Dušan Dragutinović i Đorđe Ivanović

Obojene jednačine

U ovom radu smo, na osnovama Remzijeve teorije želeli da za odabranu diofantsku jednačinu utvrdimo da li za svako bojenje prirodnih brojeva sa konačno mnogo boja ona ima rešenje takvo da su sve promenljive u istoj boji. Naime, pitali smo se da li će za datu jednačinu, pri slučajnom bojenju skupa prirodnih brojeva postojati neko rešenje takvo da su sve promenljive istobojne. Ovo smo radili po uzoru na Šurovu teoremu, koja tvrdi da će pri slučajnom bojenju dovoljno velikog podskupa prirodnih brojeva uvek postojati istobojna rešenja jednačine $x+y=z$. Koristeći indukciju po broju boja pokazali smo da će postojati istobojna rešenja jednačine $x+c\cdot y=z$, za svaki parametar $c\in N$. Pored toga, utvrđivali smo egzistenciju nekih jednobojnih konfiguracija pri slučajnom bojenju čvorova mreže $N\times N$. Kao jedan od dva glavna rezultata rada dokazali smo postojanje jednobojne konfiguracije tačaka koja čini određenu mrežu u ravni.

Uvod

U osnovi ovog rada je zamisao da se ispita da li za odabranu diofantsku jednačinu možemo utvrditi da li za proizvoljno bojenje prirodnih brojeva sa konačno mnogo boja postoji takvo rešenje da su sve promenljive u istoj boji. Naime, pitali smo se da li će za datu jednačinu, pri slučajnom bojenju skupa prirodnih brojeva, postojati takvo rešenje da su sve promenljive istobojne. Ova ideja potiče od Šurove teoreme koja tvrdi da za ovako postavljen problem, jednačina $x+y=z$ uvek ima jednobojno rešenje. Utvrđivanje egzistencije jednobojnih rešenja jednačina predstavlja prvi deo ovog rada, dok se drugi deo sastoji u utvrđivanju egzistencije jednobojnih konfiguracija pri slučajnom bojenju čvorova mreže $N\times N$ konačnim brojem boja.

Kada govorimo o bojenju nekog skupa A prirodnih brojeva u m boja, pod time podrazumevamo formiranje m disjunktnih podskupova skupa A. To pravljenje particija, disjunktnih podskupova, predstavlja formalniji način iskazivanja i preko njega ćemo ponuditi dokaz Šurove teoreme, dok ćemo u ostatku rada koristiti formulaciju preko boja.

Dušan Dragutinović (1996), Pančevo, Kikindska 3, učenik 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

Đorđe Ivanović (1995), Čačak, Kursulina 4, učenik 4. razreda Gimnazije u Čačku

MENTOR: Stefan Mihajlović, student Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu

U prvom odeljku navedena je Remzijeva teorema kao osnovni matematički aparat korišćen pri dokazivanju naših tvrđenja. U narednom odeljku data je Šurova teorema, a dokazali smo da određene jednačine, slične jednačini kojom se ona bavi, imaju jednobojna rešenja. Te jednačine su:

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} = x_k$,

$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = y_1 + y_2 + \ldots + y_l$, i

$x \cdot y = z$.

U trećem odeljku dokazali smo da postoje bojenja prirodnih brojeva, takva da neke diofantske jednačine nemaju jednobojna rešenja. U četvrtom odeljku je data Van der Vardenova teorema, koja se zajedno sa matematičkom indukcijom po broju boja, koristila u dokazivanju da jednačina $x + c \cdot y = z$ ima jednobojna rešenja. U poslednjem odeljku rešeni su i dokazani primeri i tvrđenja o postojanju određenih konfiguracija pri bojenju čvorova mreže $N \times N$.

Dirihleov princip i Remzijeva teorema

Dirihleov princip

Dirihleov princip je jednostavno tvrđenje koje se može koristiti prilikom dokazivanja nekih kombinatornih konfiguracija. Poznat je kao princip ptica i kaveza, a naziva se i principom predmeta i kutija.

Teorema 1.1. Ako se m ptica rasporedi u n kaveza i ako je $m > n$, tada će u bar jednom kavezu biti bar dve ptice.

Dokaz. Pretpostavimo da smo rasporedili sve ptice u n kaveza i da pri tome ne postoji kavez koji sadrži bar dve ptice. Tada svaki od n kaveza sadrži ili jednu pticu ili je prazan, pa je ukupan broj ptica u svim kavezima najviše n. To je kontradikcija sa pretpostavkom da je ukupan broj ptica veći od broja kaveza. Stoga mora da postoji neki kavez sa bar dve ptice ■

Formalnije uopštenje glasi:

Teorema 1.2 (Dirihleov princip). Neka je $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ razbijanje skupa S sa $n \cdot k + 1$ elemenata na k blokova. Tada bar jedan od skupova $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sadrži ne manje od $n + 1$ elemenata.

Dokaz (Mladenović 2001). Pretpostavimo suprotno, tj. $|A_j| \leq n$ za sve brojeve $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Tada je $|S| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k| \leq k \cdot n$, a to je kontradikcija sa uslovom $S = n \cdot k + 1$ ■

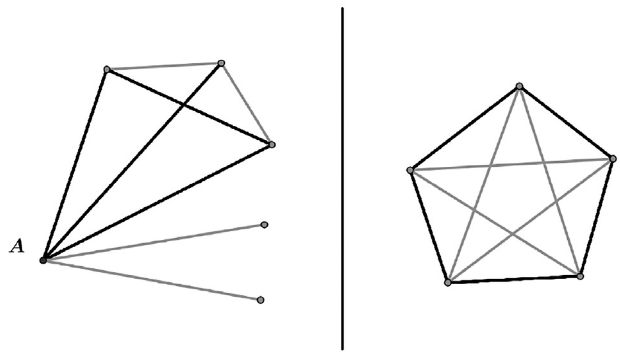
Remzijeva teorema

F. P. Remzi je izveo teoremu koja predstavlja uopštenje Dirihleovog principa i osigurava egzistenciju tzv. Remzijevih brojeva, kojima se bavi Remzijeva teorija, o čemu će biti reči u nastavku. Neformalno govoreći, Remzijeva teorija kaže da u dovoljno velikom broju objekata, uvek postoji pravilna struktura unapred zadate veličine. Osnovnu ideju Remzijeve teorije možemo ilustrovati jednim jednostavnim primerom, koji se često pojavljivao kao zadatak na matematičkim takmičenjima.

Primer. Dokazati da u grupi od šestoro ljudi uvek važi bar jedno od sledeća dva tvrđenja: postoje troje ljudi tako da se svako dvoje međusobno poznaju (1), ili postoje troje ljudi tako da se nikoje dve osobe među njima ne poznaju (2). Da li to mora da važi i za petoro ljudi?

Rešenje (Jojić 2011). Neka je A jedna osoba iz te grupe. Ostalih petoro ljudi podelimo u dve grupe tako da su u jednoj oni koji se poznaju sa A, dok su u drugoj grupi oni koji se ne poznaju sa A. Na osnovu Dirihleovog principa, u bar jednoj grupi postoji bar troje ljudi. Posmatrajmo situaciju kada osoba A ima 3 poznanika. Ako među to troje postoji par koji se poznaje, taj par zajedno sa osobom A, čini trojku znanaca. U tom slučaju je ispunjeno tvrđenje (1). Ako se nikoje dvoje poznanika od A ne poznaju, onda ta tri poznanika od A čine trojku u kojoj se nikoje dve osobe ne poznaju, odnosno važi tvrđenje (2). Sličnim razmatranjem, zadatak rešavamo ako grupa ljudi koji se ne poznaju sa osobom A ima tri osobe.

Prethodno razmatranje se može lepo opisati grafički. Ljude predstavimo kao tačke u ravni, tako da su svake tri tačke u tom skupu nekolinearne. Na slici je predstavljen problem poznanika i stranaca, tako da crvenoj boji odgovara crna, a plavoj siva linija:



Ako se dve osobe poznaju, odgovarajuće tačke spojimo crvenom linijom, a ako se ne poznaju, plavom. Tako su svake dve tačke spojene crvenom ili plavom linijom. Upravo smo pokazali da se u skupu od šest tačaka, u kojem su svake dve tačke spojene crvenom ili plavom linijom, uvek može naći trougao kojem su sve ivice ili obojene crveno ili obojene plavo. U grupi od petoro ljudi tvrđenje iz prethodnog primera ne mora da važi: Ako su stranice petougla obojene crveno, a dijagonale plavo, nema trougla sa istobojnim stranicama.

Logično je postaviti pitanje: da li za proizvoljne brojeve p i q postoji prirodan broj $R(p, q)$ tako da u svakom društvu sa bar R ljudi postoji

(1) ili njih p, tako da se svako dvoje među njima poznaju,

(2) ili njih q između kojih se nikoje dve osobe ne poznaju?

Primetimo da za sve $p, q \geq 2$ važi da je $R(p,2) = p$ jer se u grupi od p ljudi ili svakih dvoje među sobom poznaju, ili postoji neka osoba koja se ne poznaje sa nekom drugom osobom. Na sličan način, primetimo da je $R(2, q) = q$.

Teorema 1.3. Neka su p i q prirodni brojevi veći od jedan. Ako postoje brojevi $R(p,q-1)$ i $R(p-1,q)$ tada postoji i $R(p,q)$ i važi:

$$R(p,q) \le R(p,q-1) + R(p-1,q).$$

Dokaz (Jojić 2011). Uočimo skup od $n = R(p,q-1) + R(p-1,q)$ ljudi, i u tom skupu izaberimo jednu osobu. Preostalih $n-1$ ljudi rasporedimo u dve grupe:

(1) u prvoj grupi su svi oni koji poznaju odabranu osobu,

(2) drugu grupu čine ljudi koji ne poznaju odabranu osobu.

Ili se u prvoj grupi nalazi bar $R(p-1,q)$ ljudi, ili ih u drugoj grupi ima bar $R(p,q-1)$, jer u suprotnom bi prva i druga grupa ukupno imale manje ili jednako od $R(p,q-1) + R(p-1,q) - 2$ osoba.

Ako u prvoj grupi postoji $R(p-1,q)$, važi bar jedno od sledeća dva tvrđenja:

(1) Među njima postoji $p-1$ osoba tako da se svake dve od njih poznaju. Kada im se doda odabrana osoba, koja ih sve poznaje, to je traženih p ljudi između kojih se svi poznaju.

(2) Među tim ljudima postoji q osoba među kojima se nikoje dve osobe ne poznaju.

Na sličan način, može se pokazati da nejednakost $R(p,q) \le R(p,q-1) + {} + R(p-1,q)$ važi i ako u drugoj grupi ljudi postoji bar njih $R(p-1,q)$. Iz te nejednakosti se potom indukcijom po $p+q$ može lako dokazati da za sve p i q postoji $R(p,q)$ ■

Broj $R(p,q)$ naziva se Remzijev broj.

Teorema 1.4 (Remzijeva teorema). Neka su dati prirodni brojevi k, m; $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m$. Tada postoji najmanji prirodan broj $n = R(k,m;a_1,a_2,\ldots,a_m)$ takav da važi: ako se svi k-člani podskupovi nekog skupa oboje sa m boja $b_1, b_2, \ldots, b_m$ tada postoji $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ i neki a_i-člani podskup posmatranog skupa kojem su svi k-člani podskupovi obojeni istom bojom b_i.

Brojevi $R(k,m;a_1,a_2,\ldots,a_{m-1},a_m)$ se nazivaju uopšteni Remzijevi brojevi. U ovoj terminologiji je $R(p,q) = R(2,2;p,q)$. Možemo primetiti da je Dirihleov princip samo specijalan slučaj Remzijeve teoreme. Kod uopštenih Remzijevih brojeva teorema 1.1 i teorema 1.2 se mogu ovako zapisati:

$$R(1,m;2,2,\ldots,2) = m+1, \;\; R(1,m;c,c,\ldots,c) = m(c-1)+1.$$

Egzistencija uopštenog Remzijevog broja se pokazuje na sličan način kao i u dokazu teoreme 1.3. Koristimo indukciju po k i po $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$. Konkretni dokazi ove, kao i teoreme 1.6, dati su u knjizi Elementi enumerativne kombinatorike (Jojić 2011).

Neposredna posledica teoreme 1.4 je sledeći rezultat:

Teorema 1.5. Neka su $m, q_1, q_2, \ldots, q_m$ proizvoljni prirodni brojevi veći od jedinice. Tada postoji najmanji prirodan broj $R = (2,m;q_1,q_2,\ldots,q_m)$ koji zavisi samo od brojeva $q_1, q_2, \ldots, q_m$, takav da važi:

Ako je $n \ge R$, onda za svako bojenje ivica kompletnog n-grafa pomoću m boja postoji monohromatski q_1-podgraf prve boje ili monohromatski

q_2-podgraf druge boje, …, ili postoji monohromatski q_m-podgraf m-te boje. Monohromatski podgraf je onaj podgraf kod koga su sve ivice obojene istom bojom.

Ponekad je korisno posmatrati verziju Remzijeve teoreme za beskonačne skupove.

Teorema 1.6 (Beskonačna Remzijeva teorema). Neka su dati prirodni brojevi k i m i beskonačan skup X. Ako se svi k-člani podskupovi skupa X oboje sa m boja, postoji beskonačan podskup Y od X, takav da su svi k-člani podskupovi od Y obojeni istom bojom.

Opšte napomene. U našem radu posmatraćemo samo Remzijeve brojeve oblika $R(2, m; c, c, \ldots, c, c)$ i za njih ćemo koristiti oznaku $R_m(c)$. Promenljive ćemo označavati sa x, y, z, odnosno sa x_1, x_2, x_3 i y_1, y_2, y_3. Konstante ćemo označavati sa $c, c_1, c_2, c_3, \ldots$ Boje će biti određene funkcijom $c(i)$, koja broju i dodeljuje boju $c(i)$, $c : \{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, m\}$.

Šurova teorema

Teorema i njen dokaz

Šurova teorema je značajna teorema iz oblasti Remzijeve teorije. Dokazao ju je Isai Šur 1916. godine i ona tvrdi da za svako bojenje skupa N, sa konačno mnogo boja, uvek postoje jednobojna rešenja jednačine $x + y = z$. Zanimljivo je da se ona koristi pri dokazu naizgled dosta različite teoreme. Naime, I. Šur se te godine bavio jednim oblikom velike Fermaove teoreme i dokazao da kongruencija $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$ ima netrivijalna rešenja za sve „velike" proste brojeve p. Taj dokaz možemo naći kod Nila Lajala (Lyall 2014).

Teorema 2.1 (Šurova teorema). Neka je m prirodan broj. Tada postoji prirodan broj $S(m)$, takav da za svaki prirodan broj $n \geq S(m)$ i svako bojenje skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u m boja, postoje neka tri broja x, y, z obojena istom bojom, tako da važi $x + y = z$.

Dokaz (Mladenović 2001). Neka je $n \geq R_m(3)$; neka je $\{1, 2, \ldots, n\} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ proizvoljno bojenje skupa u m boja; neka je G skup svih grana m-kompletnog grafa čiji su čvorovi članovi skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$; neka je $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_m$ bojenje grana određeno sa: $\{a, b\} \in G_j \Leftrightarrow \Leftrightarrow |a - b| \in A_j$ za sve $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, odnosno granu između brojeva a i b bojimo bojom $|a - b|$. Na osnovu Remzijeve teoreme postoji skup $\{a_1, a_2, a_3\} \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i indeks j $\in \{1, 2, \ldots, m\}$ tako da važi: $\{a_1, a_2\} \in G_j$, $\{a_2, a_3\} \in G_j$ i $\{a_1, a_3\} \in G_j$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $a_1 < a_2 < a_3$. Označimo $x = a_2 - a_1$, $y = a_3 - a_2$, $z = a_3 - a_1$. Tada brojevi x, y i z pripadaju skupu A_j, tj. istobojni su i važi jednakost $x + y = z$.

Ovo razmatranje može se obaviti i na drugi način, preko bojenja ivica kompletnog grafa i ovaj način ćemo koristiti u nastavku rada, prilikom dokazivanja naših tvrđenja ■

Brojevi x, y, z nazivaju se jednobojnim Šurovim trojkama, a $S(m)$ je definisan kao najmanji prirodan broj za koji ovo tvrđenje važi.

Uopštenja Šurove teoreme

Šurova teorema i njen dokaz poslužili su nam kao ideja za dokazivanje tvrđenja koja se nalaze u ovoj sekciji. Ta tvrđenja predstavljaju uopštenja Šurove teoreme.

Tvrđenje 2.2. Neka su dati prirodni brojevi m i k. Tada postoji prirodan broj n, takav da za svako bojenje skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u m boja, postoji nekih k brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_k$, obojenih istom bojom, tako da važi:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} = x_k .$$

Dokaz. Koristićemo ideju sličnu ideji korišćenoj u dokazu Šurove teoreme i za razliku od tog dokaza, posmatraćemo bojenje ivica kompletnog grafa koje je analogno posmatranju podskupova. Dakle, neka je $n \geq R_m(k)$ i neka je svaki član skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ slučajno obojen jednom od m boja. Posmatrajmo n-kompletan graf čije čvorove čine članovi skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Granu između čvorova x i y obojimo bojom $c(x-y)$, za $x > y$. Na osnovu Remzijeve teoreme postoje brojevi $a_1, a_2, \ldots a_k$ (bez umanjenja opštosti neka je $a_1 > a_2 > \ldots > a_k$), takvi da važi $c(a_1 - a_2) = c(a_2 - a_3) = \ldots = c(a_{k-1} - a_k) = c(a_1 - a_k)$. Ako označimo $x_1 = a_1 - a_2$, $x_2 = a_2 - a_3$, $\ldots$ $x_{k-1} = a_{k-1} - a_k$, $x_k = a_1 - a_k$. Tada su brojevi $x_1, x_2 \ldots, x_k$ istobojni i važi jednakost $x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} = x_k$ ■

Tvrđenje 2.3. Neka su dati prirodni brojevi m, k i l. Tada postoji prirodan broj n, takav da za svako bojenje skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u m boja, postoji nekih $k + l$ brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$ obojenih istom bojom, tako da važi:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = y_1 + y_2 + \ldots + y_l .$$

Dokaz. Neka važi da je $n \geq R_m(k+l)$ i neka je svaki član skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ slučajno obojen nekom od m boja. Posmatrajmo n-kompletan graf čije čvorove čine članovi skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Granu između čvorova x i y obojimo bojom $c(x-y)$, za $x > y$. Na osnovu Remzijeve teoreme postoje brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_{k+l}$ (bez umanjenja opštosti neka je $a_1 > a_2 > \ldots a_{k+l}$), takvi da važi:

$$\begin{aligned} c(a_1 - a_2) &= c(a_2 - a_3) = \ldots = c(a_{k-1} - a_k) = c(a_k - a_{k+l}) = c(a_1 - a_{k+1}) = \\ &= c(a_{k+1} - a_{k+2}) = \ldots = c(a_{k+l-2} - a_{k+l-1}) = c(a_{k+l-1} - a_{k+l}). \end{aligned}$$

Označimo $x_1 = a_1 - a_2, \ldots, x_{k-1} = a_{k-1} - a_k, x_k = a_k - a_{k+l}$, i $y_1 = a_1 - a_{k+1}$, $y_2 = a_{k+1} - a_{k+2}$, $\ldots$, $y_{l-1} = a_{k+l-2} - a_{k+l-1}$, $y_l = a_{k+l-1} - a_{k+l}$. Tada su brojevi istobojni i važi jednakost $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = y_1 + y_2 + \ldots + y_l$, odakle sledi tačnost ovog tvrđenja ■

Tvrđenje 2.4. Neka je dat prirodan broj m. Tada postoji prirodan broj n, takav da za svako bojenje skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u m boja, postoje neka tri broja x, y, z obojena istom bojom, tako da važi:

$$x \cdot y = z.$$

Dokaz. Neka je $n \geq 2^{R_m(3)}$ i neka je svaki član skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ slučajno obojen u m boja. Neka je $D = \{1, 2, 4 \ldots, 2^{R_m(3)}\}$. Posmatrajmo kompletan graf čije čvorove čine članovi skupa D. Granu između čvorova x

i y, gde je $x > y$ obojimo bojom $c\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$. Na osnovu Remzijeve teoreme postoje neka tri broja a, b, c takva da je $c\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = c\left\lfloor \frac{b}{c} \right\rfloor = c\left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor$. Označimo $x = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$, $y = \left\lfloor \frac{b}{c} \right\rfloor$ i $z = \left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor$. Tada su brojevi x, y i z istobojni i važi jednakost $x \cdot y = z$ ■

Tvrđenje 2.5. Neka su dati prirodni brojevi m i k. Tada postoji prirodan broj n, takav da za svako bojenje skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u m boja, postoji nekih k brojeva $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ obojenih istom bojom, tako da važi:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{k-1} = x_k.$$

Dokaz ovog tvrđenja može biti prikazan preko dokaza tvrđenja 2.2. i preko dokaza tvrđenja 2.4.

Tvrđenja o odsustvu određenih konfiguracija

U ovom odeljku, pokazano je da ne mora svaka diofantska jednačina imati jednobojna rešenja pri bojenju o kom smo pričali do sada. Zanimljivo je to da je već čitav vek otvoren problem da li će pri bojenju prirodnih brojeva u m boja postojati brojevi oblika: x, y, $x + y$, $x \cdot y$ tako da svi istovremeno budu jednobojni. Takođe, otvoren problem je i da li postoje jednobojne Pitagorine trojke, odnosno da li postoje jednobojna rešenja jednačine $x^2 + y^2 = z^2$ pri slučajnom bojenju prirodnih brojeva u m boja.

Tvrđenje 3.1. Za dato n postoji bojenje skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ tako da neće postojati dva broja obojena istom bojom, tako da je jedan c puta veći od drugog ($c \geq 2$). Dakle, za jednačinu $y = c \cdot x$ postojaće bojenje tako da ne postoje jednobojna rešenja. Ovo tvrđenje važi i u slučaju da umesto konačnog skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ posmatramo skup prirodnih brojeva.

Dokaz. Radi lakšeg razumevanja, na početku rešimo ovaj problem za $c = 2$. Posmatrajmo sledeće bojenje dvema bojama (crvenom i plavom; crveno bojenje označeno je boldom, inače se podrazumeva plavo):

1
2 4 **8** 16 **32** 64 **128** …
3 6 **12** 24 **48** 96 **192** …
5 10 **20** 40 **80** 160 **320** …
7 14 **28** 56 **102** 204 **408** …
…

Dakle, sve brojeve ovog skupa (ili skupa prirodnih brojeva) možemo zapisati u obliku $2^k \cdot l$, za neko $l \in N$ i za neko N_0 $(N \cup \{0\})$, takvo da $2 \nmid l$. Za svako l, taj broj obojimo crveno ako je k neparan broj, odnosno plavo, ako je k parno. Ovim bojenjem zaista je zadovoljena pretpostavka.

Na sličan način dokažimo da i za jednačinu $y = c \cdot x$ postoji bojenje nekog skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ (ili čitavog skupa prirodnih brojeva), takvo da ona nema jednobojna rešenja. Sve brojeve tog skupa možemo zapisati kao $c^k \cdot l$, za neko $l \in N$, takvo da c ne deli l. Pri tome, broj obojimo crveno ako je k neparan broj, odnosno plavo, ako je k parno. Iz ovakvog bojenja sledi tačnost tvrđenja ■

Tvrđenje 3.2. Za date prirodne brojeve n i c postoji bojenje skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ tako da neće postojati dva broja oblika x i x^c obojena istom bojom, ili drugim rečima, za jednačinu $y = x^c$ postojaće bojenje tako da ne postoje jednobojna rešenja. Kao i prethodno tvrđenje, i ovo tvrđenje važi i ako se posmatra čitav skup prirodnih brojeva.

Dokaz. Svi prirodni brojevi mogu biti zapisani u obliku a^{c^k}, za neko a koje nije c-ti stepen nekog broja i neko $k \in N_0$. Na primer, $2 = 2^{c^0}$, $5 = 5^{c^0}$, $2^c = 2^{c^1}$. Broj a^{c^k} obojimo crveno ako je k neparan broj, odnosno plavo, ako je k parno. Ovakvim bojenjem garantujemo da neće postojati jednobojna rešenja jednačine $y = x^c$ ■

Van der Vardenova teorema

Jedan od najpoznatijih rezultata u Remzijevoj teoremi, teorema Van der Vardena iz 1927. godine je tvrđenje blisko Remzijevoj teoremi.

Teorema 4.1 (Van der Vardenova teorema). Za sve prirodne brojeve k, m postoji prirodan broj $n = W(m, k)$, takav da za svako bojenje brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ sa m boja postoji jednobojna aritmetička progresija dužine k.

Elegantan i kratak dokaz ove teoreme u kojoj se koristi samo Dirihleov princip dat je u radu Grejama i Rotšilda (Graham i Rothschild 1974).

Primer. Neka je $m = 2$, što znači da posmatramo bojenja dvema bojama, neka su to crvena i plava. $W(2, 3)$ je veći od 8, zato što brojeve iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ možemo obojiti na sledeći način:

1 **2** **3** 4 5 **6** **7** 8.

Pri ovom bojenju ne postoje tri jednobojna broja koja čine aritmetičku progresiju. Ako bismo na kraj tog niza dodali broj 9 obojen u crveno, tada bi 3, 6 i 9 bili obojeni crveno i činili aritmetički progresiju, a ako bismo dodali broj 9 obojen plavom bojom, tada bi 1, 5, 9 bili obojeni plavom i činili aritmetičku progresiju. Dakle, $W(2,3) \geq 9$, a proverom dobijamo da baš važi $W(2,3) = 9$.

Uzimajući u obzir postojanje beskonačne verzije Remzijeve teoreme, nameće se sledeće pitanje: da li ako obojimo prirodne brojeve u konačan broj boja uvek možemo da nađemo beskonačnu aritmetičku progresiju?

Tvrđenje 4.2. Za svaki prirodan broj $m \geq 2$ postoji bojenje skupa prirodnih brojeva N u m boja takvo da ne postoji beskonačna aritmetička progresija obojena istom bojom.

Dokaz. Dovoljno će biti koristiti dve boje pri bojenju. Posmatrajmo sledeće bojenje: 1 **2** **3** 4 5 6 **7** **8** **9** **10** 11 12 13 14 15 **16** **17** **18** **19** **20** **21**… Pri ovakvom bojenju neće postojati istobojna beskonačna aritmetička progresija i da bismo to dokazali pretpostavimo suprotno. Pretpostavimo da postoji beskonačna aritmetička progresija a, $a + d$, $a + 2d$, … i neka je ona, bez umanjenja opštosti, obojena u plavo. Ako imamo fiksirano d, u jednom trenutku će broj uzastopnih brojeva obojenih u crveno biti veći od $a+k\cdot d$, što dovodi do toga da za neko k, član plave beskonačne aritmetičke progresije $a+k\cdot d$ biti obojen u crveno, pa ta beskonačna aritmetička progresija obojena u plavo neće postojati ■

Napomena. Sa a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, … $a + kd$ označavaćemo posmatranu jednobojnu aritmetičku progresiju čija je egzistencija garantovana Van der Vardenovom teoremom (mi ne znamo koliko je a niti koliko je d, ali znamo da postoje neko a i neko d za koje ovo važi).

Primenom Van der Vardenove teoreme za dovoljno veliko n i slučajno bojenje brojeva iz $\{1, 2, \ldots, n\}$ možemo dokazati razne stvari kao na primer to da će jednačina $x+y=2z$ imati jednobojna rešenja. Dokaz tog problema sledi ako uzmemo da važi: $x=a+2d$, $y=a$ i $z=a+d$.

Takođe, direktnom primenom ove teoreme znamo i da postoje jednobojna rešenja sledeće jednačine: $x+(c-1)\cdot y=c\cdot z$ (za $x=a+c\cdot d$, $y=a$ i $z=a+d$).

Zapitani da li jednačina $x+2y=z$ ima jednobojna rešenja ako ih već jednačina $x+y=z$ ima, uz pomoć Van der Vardenove teoreme i matematičke indukcije po broju boja kao glavnog aparata, dokazali smo tvrđenja iz ove glave.

Tvrđenje 4.3. Neka je m prirodan broj. Tada postoji prirodan broj n, takav da za svako bojenje skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u m boja, postoje neka tri broja x, y, z obojena istom bojom, tako da važi:

$$x+2y=z.$$

Dokaz ovog problema neposredno sledi iz sledećeg tvrđenja.

Tvrđenje 4.4. Neka je m prirodan broj. Tada postoji prirodan broj n, takav da za svako bojenje skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u m boja, postoje neka tri broja x, y, z obojena istom bojom, tako da važi:

$$x+c\cdot y=z.$$

Dokaz. Dokazaćemo ovo tvrđenje indukcijom po broju boja m.

Baza. Neka je $m=1$. Tačnost trivijalno sledi.

Induktivna hipoteza. Neka za neko k u prvih k brojeva obojenih u m boja postoje istobojna rešenja.

Induktivni korak. Posmatrajmo prvih $W(m+1, c\cdot k+1)$ brojeva. Prema Van der Vardenovoj teoremi postojaće jednobojna aritmetička progresija dužine $c\cdot k+1$ i označimo sa A skup kog čine članovi te aritmetičke progresije, $A = \{a, a+d, a+2d, \ldots, a+ckd\}$. Posmatrajmo skupove $D_1 = \{a, a + cd, \ldots, a + ckd\}$ i $D_2 = \{d, 2d, \ldots, kd\}$. Svi članovi skupa D_1 obojeni su istom bojom. Ako je neki član skupa D_2 (neka to bude ld, $l<k$) obojen istom bojom kao i članovi skupa D_1, dokaz je gotov, jer za $x=a$, $y=ld$ i $z=a+lcd$ važi da su istobojni i da zadovoljavaju jednačinu $x+c\cdot y=z$. Ako nijedan član skupa D_2 nije obojen bojom kojom su obojeni članovi skupa D_1, onda su oni obojeni nekim od preostalih m boja pa prema induktivnoj hipotezi sledi da među ovim brojevima postoje jednobojna rešenja jednačine. ■

Prethodno tvrđenje bez mnogo poteškoća možemo uopštiti na sledeći način:

Tvrđenje 4.5. Neka je m prirodan broj. Tada postoji prirodan broj n, takav da za svako bojenje skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u m boja, postoje neka tri broja x, y, z obojena istom bojom, tako da važi:

$$c_1 \cdot x + c_2 \cdot y = c_2 \cdot z.$$

Dokaz. Slično kao i u dokazu prethodnog tvrđenja, koristimo indukciju po broju boja m.

Baza. Neka je $m = 1$. Tačnost trivijalno sledi.

Induktivna hipoteza. Neka u prvih k brojeva obojenih u m boja postoje istobojna rešenja.

Induktivni korak. Posmatrajmo prvih $W(m+1, c_1 \cdot k+1)$ brojeva. Prema Van der Vardenovoj teoremi postojaće jednobojna aritmetička progresija dužine $kc_1 + 1$. Posmatrajmo skupove $D_1 = \{a, a + c_1 d, \ldots, a + kc_1 d\}$ i $D_2 = \{c_2 d, 2c_2 d, \ldots, kc_2 d\}$. Svi članovi skupa D_1 obojeni su istom bojom. Ako je bilo koji član skupa D_2 obojen istom bojom kao i članovi skupa D_1, onda je dokaz gotov jer možemo uzeti da je $x = lc_2 d$, $y = a$ i $z = a + lc_1 d$, za neko l, a ako nije onda je svaki član skupa D_2 obojen jednom od preostalih m boja pa prema induktivnoj hipotezi sledi da među članovima skupa D_2 postoje jednobojna rešenja jednačine ■

Bojenje čvorova kvadratne mreže $N \times N$

U ovom odeljku bavićemo se pronalaženjem različitih jednobojnih struktura pri slučajnom bojenju čvorova kvadratne mreže $N \times N$. Uvodni primeri, u kojima se govori o postojanju trougla, paralelograma i pravougaonika sa istobojnim temenima, vodiće do tvrđenja iz kojeg sve te konfiguracije možemo dokazati.

Translirajmo koordinatne ose Dekartovog koordinatnog sistema tako da koordinatni početak bude tačka (1, 1) i posmatrajmo samo prvi kvadrant i to samo tačke čije su koordinate iz skupa prirodnih brojeva N. Te tačke biće čvorovi kvadratne mreže $N \times N$ i njih ćemo bojiti. Dakle, naša x-osa će sadržati tačke sa y-koordinatom 1 i sa x-koordinatom α $\forall \alpha \in N$.

Kada kažemo prvih n pravih paralelnih x-osi mislimo na prave sa svim tačkama čija je y koordinata jednaka β, $\beta \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Analogno, kada kažemo prvih n tačaka sa prave paralelne x-osi podrazumevamo tačke sa koordinatama jednakim γ, $\gamma \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Na pravama paralelnim x-osi posmatraćemo samo tačke čije su koordinate prirodni brojevi.

Napomena. Tačke u opštem položaju su tačke tako raspoređene u ravni da ne postoje tri kolinearne.

Primer. Pri slučajnom bojenju čvorova mreže $N \times N$ u m boja postojaće tri istobojna čvora koja će činiti temena tupouglog trougla.

Rešenje. Posmatrajmo prvih $m+1$ pravih paralelnih x-osi. Ako u svakoj od tih pravih posmatramo prvih $W(3, m)$ tačaka (to će biti tačke čije će x-koordinate biti iz skupa $\{1, 2, \ldots, W(3, m)\}$), u prvih $m+1$ pravih postojaće dve koje će sadržati istobojne aritmetičke progresije dužine. Sada posmatrajmo te dve prave. Tačke sa manjom y-koordinatom označimo redom A, B, C. Ako bar jedna tačka, koja pripada aritmetičkoj progresiji isto obojenoj kao tačke A, B i C ima manju x-koordinatu nego tačka B, tada će ta tačka, tačka B i tačka C biti temena tupouglog trougla, sa tupim uglom kod temena B. Ako bar jedna tačka ima veću x-koordinatu nego tačka B, tada će ta tačka, tačka A i tačka B biti temena tupouglog trougla, takođe sa tupim uglom kod temena B. U suprotnom, sve tri tačke imaju istu x-koordinatu, što je nemoguće ■

Primer. Pri slučajnom bojenju čvorova mreže $N \times N$ u m boja postojaće četiri istobojna čvora koja će činiti temena paralelograma.

Rešenje. Ako posmatramo prvih konačno mnogo pravih paralelnih x-osi i na njima tačke sa x-koordinatama koje pripadaju $\{1, 2, \ldots, m + 1\}$ uočavamo sledeće: po Dirihleovom principu u svakoj toj pravoj postojaće postojaće bar dve istobojne tačke sa x-koordinatama a i $a + d$. Posmatrajmo te dve tačke kao tačke čije će x-koordinate činiti aritmetičku progresiju dužine 2. Dakle, $d \in \{1, 2, \ldots, m\}$. U prvih $m \cdot (m+1) + 1$ pravih prema Dirihleovom principu postojaće $m + 2$ prave u kojima će biti tačke obojene istom bojom čije x-koordinate čine aritmetičku progresiju dužine 2. To znači da će po Dirihleovom principu postojati dve aritmetičke progresije iste boje sa istim d (istom razlikom aritmetičke progresije). Te četiri tačke predstavljaju čvorove koji će činiti temena paralelograma ■

Primer. Pri slučajnom bojenju čvorova mreže $N \times N$ u m boja postojaće četiri istobojna čvora koja će činiti temena pravougaonika.

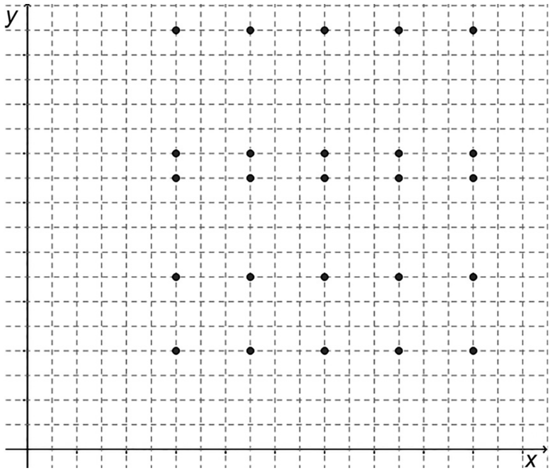
Rešenje. Posmatrajmo $m \cdot \binom{W(2, m)}{2} + 1$ pravih paralelnih x-osi. Na tim pravama posmatrajmo samo one tačke čije x-koordinate pripadaju skupu $\{1, 2, \ldots, W(2, m)\}$; broj $W(2, m)$ garantuje da će postojati aritmetička progresija dužine 2. Među tih $m \cdot \binom{W(2, m)}{2} + 1$ pravih, prema Dirihleovom principu postojaće $\binom{W(2, m)}{2} + 1$ pravih u kojima su tačke, čije x-koordinate čine aritmetičku progresiju, obojene istom bojom. U dve od tih pravih, prema Dirihleovom principu, x-koordinate tih tačaka biće jednake. Ovime smo dokazali tvrđenje ■

Treba napomenuti da je $W(2, m) = m + 1$, ali smo koristili oznaku $W(2, m)$, radi isticanja analogije između ovog primera i sledećeg tvrđenja.

Uopštenje prethodnih primera daje sledeće važno tvrđenje. Na neki način, ono ujedno predstavlja i verziju Van der Vardenove teoreme u dve dimenzije.

Tvrđenje 5.1. Pri slučajnom bojenju čvorova mreže $N \times N$ u m boja i za zadate prirodne brojeve k i l, postojaće jednobojna konfiguracija, koja se sastoji od konačnog broja čvorova raspoređenih u l pravih paralelnih sa x-osom i to tako da u svakoj od njih x-koordinate tačaka (koje određuju čvorove) čine aritmetičku progresiju $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (k - 1)d$ (za neka

a i d koja će u svakoj pravoj biti ista). Na slici je dat primer jednobojne konfiguracije garantovane ovim tvrđenjem.



Dokaz. Ovo tvrđenje predstavlja uopštenje prethodnog tvrđenja. Posmatrajmo beskonačno mnogo pravih paralelnih x-osi i na njima tačke čija će x-koordinata biti iz skupa $\{1, 2, \ldots, W(m, k)\}$. Broj $W(m, k)$ garantuje da će u svakoj od tih pravih postojati jednobojne tačke čije će x-koordinate činiti aritmetičku progresiju dužine k. Beskonačna verzija Remzijeve teoreme tvrdi da će među tih beskonakačno mnogo pravih paralelnih x-osi postojati beskonačno mnogo pravih u kojima će jednom bojom (neka to bude plava) biti obojene tačke čije će x-koordinate činiti aritmetičku progresiju dužine k. Ponovno primenjujući beskonačnu Remzijevu teoremu znamo da će među takvim pravama postojati beskonačno mnogo pravih u kojima će plavom bojom biti obojene tačke čije će x-koordinate činiti aritmetičku progresiju dužine k i gde će ta aritmetička progresija počinjati brojem a (x-koordinata tačke obojene u plavo će biti a). Posmatrajmo te prave. Prema Dirihleovom principu među $(l-1)\cdot\left[\frac{W(m,k)-k}{k-1}+1\right]+1$ pravih postojaće l onih sa istim d.

Ostaje još da pokažemo zašto će među $\left[\frac{W(m,k)-k}{k-1}+1\right]+1$ pravih gde su tačke čije x-koordinate čine aritmetičku progresiju, obojene istom bojom postojati bar dve sa jednakim d.

Prvo, mora važiti $d \geq 1$. Najveće d dobijamo posmatrajući među $W(m, k)$ bojeva onu aritmetičku progresiju čiji je prvi član broj 1, a poslednji $W(m, k)$. Dakle, iz $k+(k-1)(d-1)=W(m,k)$, dobijamo $d_{\max}=\frac{W(m,k)-k}{k-1}+1$. Konačno, $1 \leq d \leq \left[\frac{W(m,k)-k}{k-1}+1\right]$.

Ovime je dokaz završen. ■

Treba napomenuti da postoje dokazi za opštije rezultate u vezi sa pravilnim jednobojnim strukturama u posmatranju višedimenzionalnih prostora. U literaturi (Graham *et al*. 1995) se navodi i Galai-Vit teorema, i značajna teorema koja predstavlja višedimenzionalnu verziju Van der Vardenove teoreme.

Literatura

Graham R., Rothschild B. L. 1974. A short proof of van der Waerden's theorem on arithmetic progressions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **42**: 385.

Graham R., Grötschel M., Lovász L. 1995. *Handbook of Combinatorics*. MIT Press

Jojić D. 2011. *Elementi enumerativne kombinatorike*. Beograd: Naša knjiga

Landman B. M., Robertson A. 2004. *Ramsey Theory On The Integers*. American Mathematical Society

Lyall N. 2014. Schur's theorem, http://math.uga.edu/~lyall/REU/schur.pdf

Mladenović P. 2001. *Kombinatorika*. Beograd: Društvo matematičara Srbije

Dušan Dragutinović and Đorđe Ivanović

Colored Equations

In this paper, on the basis of Ramsey theory we wanted to determine whether a particular diophantine equation has a monochromatic solution for any m-coloring of $\{1, 2, \ldots, n\}$. We did this along the lines of Schur's theorem, which states that if the numbers $\{1, 2, \ldots, n\}$ are colored with m colors, then there are three of them x, y, z of the same color satisfying the equation $x + y = z$. One of the major results that we proved by using induction by the number of colors is that the equation $x + c \cdot y = z$, for any $c \in N$ has a monochromatic solution. In adition to this, we determined the existence of some monochromatic configurations for any m-coloring of the points on an $N \times N$ grid in the plane. As one of the two major results, we proved the existence of one monochromatic net of points.