razmatranja verujemo da je $\pi(CL_{2k}) = 2^{k+1}$, iako to ne možemo pokazati.

Uopšteni graf pebling

Kao što je več spomenuto, problem graf peblinga postavljen kao u prethodnim glavama predstavlja model u kom, da bismo sa određenog mesta na susedno prebacili jedan resurs, moramo platiti takođe jednim resursom. Zbog toga je prirodno posmatrati i situaciju koja je prisutnija, gde plaćamo jednim resursom da bismo prebacili najviše njih p, ako je p neki proizvoljni prirodan broj. Slično pebling potezu i pebling broju nekog grafa, definisaćemo p-pebling potez i p-pebling broj nekog grafa G, u oznaci $\pi^p(G)$. p-pebling potez sastoji se iz uzimanja k kuglicâ sa nekog čvora, gde je $2 \leq k \leq p+1$ i prebacivanja $k-1$ kuglice na neki od susednih čvorova (jedna kuglica se odbacuje kao „cena transporta"). p-pebling broj nekog grafa predstavlja najmanji broj kuglica, takav da se, za bilo koji raspored tih kuglica na čvorovima grafa i biranjem bilo kog čvora grafa G za ciljni čvor, nakon određenih p-pebling poteza na ciljnom čvoru može nalaziti barem jedna kuglica. Primetimo da se za $p = 1$ problem svodi na klasičnu definiciju graf peblinga.

Napomena. U ovom uopštenju posmatramo situaciju u kojoj se teži tome da uvek prebacimo najviše kuglica što možemo, tj. ako je moguće prebaciti k kuglica, za neko $k \in N$, uvek ćemo to učiniti i nećemo prebaciti manje od k.

Naredne dve leme govore o količini kuglica koje mogu biti prebačene sa nekog čvora na njemu susedni čvor.

Lema 3. Ako se na čvoru v nalazi d kuglica, tada se na susedni čvor u može prebaciti najviše $\left\lfloor \frac{p}{p+1} \cdot d \right\rfloor$ kuglica.

Dokaz. Prema definiciji p-pebling poteza, ako je na čvoru v bilo $d = k(p+1)+m$, gde $m \in \{0, 1, 2, \ldots, p\}$, tada se na susedni čvor u može prebaciti najviše kp kada je $m = 0$, odnosno $kp + m - 1$ ako $m \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$. Pokazaćemo da je:

$$kp + m - 1 = \left\lfloor \frac{p}{k+1}(k(p+1)+m) \right\rfloor$$

za $m \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ (kada je $m = 0$, tvrđenje je očigledno):

$$\left\lfloor \frac{p}{p+1}(k(p+1)+m) \right\rfloor = \left\lfloor kp + \frac{p}{p+1} m \right\rfloor = kp + \left\lfloor \frac{mp}{p+1} \right\rfloor =$$

$$= kp + \left\lfloor \frac{(m-1)(p+1) + p + 1 - m}{p+1} \right\rfloor = kp + m - 1 + \left\lfloor \frac{p+1-m}{p+1} \right\rfloor =$$

$$= kp + m - 1 \blacksquare$$

Lema 4. Ako je sa čvora v na susedni čvor u prebačeno d kuglica, tada se na čvoru v nalazilo barem $\left\lceil \frac{p+1}{p} \cdot d \right\rceil$ kuglica.

Dokaz. Ovu lemu dokazaćemo slično kao prethodnu. Ako se nakon prebacivanja na čvoru u nalazi $d = kp + m$, gde $m \in \{0, 1, 2, \ldots, p\}$, tada je prema definiciji p-pebling poteza na čvoru v bilo barem $k(p+1) + m + 1$, $m \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$, odnosno $k(p+1)$ kada je $m = 0$. Sada ćemo pokazati da je $k(p+1) + m + 1 = \left\lceil \frac{p+1}{p}(kp+m) \right\rceil$, za $m \in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ (ponovo, za $m = 0$ tačnost tvrđenja očigledno važi).

$$\left\lceil \frac{p+1}{p}(kp+m) \right\rceil = \left\lceil k(p+1) + \frac{p+1}{p} \cdot m \right\rceil = k(p+1) + \left\lceil m + \frac{m}{p} \right\rceil =$$

$$= k(p+1) + m + 1 \blacksquare$$

U prethodnom dokazu, primetimo da je $\left\lceil \frac{p+1}{p} \cdot d \right\rceil \not\equiv 1 \pmod{p+1}$. Od značaja će nam biti i sledeća lema.

Lema 5. Za prirodne brojeve p i d važi sledeći identitet:

$$\left\lfloor \frac{p}{p+1} \left\lceil \frac{p+1}{p} \cdot d \right\rceil \right\rfloor = d$$

Dokaz. Za neko $k \in N \cup \{0\}$ i za $m \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, svaki prirodni broj d možemo predstaviti kao $d = kp + m$, te vredi:

$$\left\lfloor \frac{p}{p+1} \left\lceil \frac{p+1}{p}(kp+m) \right\rceil \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p}{p+1} \left\lceil k(p+1) + m + \frac{1}{p} \right\rceil \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p}{p+1}(k(p+1)+m+1) \right\rfloor = \left\lfloor kp + \frac{mp+p}{p+1} \right\rfloor =$$

$$= kp + \left\lfloor \frac{m(p+1)+p-m}{p+1} \right\rfloor = kp + \left\lfloor m + \frac{p-m}{p+1} \right\rfloor = kp + m \blacksquare$$

Teorema 6. Za svako $p \in N$ važi:

$$\pi^p(P_n) = \left\lceil \frac{p+1}{p} \pi^p(P_{n-1}) \right\rceil$$

uz početni uslov $\pi^p(P_1) = 1$.

Dokaz. Dokažimo prvo da je $\pi^p(P_n) > \left\lceil \frac{p+1}{p} \pi^p(P_{n-1}) \right\rceil - 1$. Posmatrajmo raspored u kojem se $\left\lceil \frac{p+1}{p} \pi^p(P_{n-1}) \right\rceil - 1$ kuglica nalazi na čvoru a_1. Čvorovi $a_2, a_3, \ldots, a_n$ čine put dužine $n-1$, te je potrebno sa čvora a_1 na čvor a_2 prebaciti $\pi^p(P_{n-1})$ kuglica, a prema lemi 3 to nije moguće.

Pokažimo da je $\pi^p(P_n) \le \left\lceil \frac{p+1}{p} \pi^p(P_{n-1}) \right\rceil$. Neka je $\left\lceil \frac{p+1}{p} \pi^p(P_{n-1}) \right\rceil$ kuglica raspoređeno na čvorove puta P_n. Neka je $A = p(a_1)$, a $B = \sum_{i=2}^{n} p(a_i)$.

Posmatrajmo 3 slučaja:

1) $B = 0$

Ispitujemo slučaj kada je ciljni čvor neki od $a_i, i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ (slučaj kada je ciljni čvor a_1 je trivijalan). U ovom rasporedu, na a_1 nalazi se $\left\lceil \frac{p+1}{p} \pi^p(P_{n-1}) \right\rceil$ kuglica. Prema lemama 4 i 5 na a_2 može biti prebačeno $\pi^p(P_{n-1})$ kuglica, što je dovoljno da bi se na ciljnom čvoru našla barem jedna kuglica.

2) $A > 0$ i $B > 0$

Ako je ciljni čvor a_1, završili smo, a ako nije, prebacimo sve kuglice sa čvora a_1 na čvor a_2. Tada se na putu $a_2, a_3, \ldots, a_n$ nalazi $\left\lfloor \frac{p}{p+1} \cdot A \right\rfloor + B$ kuglica. Pokazaćemo da je $\left\lfloor \frac{p}{p+1} \cdot A \right\rfloor + B \ge \pi^p(P_{n-1})$.

Kako je $A+B=\left\lceil \frac{p}{p+1}\cdot\pi^p(P_{n-1})\right\rceil$, važi:

$$\left\lfloor \frac{p}{p+1}\cdot A\right\rfloor + B = \left\lfloor \frac{p}{p+1}\left\lceil \frac{p+1}{p}\pi^p(P_{n-1})\right\rceil - \frac{p}{p+1}B\right\rfloor + B =$$

$$=\left\lfloor \frac{p}{p+1}\left\lceil \frac{p+1}{p}\pi^p(P_{n-1})\right\rceil - B + \frac{B}{p+1}\right\rfloor + B =$$

$$=\left\lfloor \frac{p}{p+1}\left\lceil \frac{p+1}{p}\pi^p(P_{n-1})\right\rceil + \frac{B}{p+1}\right\rfloor - B + B \geq$$

$$\geq \left\lfloor \frac{p}{p+1}\left\lceil \frac{p+1}{p}\pi^p(P_{n-1})\right\rceil\right\rfloor = \pi^p(P_{n-1})$$

3) $A=0$

Jasno je da se, ako je ciljni čvor neki od $a_2, a_3, \ldots, a_n$, kroz niz poteza može na tom čvoru naći bar jedna kuglica, jer je $B=\left\lceil \frac{p+1}{p}\cdot\pi^p(P_{n-1})\right\rceil \geq$ $\geq \pi^p(P_{n-1})$. Dakle, neka je ciljni čvor a_1. Ako se na čvoru a_n ne nalazi nijedna kuglica, tada se na putu $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ nalazi $\left\lceil \frac{p+1}{p}\cdot\pi^p(P_{n-1})\right\rceil$, te se na a_1 može nalaziti bar jedna kuglica nakon niza p-pebling poteza. Međutim, ako se na čvoru a_n nalazi određen broj kuglica, tada (ako posmatramo a_n kao jednu celinu, a $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ kao drugu) prema 2) sledi da se na čvoru a_1 može nalaziti bar jedna kuglica. ■

Kao što smo već naveli u uvodu, u graf peblingu su od posebnog značaja klase grafova čiji je pebling broj jednak broju čvorova tog grafa, 0-klasa grafova. Stoga, prirodno je postaviti pitanje kada će uopšteni pebling broj puta biti jednak broju čvorova. O ovom pitanju govore sledeća dva tvrđenja.

Teorema 7. Za svako $p\in N$ i svaki graf G sa n čvorova važi da, ako je $\pi^p(G)=n$, tada je i $\pi^{p+1}(G)=n$.

Dokaz ovog tvrđenja očigledno sledi na osnovu definicije p-pebling poteza.

Teorema 8. Za svako $p\in N$ i $i\in\{1, 2, \ldots, p+1\}$ važi:

$$\pi^p(P_i)=i$$

Dokaz. Direktna primena teoreme 6.

Teorema 9. Za svako $i\in\{1, 2, \ldots, n-1\}$ važi:

$$\pi^p(P_n)\geq\pi^p(P_{n-i})+\pi^p(P_i)$$

Dokaz. Posmatrajmo raspored kuglica u kojem se na čvoru a_1 nalazi $\pi^p(P_i)-1$ kuglica, a na čvoru a_n $\pi^p(P_{n-i})$ kuglica, za neko $i\in\{1, 2, \ldots,$

$n-1\}$. Tada se na čvoru a_i nikako ne može naći barem jedna kuglica, te je: $\pi^p(P_n) > \pi^p(P_{n-i}) + \pi^p(P_i) - 1$, iz čega sledi: $\pi^p(P_n) \geq \pi^p(P_{n-i}) + \pi^p(P_i)$. ■

Teorema 10. Za svako $p \in N$ važi:

$$\gamma^p(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \pi^p(P_i)$$

Dokaz. Pokažimo prvo da je $\gamma^p(P_n) > \sum_{i=1}^{n} \pi^p(P_i) - 1$. Neka se na čvoru a_1 nalazi $\sum_{i=1}^{n} \pi^p(P_i) - 1$ kuglica. Tada, da bi se dostigao čvor a_n, potrebno je $\pi^p(P_n)$ kuglica, da bi se dostigao čvor a_{n-1}, potrebno je $\pi^p(P_{n-1})$ kuglicâ, …, a da bi se dospelo do čvora a_2, potrebno je $\pi^p(P_2)$ kuglica. Međutim, kako je $\pi^p(P_1) = 1$, tada za a_n neće preostati nijedna kuglica, odakle sledi tačnost.

Pokažimo sada da je $\gamma(P_n) \leq \pi^p(P_i)$, koristeći indukciju po n. Za $n = 1$ jednakost je očigledna. Sada, neka je $\sum_{i=1}^{n} \pi^p(P_i)$ kuglica raspoređeno na čvorove grafa P_n. Ako se na čvoru a_n ne nalazi nijedna kuglica, tada je potrebno najviše $\pi^p(P_n)$ kuglica da bi se na a_n nalazila barem jedna, te je na putu od čvora a_1 do a_{n-1} ostalo barem $\sum_{i=1}^{n-1} \pi^p(P_i)$, što je prema induktivnoj hipotezi dovoljno da bi se na svakom čvoru a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ nakon određenog niza poteza nalazila bar jedna kuglica. Ako se na a_n nalazi $p(a_n) > 0$ kuglica, ostavimo jednu od njih na a_n, a od ostatka prebacimo koliko možemo na a_{n-1}. Tada znamo: $p(a_1) + p(a_2) + \ldots + p(a_n) = \sum_{i=1}^{n} \pi^p(P_i)$. Ako je $p(a_n)$ manje ili jednako od $\pi^p(P_n)$, prema induktivnoj hipotezi sledi tačnost. Ako je $p(a_n)$ veće od $\pi^p(P_n)$ pitamo se da li važi:

$$p(a_1) + p(a_2) + \ldots + p(a_n) + \left\lfloor \frac{p}{p+1}(p(a_n) - 1) \right\rfloor = \sum_{i=1}^{n} \pi^p(P_i) -$$

$$-p(a_n) + \left\lfloor \frac{p}{p+1}(p(a_n) - 1) \right\rfloor \geq \sum_{i=1}^{n-1} \pi^p(P_i)$$

Pretpostavimo suprotno, neka je:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi^p(P_i) - p(a_n) + \left\lfloor \frac{p}{p+1}(p(a_n) - 1) \right\rfloor < \sum_{i=1}^{n-1} \pi^p(P_i)$$

Kako je $p(a_n) > \pi^p(P_n)$, tada se on može predstaviti kao:

$$p(a_n) = \pi^p(P_n) + k,\ 1 \leq k \leq \sum_{i=1}^{n-1} \pi^p(P_i)$$

Onda važi:

$$\pi^p(P_n) - \pi^p(P_n) - k + \left\lfloor \frac{p}{p+1}(\pi^p(P_n) + k - 1) \right\rfloor < 0$$

$$k > \left\lfloor \frac{p}{p+1}(\pi^p(P_n) + k - 1) \right\rfloor$$

Sada možemo izraziti k kao $k = \sum_{i=1}^{n-1} \pi^p(P_i) - m$,

$m \in \{0, 1, \ldots \sum_{i=1}^{n-1} \pi^p(P_i) - 1\}$

Dalje sledi:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \pi^p(P_i) - m \;>\; \left\lfloor \frac{p}{p+1}\pi^p(P_n) \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p}{p+1}\pi^p(P_{n-1}) \right\rfloor + \ldots$$

$$+ \left\lfloor \frac{p}{p+1}\pi^p(P_2) \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p}{p+1}\cdot m \right\rfloor$$

to jest:

$$\left\lfloor \frac{p}{p+1}\cdot m \right\rfloor \;>\; m$$

Sada, ako je $m = 0$, to znači da se $\sum_{i=1}^{n} \pi^p(P_i)$ kuglica nalazi na čvoru a_n, odakle sledi tačnost tvrđenja, a u slučaju $m > 0$ poslednja nejednakost je netačna, odakle ponovo sledi tačnost tvrđenja. ■

Literatura

Crull B., Cundiff T., Feltman P., Hurlbert G., Pudwell L., Szaniszlo Z., Tuza Z. 2005. The Cover Pebbling Number of Graphs. *Discrete Mathematics*, **296**: 15.

Hurlbert G. H. 1999. A Survey of Graph Pebbling, *Congressus Numerantium*, **139**: 41.

Hurlbert G. H. 2014. Graph Pebbling. U *Handbook of Graph Theory*, 2nd ed. (ur. J. Gross *et al.*). CRC Press, str. 1428-1450.

Pachter L., Snevily H. S., Voxman B. 1994. On Pebbling Graphs, *Congressus Numerantium*, **107**: 65.

Dušan Dragutinović and Vukoman Pejić

Graph Pebbling

Graph pebbling is a one-player mathematical game involving a graph and pebbles which can be used as a model for resource-transport. Consider a undirected connected graph G with pebbles on its vertices. A pebbling move consists of taking two pebbles off one vertex (which has at least two pebbles) and placing one on an adjacent vertex. The pebbling number of a graph G, $\pi(G)$, is the minimal number of pebbles sufficient to reach (after a finite number of moves) a configuration of pebbles in which the target vertex has at least one pebble, starting from an arbitrary configuration with $\pi(G)$ pebbles, regardless of the choice of target vertex. In this paper, pebbling numbers of some graph classes (induced by complete graphs and cycles) are determined. Additionally, a new generalization of graph pebbling in which $p \in N$ pebbles could be moved to adjacent vertex is introduced and some results regarding this generalization are presented.