

## Proces kompakfikacije dvodimenzionog granularnog sistema pod uticajem vertikalnih vibracionih pobuda

---

*Kompakfikacija granularnog materijala predstavlja proces rasta gustine granularnog medijuma pod uticajem mehaničkih perturbacija. U radu je korišten dvodimenzionalni granularni sistem sačinjen od kuglica prečnika 4.5 mm. Osnovni cilj je bio ispitati zavisnost maksimalne vrednosti gustine granularnog pakovanja od amplitude ubrzanja sinusnih oscilacija kojima se sistem izlaže, kao i prodiskutovati kako amplituda i frekvencija utiču na proces kompakfikacije čemu do sada nije posvećena velika pažnja. Pokazano je da sa povećanjem amplitude ubrzanja, asimptotska gustina granularnog sistema pri kompakfikovanju opada, kao i da vreme relaksacije sistema zavisi od maksimalnog ubrzanja po Arrheniusovom zakonu.*

---

### Uvod

Granularni materijali su, posle fluida, prvi na listi materijala kojima čovek najviše manipuliše. Veliki deo prehrambenih proizvoda, proizvoda farmaceutske, metalne, hemijske, ili plastične industrije u nekoj od svojih faza proizvodnje nalazi se u granularnom obliku. Ovi materijali su veoma važni i u građevinskoj industriji. Njihovo razumevanje je takođe važno za preciznija predviđanja geoloških procesa poput lavina, zemljotresa i odrona. Zbog svega navedenog, značaj granularnih sistema je neosporan i kao takvi predstavljaju veliki izazov za fizičare, naročito u poslednjih nekoliko decenija.

Granularni ili zrnasti materijali predstavljaju skup velikog broja makroskopskih objekata koji međusobno interaguju sudarima ili kroz dugotrajne međusobne kontakte. Podrazumeva se da su dimenzije granula u ovim sistemima dovoljno velike, kako bi se mogle zanemariti dugodometne elektrostatičke interakcije koje se javljaju zbog nagomilavanja naelektrisanja na njihovim površinama usled trenja. Priroda interakcija elemenata jednog granularnog sistema karakteriše se disipacijom sopstvene energije u toplotnu. Zbog toga, bez spoljnih pobuda, kao što su na primer vibracije ili smicanje, kinetička energija naglo opada, te se ovakvi sistemi mogu smatrati netermalnim. Zakoni klasične termodinamike ovde praktično nemaju značaj, jer je energija toplotnog kretanja (kB<sub>T</sub>) neuporedivo manja od gravitacione potencijalne energije koju poseduju pojedinačne granule.

Jedan od najvažnijih parametara ovih fizičkih sistema je njihova gustina (u ovoj oblasti je popularan termin na engleskom *packing fraction*). Ona je jednaka odnosu zapremine granula i zapremine zahvećene sistemom, te se u skladu sa tim u dvodimenzionalnim sistemima gustina granularnog materijala definiše kao odnos površine granula (kružnog poprečnog preseka) i celokupne površine granularnog sistema. Maksimalna teorijska vrednost ovog odnosa iznosi približno 0.91 (Chang i Wang 2010), pa granule zauzimaju veliki deo zapremine sistema, što bitno utiče na unutrašnju kinematiku ovih materijala.

Uprkos tome što na prvi pogled ovi sistemi izgledaju veoma jednostavno, u suštini oni se ponašaju na veoma kompleksan način, ispoljavajući razne fenomene kao što su segregacija, efekat „brazilskog oraha”, formiranje lukova

---

*Grigorije Aleksić (1995), Zrenjanin, Šafarikova 30, učenik 4. razreda Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj” u Novom Sadu*

*MENTOR: Marko Kuzmanović, student Fizičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu*

sila, formiranje određenih pravilnih struktura pri pakovanju, dinamičke nestabilnosti itd (Mehta 2007). Iako su granule u čvrstom agregatnom stanju, i iako njihova dinamika liči na dinamiku fluida, nemoguće je opisati osobine njihovog skupa kao osobine tela u čvrstom ili tečnom agregatnom stanju. Trenutno ne postoji fizički model ili teorija koja bi dobro opisala zrnaste materijale u potpunosti, već su znanja o njima uglavnom empirijskog porekla. Zbog ovoga je pre oko dva desetak godina predloženo da im se dodeli posebno agregatno stanje.

Na primer, povećanjem gustine ovih sistema, samim tim i smanjenjem njihove zapremine, mogli bi se smanjiti gubici novca pri manipulisanju granularnim materijalima, što se može postići utabavanjem ili vibriranjem. Ovo je jedan od razloga zbog kojeg je proces kompaktifikacije privukao pažnju zbog čega je i bio izučavan u ovom radu, u izmenjenim uslovima u odnosu na koje je to do sada rađeno.

Pod kompaktifikacijom se podrazumeva proces povećavanja gustine granularnog materijala. U ovom radu ispitan je uticaj kontinualnih vertikalnih vibracionih pobuda na kompaktifikaciju granularnog sistema koja utiče na mnoge tehnološke procese.

U dosadašnjim istraživanjima na ovu temu, sistemi su kompaktifikovani udarcima određene snage i učestalosti u dno suda u kom se nalazi materijal (Lumay i Vandewalle 2005), ili izlaganjem čitavog pakovanja sinusnim oscilacijama (Knight *et al.* 1995). Zajedničko za ove eksperimente bilo je to da sistemi nisu konstantno bili izloženi uticajima, već sa prekidima. Na primer, vibracije su bile uključene u dužini od jednog perioda posle čega je sledila pauza koja je trajala do trenutka u kom se sve granule nisu našle u stanju mirovanja odnosno stanju statičnog pakovanja. Podaci o gustini pakovanja uzimani su tek kada je sva kinetička energija sistema disipirala. U našem radu to nije slučaj, sistem je kontinualno izlagan vibracijama.

Kontinualnim spoljašnjim pobudama sistem je konstantno izlagan vibracijama. Na ovaj način se konstantno predaje energija sistemu, čime je prouzrokovano neprekidno kretanje granula, odnosno stanje medijuma koje se naziva „rapidni granularni tok”.

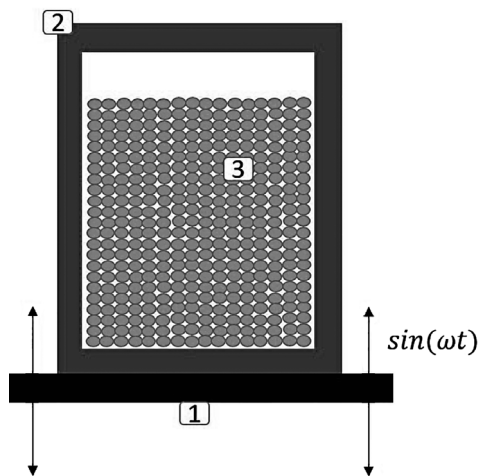
Naime, u „granularnom gasu” uvek postoje fluktuacije brzine i gustine granula. Zbog ovih fluktuacija, dolazi do lokalnog povećanja frekvencije sudara, pa pojava učestalih sudara, u određenom delu sistema indukuje povećanje disipacije kinetičke energije granula, odnosno hlađenje gasa, zbog čega dolazi do lokalnog smanjenja pritiska. Tada „granularni fluid” počinje da teče iz oblasti višeg ka oblasti nižeg pritiska, te se dobijaju lokane nehomogenosti u sistemu u kojima je gustina veća. Ove nehomogenosti se nazivaju klasterima i njihovo nastajanje prouzrokuje povećanje gustine, odnosno kompaktifikovanje celokupnog granularnog sistema.

Bez obzira na početnu gustinu, pri određenoj frekvenciji i amplitudi vibracija može se postići gustina ravnotežnog stanja (steady state) granularnog materijala, koja je ujedno i maksimalna moguća za date uslove. Proces postizanja te gustine naziva se proces relaksacije.

Cilj ovog rada je da se pokažu i objasne osnovne karakteristike procesa kompaktifikacije pri vertikalnim vibracijama, kao što su: vreme relaksacije, brzina kompaktifikacije i ravnotežna gustina, kao i da se ispita kako ravnotežna gustina zavisi od amplitude odnosno frekvencije vibracija.

## Postavka eksperimenta

U eksperimentu su korišćene plastične kuglice prečnika 4.5 mm, koje su se nalazile između dve ravne staklene ploče dimenzija oko 45×65 prečnika kuglica, to jest oko 21×30 cm. Ploče su bile razmaknute odstojnicima tako da je šupljina između njih bila malo veća od prečnika kuglica, dovoljno da kuglice mogu slobodno da se kreću u dve dimenzije. Ovaj sistem je u vertikalnom položaju pričvršćen otpustivim držačima za osnovnu ploču (slika 1) koja je sinusno oscilovala u vertikalnom pravcu. Ploču je pokretao motor preko prenosnih remenica, tako da je postojala mogućnost menjanja frekvencije oscilacija u intervalu od 7.29 do 14.58 Hz. Aparatura je pružala i mogućnost promene veličine amplitude u intervalu od 1.3 do 5.9 mm, pod uslovom da maksimalno ubrzanje sinusnih oscilacija na koje je pobuđivana ploča, ne prelazi prag od  $29 \text{ m/s}^2$ . Frontalno u odnosu na granularno pakovanje, postavljen je fotoaparat na visini centra pako-



Slika 1. Postavka eksperimenta: 1 – osnovna ploča, 2 – ram sa staklenim pločama, 3 – granule

Figure 1. Experimental setup: 1 – base plate, 2 – frame with glass plates, 3 – granular material

vanja, na udaljenosti od oko 2 m, kako bi ugaona širina snimanog predmeta bila što je moguće manja, da bi se dobila realnija slika predmeta.

## Metod

Između dve frekvencije, 7.29 Hz i 14.58 Hz, ekvidistantno su odabrane još četiri, te je eksperiment vršen za šest frekvencija. Za svaku od frekvencija, merenja su vršena na dve ili tri različite amplitude, u zavisnosti od toga koliko je opseg ubrzanja zbog ograničenosti aparature to dozvoljavao, te je dobijeno ukupno petnaest parova frekvencija-amplituda. Za svaki par je izvršeno pet merenja kako bi se povećala preciznost. Ceo proces je sniman fotoaparatom brzinom od 25 fps pri rezoluciji od 1920×1088 pix, dok je vreme ekspozicije bilo 1/600 s.

Pre svakog merenja, odnosno uključivanja aparature i snimanja, granularno pakovanje je ručno rastreseno, te su vrednosti početne voluminoznosti obuhvatale nešto širi interval, od 69.5 do 75.5 procenata. Posle postavljanja rastresenog pakovanja na vibroploču, uključivano je snimanje, a posle 1 s pokretane su vibracije kako bi se kasnije u obradi snimaka mogla tačno utvrditi početna kompakifikacija. Snimanje je pre-

kidano nakon dostizanja ravnotežne kompakifikacije.

Za određivanje vremenske evolucije gustine granularnog materijala bila je potrebna i obrada snimaka koja je urađena u programu Matlab i podrazumevala je:

- rastavljanje snimaka na slike
- lociranje granularnog materijala na svakoj obrađivanoj slici (jer se zbog oscilacija ceo sistem u svakom trenutku nalazio u drugom položaju koji opisuje određena elongacija vibroploče)
- konvertovanje frejmova na kojima se nalazilo samo locirano pakovanje, u binarne fotografije sa pogodno izabranom granicom koja određuje da li će se određeni piksel svrstati u bele ili crne
- izračunavanje odnosa površine granula i ukupne površine obuhvaćene granularnim materijalom koji pretstavlja trenutnu gustinu pakovanja
- pamćenje trenutne gustine na svake 0.2 s
- odstranjivanje šumova nastalih usled kontinualnog snimanja.

## Rezultati i diskusija

Za predstavljanje procesa kompakifikacije (koji je stohastički proces) još uvek je otvoreno pitanje pronalaženja analitičke zavisnosti gustine sistema od vremena u kom je sistem izložen vibracijama. Kako je ovaj proces u početku prilično brz, a potom sve više usporava i njegov rezultat teži ravnotežnoj gustini, u jednom od prvih eksperimenatalnih radova na ovu temu (Knight *et al.* 1995) predloženo je da se pomenuta zavisnost može opisati inverznom logaritamskom funkcijom:

$$\rho_t = \rho_\infty + \frac{\rho_0 - \rho_\infty}{1 + \beta \ln\left(1 + \frac{t}{\tau_r}\right)}$$

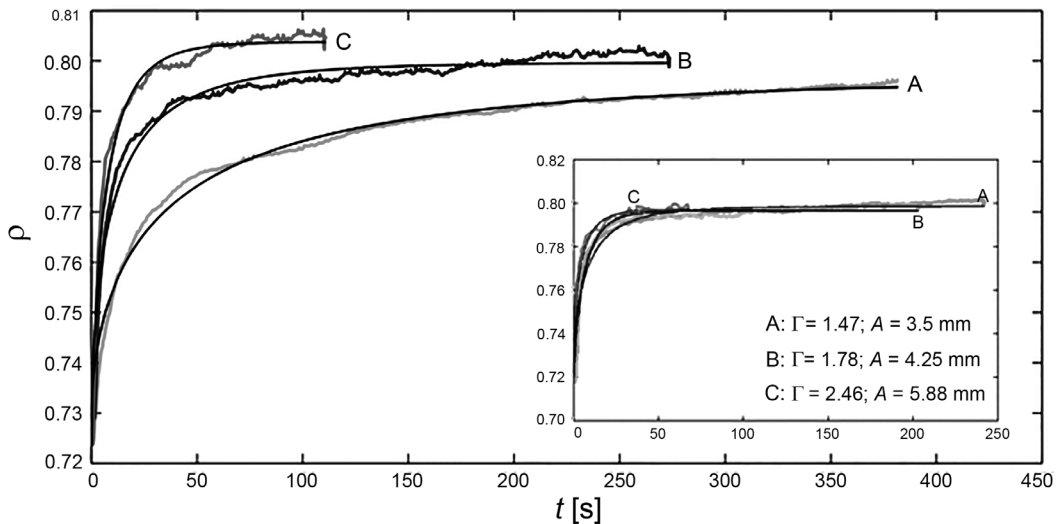
U datoj jednačini  $\rho_\infty$  i  $\rho_0$  predstavljaju krajnju (ravnotežnu) i početnu gustinu pakovanja,  $\tau_r$  predstavlja vreme relaksacije o kom će biti reči u nastavku teksta,  $t$  predstavlja vreme izloženosti sistema oscilacijama, dok  $\beta$  označava faktor koji direktno zavisi od intenziteta vibracija, za koji je pretpostavljeno da je jedini kontrolni parametar.

Intenzitet vibracija označava se grčkim slovom  $\Gamma$  i jednak je odnosu amplitude ubrzanja harmonijskih oscilacija i ubrzanja sile Zemljine teže ( $\Gamma = a/g$ ).

Inverznom eksponencijalnom funkcijom nije bilo moguće dovoljno dobro opisati podatke dobijene u ovom radu, što je posledica velikog uticaja zidova suda na raspored granula u eksperimentu u kom je ovakva zavisnost pretpostavljena.

Pomenuti eksperiment je ponovljen sa nešto drugačijim uslovima sa malim uticajem zidova suda (Philippe 2002). Predložen je novi analitički oblik koji opisuje zakon relaksacije sistema Kohlrausch-Williams-Wattsovom funkcijom, to jest „stretched exponential” funkcijom:

$$\rho_t = \rho_\infty + \frac{\rho_0 - \rho_\infty}{\exp\left(\frac{t}{\tau_r}\right)^\beta}$$



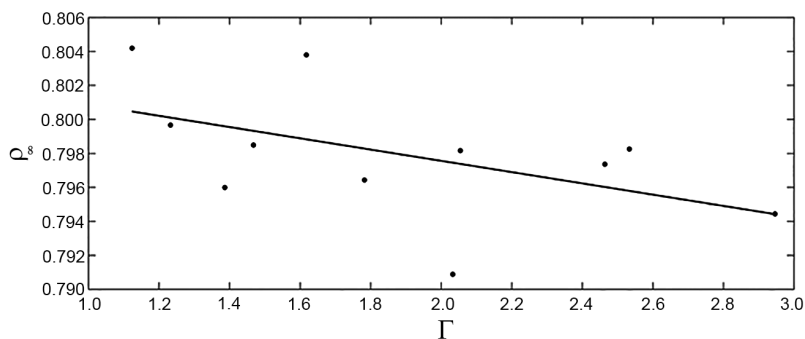
Slika 2. Primeri evolucije gustine sistema za različite eksterne pobude fitovani „stretched exponential” funkcijom (veliki grafik). Evolucija sistema pri konstantnoj frekvenciji od 10.21 Hz i amplitudama od 3.50, 4.25 i 5.88 mm (mali grafik). Gustina u vremenu dobijena je usrednjavanjem evolucija 5 nezavisnih merenja, radi smanjenja fluktuacija, i fitovana je Kohlrausch-Williams-Watts funkcijom.

Figure 2. Examples of evolution of the system density for different external excitations, fitted with a “stretched exponential” function (large graph). Evolution of the system at a constant frequency of 10.21 Hz and with amplitudes of 3.50, 4.25 and 5.88 mm (small graph). The time dependence of the density was obtained by averaging data from 5 separate measurements in order to minimise fluctuations, and it is fitted with the Kohlrausch-Williams-Watts function.

u kojoj svi parametri imaju isti fizički smisao kao i prethodno pomenuti, s tim što  $\beta$  predstavlja i „stretch” faktor „s-exp” funkcije (slika 2).

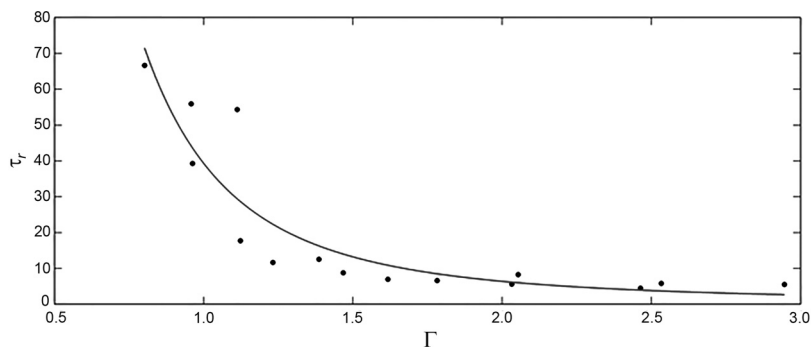
Na grafiku se vidi da model odlično opisuje evoluciju gustine pri kontinualnim pobudama iako mu je prvobitna svrha bila analitičko predstavljanje u nešto drugačijim uslovima (diskretne pobude).

Naime, povećavanjem  $\Gamma$  direktno se povećava energija koja se dodaje sistemu što prouzrokuje porast kinetičke energije granula odnosno porast „temperature granularnog gasa”. Zbog ovoga se smanjuje verovatnoća za nalaženje lokalnih oblasti sistema u kojim su „temperatura i pritisak granularnog gasa” mali, što ograničava mogućnost formiranja klastera zbog čega se ravnotežna gustina smanjuje (slika 3). Na malom grafiku (slika 2) ovo nije jasno izraženo zbog toga što povećanjem amplitude granule mogu da se slobodnije kreću i samim tim bolje rasporede u klustere, te se granularni tok koji je usmeren prema klasterima i „temperatura granularnog gasa”



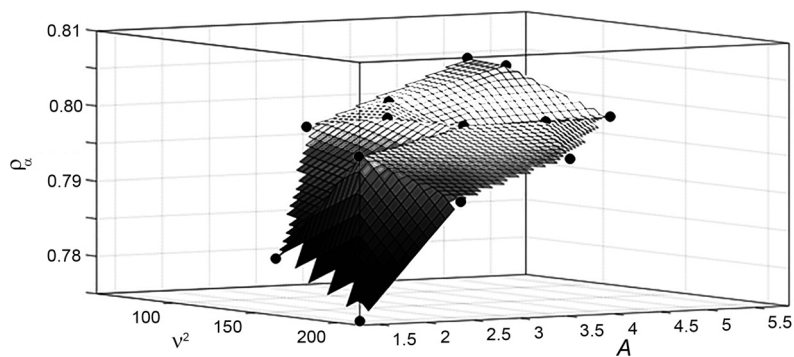
Slika 3.  
Zavisnost ravnotežne  
gustine sistema od  
kontrolnog parametra  $\Gamma$

Figure 3.  
Dependence of the  
equilibrium packing  
fraction on the control  
parameter  $\Gamma$



Slika 4.  
Zavisnost vremena  
relaksacije od  
kontrolnog parametra  $\Gamma$

Figure 4.  
Dependence of the  
relaxation time on the  
control parameter  $\Gamma$



Slika 5.  
Zavisnost ravnotežne  
kompaktifikacije od  
amplitude i kvadrata  
frekvencije. Bela boja  
odgovara najvišim  
vrednostima gustine  
dok crna odgovara  
najnižim.

Figure 5.  
Dependence of the  
equilibrium packing  
fraction on the  
amplitude and the  
square of the  
frequency. Bright areas  
correspond to higher  
density and the darker  
areas correspond to  
lower density.

koja ih efektivno odvlači od grupisanja, delimično poništavaju.

Na slici 3 može se uočiti blagi pad vrednosti ravnotežne gustine koji se javlja kao posledica porasta srednje kinetičke energije sistema sa porastom  $\Gamma$ . Merenja kod kojih je  $\Gamma < 1.1$  nisu prikazana zbog toga što za vrednosti amplitude

ubrzanja manjih od oko  $11 \text{ m/s}^2$  ne dolazi do odvajanja granula od podloge, te se evolucija gustine ponaša na drugi način.

Vreme relaksacije predstavlja vreme koje je potrebno granularnom sistemu da pri određenim uslovima eksterne pobude dostigne ravnotežnu gustinu. Za razliku od ravnotežne gustine, vreme

relaksacije sistema raste sa smanjenjem amplitude ubrzanja (slika 4) i ponaša se po Arrhenius-ovom zakonu (manje gustine se brže postižu):

$$\tau_r \propto \exp\left(\frac{\Gamma_0}{\Gamma}\right)$$

Odnos sila koje doprinose grupisanju granula u klastere, odnosno povećanju ravnotežne gustine, i onih koje doprinose razređivanju granularnog sistema u zavisnosti od različitih eksternih pobuda predstavljen je na slici 5.

Pri većim amplitudama, a manjim frekvencijama čak i kada je vrednost  $\Gamma$  konstantna dolazi do porasta vrednosti ravnotežne gustine što je posledica opisanih mehanizama koji utiču na temperaturu granularnog gasa. Uočava se značajna razlika u evolucijama gustine sistema pri kontinualnim i diskretnim pobudama. Mehanizmi koji deluju pri kontinualnim pobudama, to jest pri rapidnom toku granularnog fluida ne mogu postojati kada se sistem nalazi u stanju statičkog pakovanja zbog same prirode ovih stanja.

## Zaključak

U ovom radu je proučavan proces kompaktifikacije pod različitim kontinualnim eksternim vibracionim pobudama. Cilj rada je bio da se pokaže kakav uticaj imaju amplituda i frekvencija sinusnih oscilacija na sam proces kompaktifikacije.

Pokazano je da se Kohlrausch-Williams-Wattsov zakon, koji je opisivao proces kompaktifikacije u kom granularni materijal nije u stanju rapidnog granularnog toka, može primeniti za opisivanje procesa kompaktifikacije pri kontinualnim pobudama. Takođe utvrđeno je i obrazloženo da gustina ravnotežnog stanja opada sa porastom intenziteta vibracija, kao i da se vreme relaksacije sistema ponaša po Arrheniusovom zakonu. Najvažnije, pokazano je kako amplituda i frekvencija pojedinačno utiču na ravnotežnu gustinu, što se može primeniti u kompaktifikovanju granularnih materijala za praktične svrhe upotrebom relativno jednostavnog principa.

Rad bi mogao da se unapredi upotrebom kvalitetnije aparature sa mogućnošću preciznije i finije promene amplitude i frekvencije, ili aparature

koja bi mogla da izdrži veća ubrzanja, čime bi bio proširen opseg merenja te bi razumevanje celokupnog procesa kompaktifikacije bilo detaljnije. Takođe veći broj merenja za određene parametre, amplitudu i frekvenciju, značajno bi povećao preciznost rezultata, dok bi veće granularno pakovanje doprinelo preciznosti merenja zbog toga što bi se u potpunosti mogli zanemariti efekti zidova.

**Zahvalnost.** Zahvaljujem se svom mentoru Marku Kuzmanoviću na smernicama u radu i pomoći oko obrade rezultata, kao i dr. Slobodanu Vrhovcu koji je posvetio svoje vreme i u velikoj meri pomogao oko razumevanja rezultata. Takođe dugujem zahvalnost vodi seminara Jeleni Pajović i saradnicima seminara fizike na tehničkoj pomoći u toku rada na projektu.

## Literatura

Chang H. C., Wang L. C. 2010. A Simple Proof of Thue's Theorem on Circle Packing. arXiv preprint arXiv:1009.4322.

Knight J. B., Fandrich C. G., Lau C. N., Heinrich M. Jaeger H. M., Sidney R. Nagel S. R. 1995. Density relaxation in a vibrated granular material. *Physical Review E*, **51** (5): 3957.

Lumay G., Vandewalle N. 2005. Experimental Study of Granular Compaction Dynamics at Different Scales: Grain Mobility, Hexagonal Domains, and Packing Fraction. *Physical Review Letters*, **95**: 028002.

Lumay G., Vandewalle N. 2006. Experimental study of the compaction dynamics for two-dimensional anisotropic granular materials. *Physical Review E*, **74**: 021301.

Mehta A. 2007. *Granular physics*. Cambridge University Press

Philippeand P., Bideau D. 2002. Compaction dynamics of a granular medium under vertical tapping. *Europhysics Letters*, **60** (5): 677.

Richard P., Nicodemi M., Delannay R., Ribere P., Bideau D. 2005. Slow relaxation and

compaction of granular systems. *Nature materials*, **4**: 121.

Ribere P., Richard P., Philippe P., Bideau D., Delannay R. 2007. On the existence of stationary states during granular compaction. *European Physical Journal E*, **22**: 249.

Živković-Radeta S. 2013. Strukturalne promene u granularnom materijalu tokom procesa kompaktifikacije, doktorska disertacija Univerzitet u Beogradu Fizički fakultet, Studentski trg 12, 11000 Beograd

---

*Grigorije Aleksić*

## Process of Compactification of 2D Granular Material Under Vertical Vibrations

In physics of granular materials compactification refers to a process of density growth under the influence of mechanical perturbation, as tapping or vibrating. This phenomenon is essential in many industrial processes. In this experiment a two-dimensional granular system consisting of beads with a diameter of 4.5 mm was used. The main goal was to investigate the dependence between the maximum value of density of granular packing and the amplitude of acceleration of the sinusoidal oscillations to which the system was exposed. Finally, we wanted to tackle the rarely discussed question of the way in which frequency and amplitude affect the process. It is shown that with increasing the amplitude of acceleration, the asymptotic density of granular systems in compactification process declines, and the relaxation time of the system follows the Arrhenius law with respect to the maximum acceleration.

