Anđela Šarković i Tanja Asanović

Gustina skupa u N

Ovaj rad je uvod u teoriju gustine skupova u skupu prirodnih brojeva. Definisanje termina rupe *omogućilo je izračunavanje asimptotske gustine nekih skupova. Analogno gustini u skupu prirodnih brojeva, definisana je gustina skupa u proizvoljnom skupu* A, *koji je podskup skupa prirodnih brojeva. Definicija je omogućila dokaz teoreme: ako je dat beskonačan podskup* (Q) *substancijalnog podskupa skupa prirodnih brojeva, pozitivne gustine u tom podskupu, tada je i sam taj skup* Q *substancijalan. Uopštena je na potpune* p-*te stepene* x – a, *već poznata, i dokazana teorema za kvadratne ostatke: skup* A *prirodnih brojeva za koji je* $a \in A$ *ako i samo ako je* $x^2 \equiv m(\mathrm{mod}\ a)$ *rešivo, ima gustinu 0 ako i samo ako* m *nije potpun kvadrat (*m *je fiksirano). Takođe, uopšteno je izračunavanje gustine beskvadratnih brojeva na rešavanje problema k-fri broja.*

Uvod

Za proizvoljan podskup skupa prirodnih brojeva (sa konačim ili beskonačnim brojem elemenata), važi da ako znamo određene uslove, možemo izračunati verovatnoću da se odabrani prirodni broj nalazi u tom skupu. Ta „verovatnoća" predstavlja gustinu datog skupa u skupu prirodnih brojeva. Intuitivno shvatamo da su neki skupovi takvi da su im elementi gusto raspoređeni, odnosno da je razlika svaka dva elementa mala. Ako je pak skup takav da postoje proizvoljno velike praznine (koje nazivamo rupama) među njegovim elementima, ne možemo biti sigurni da li je taj skup gust ili ne. Teško je proceniti da li je taj skup „velik" ili „mali", odnosno koju vrednost njegova gustina uzima iz intervala [0,1]. U ovom radu prikazani su dokazi nekih teorema, koristeći asimptotsku gustinu koja ne zavisi od rasporeda, tj. razmaka između prvih n članova tog niza (elemente datog skupa posmatramo kao rastući niz), već zavisi od rasporeda svih članova niza. Sledeći odeljak detaljnije objašnjava pojam asimptotske gustine.

Definicija 1.1. Neka je A rastući niz prirodnih brojeva i $A(n)$ broj članova niza A ne većih od n. Veličine $\delta_1(A)$ i $\delta_2(A)$ definisane na sledeći način:

$$\delta_1(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

$$\delta_2(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

nazivaju se, redom, donja i gornja gustina niza A.

Veličina $\delta(A)$ naziva se asimptotska gustina niza A (ili samo gustina niza A), i definiše se sa:

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

Asimptotska gustina niza A, $\delta(A)$, postoji ako i samo ako je $\delta_1(A) = \delta_2(A) = \delta(A)$.

Kako je $A(n) \le n$, važi da donja, gornja i asimptotska gustina (ako postoji) skupa A imaju vrednosti iz intervala [0,1].

Pojam gustine skupa objašnjavamo kroz nekoliko jednostavnijih primera.

Primeri:

a) Ako je A konačan niz tada je $\delta(A) = 0$.

b) Kako za skup parnih (i neparnih) brojeva važi sledeća jednakost:

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \frac{n/2}{n} = \frac{1}{2}$$

gustina skupa svih parnih (i neparnih) brojeva je 1/2.

Anđela Šarković (1996), Niš, Vojvode Mišića 54/17, učenica 2. razreda Gimnazije „Svetozar Marković" u Nišu

Tanja Asanović (1994), Ruma, Franje Kluza 21, učenica 4. razreda Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu

c) Neka su b i m ($m > 1$) fiksirani celi brojevi. Tada je gustina skupa svih pozitivnih celih brojeva a, takvih da je $a \equiv b \pmod m$ jednaka $1/m$.

d) Gustina skupa čiji su elementi svi članovi beskonačne aritmetičke progresije prirodnih brojeva koraka k ima iznosi $1/k$.

e) Gustina skupa prostih brojeva je $\delta(P) = = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{nc}{n \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{\log n} = 0.$

Gornja i donja gustina mogu uzimati različite vrednosti. Ta osobina je prikazana kroz sledeći problem:

Neka je A skup svih parnih prirodnih brojeva, B_1 skup svih parnih prirodnih brojeva sa parnim brojem cifara u bazi 10, i neka je B_2 skup svih neparnih prirodnih brojeva sa neparnim brojem cifara u bazi 10. Skup B je takav da je $B = B_1 \cup B_2$. Dokazati da $\delta(A)$ i $\delta(B)$ postoje, a da $\delta(A \cup B)$ i $\delta(A \cap B)$ ne postoje.

Dokaz: Kako je A skup parnih prirodnih brojeva, njegova gustina je $\delta(A) = 1/2$. Gustina skupa B je $\delta(B) = 1/2$, takođe, jer skup B sadrži sve parne brojeve iz intervala $[10^{2k-1}, 10^{2k})$, što je polovina brojeva iz tog intervala, kao i sve neparne brojeve iz intervala $[10^{2k}, 10^{2k+1})$, što je polovina od svih brojeva iz tog intervala.

Gornje gustine skupova $A \cup B$ i $A \cap B$ su redom:

$$\delta_2(A \cup B) = \limsup_{n\to\infty} \frac{(A \cup B)(n)}{n} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(10^{2i} - 10^{2i-1} + \frac{10^{2i-1} - 10^{2i-2}}{2}\right)}{10^{2k}} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{9 \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(10^{2i-1} + \frac{10^{2i-2}}{2}\right)}{10^{2k}} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{9 \cdot \left(\frac{10 \cdot (100^k - 1)}{99} + \frac{100^k - 1}{99 \cdot 2}\right)}{100^k} = \frac{21}{22}.$$

$$\delta_1(A \cup B) = \liminf_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^{k} (10^{2i} - 10^{2i-1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{10^{2i-1} - 10^{2i-2}}{2}) + \frac{10^{2k+1} - 10^{2k}}{2}\right) \cdot \frac{1}{10^{2k+1}}\right].$$

Kako je gornja suma jednaka $\frac{\delta_2(A \cup B)}{10} + \frac{\frac{10^{2k+1} - 10^{2k}}{2}}{10^{2k+1}}$, važi sledeća jednakost:

$$\delta_1(A \cup B) = \frac{21}{220} + \frac{9}{20} = \frac{120}{220}.$$

Gornju gustinu preseka skupova nalazimo:

$$\delta_2(A \cap B) = \limsup_{n\to\infty} \frac{(A \cap B)(n)}{n} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{10^{2i} - 10^{2i-1}}{2}}{n} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{9 \cdot \sum_{i=1}^{k} 10^{2i-1}}{2 \cdot 100^k} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{9 \cdot 10 \cdot \frac{100^k - 1}{99}}{2 \cdot 100^k} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}.$$

Kroz ovaj primer prikazano je da gornja i donja gustina nekog skupa mogu biti različite. Takođe, pokazano je da ako dva skupa imaju gustinu, ne mora da znači da će unija ili presek ta dva skupa imati gustinu.

Sledi nekoliko tvrđenja koja pomažu pri izračunavanju asimptotske, gornje i donje gustine.

Tvrđenje 1.1. Za skupove B i A takve da je skup B komplement skupa A važi: $\delta(A) + \delta(B) = = 1$. Drugim rečima, $\delta(A) + \delta(\overline{A}) = 1$.

To proizilazi iz činjenice da je $\delta(A) + \delta(\overline{A}) = = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n - A(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1.$

Tvrđenje 1.2. Gustina niza A, $\delta(A)$, postoji ako i samo ako važi da je $\delta_1(A) + \delta_1(\overline{A}) = 1$.

Dokaz: 1) Pretpostavimo da gustina $\delta(A)$ postoji.

Tada je $\delta(A) = \delta_1(A)$ i $\delta(A) = \delta_1(\overline{A})$ (po definiciji gustine). Primenom tvrđenja 1.1 sledi da je $\delta_1(A) + \delta_1(\overline{A}) = 1$.

2) Pretpostavimo da važi: $\delta_1(A) + \delta_1(\overline{A}) = 1$. Kako je $\delta_1(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$ i

$$\delta_1(\overline{A}) = \liminf_{n\to\infty} \frac{n - A(n)}{n} =$$

$$= 1 - \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = 1 - \delta_2(A)$$

sledi da je $\delta_1(A) = \delta_2(A) = \delta(A)$, odnosno da gustina $\delta(A)$ postoji.

Iz tvrđenja 1.1 i 1.2 sledi da za bilo koji skup A važi da je $\delta_1(A) + \delta_1(\overline{A}) \leq 1$.

Tvrđenje 1.3. (Niven *et al*. 1991) Neka su A i B disjunktni skupovi. Tada važi nejednakost:

$$\delta_1(A \cup B) \geq \delta_1(A) + \delta_1(B).$$

Posmatrajmo proizvoljan niz koji ima bilo konačan bilo beskonačan broj elemenata. Oduzimajući ili dodajući konačan broj članova tom nizu, gustina novog niza ostaje konstantna. To važi zato što je gustina niza koji ima konačan broj elemenata nula. Navedeno tvrđenje važi i za donju i za gornju gustinu zadatog niza.

S obzirom da računanje gustine skupa koji ima konačan broj elementa nema smisla, zbog činjenice da je gustina svakog takvog niza nula, navodimo teoreme koje se baziraju na beskonačnim nizovima. Sledeće dve teoreme navodimo sa dokazima.

Teorema 1.1. (Niven *et al*. 1991) Neka je A beskonačan niz i a_n n-ti član tog niza. Tada je

$$\delta_1(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}.$$

Ako $\delta(A)$ postoji, tada važi

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}.$$

Dokaz (Niven *et al*. 1991): Kako je niz $\frac{n}{a_n}$ podniz niza $\frac{A(n)}{n}$, važi sledeća nejednakost:

$$\delta_1(A) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$$

Za svako n postoji neko $k \in N$ tako da važi da je $a_{k-1} \leq n < a_k$. Tada je:

$$\frac{k}{a_k} - \frac{A(n)}{n} = \frac{k}{a_k} - \frac{k-1}{n} < \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k}{a_k} < \frac{A(n)}{n} + \frac{1}{n},$$

odnosno:

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{k}{a_k} \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

čime je dokaz završen.

Teorema 1.2. Neka je A niz gustine nula. Tada postoji beskonačno brojeva n za koje $A(n)|n$.

Dokaz: Neka je a_n n-ti član niza A i neka je $a_1 = m$. $k > m$ je proizvoljan prirodan broj. Dokažimo da postoji n takvo da je $A(n) \cdot k = n$.

Pretpostavimo suprotno: Postoji $k > m$ takvo da ni za jedno n ne važi jednakost: $A(n) \cdot k = n$. Tada za svako i za koje važi da je $a_i < i \cdot k$ mora važiti i $a_{i+1} \leq i \cdot k$. U suprotnom bilo bi $A(i \cdot k) \cdot k = i \cdot k$. Kako je gustina skupa A nula, postoji i tako da je $a_i > i \cdot k$. Neka je x najveći prirodan broj za koji je $a_x < x \cdot k$. Tada je $(x+1) \cdot k \leq a_{x+1} \leq x \cdot k$. Kako je u opštem slučaju $x \cdot k < (x+1) \cdot k$, došli smo do kontradikcije, čime je dokaz završen.

Za razliku od asimptotske gustine, koja zavisi od svih članova datog niza A, gustina koja zavisi samo od nekoliko prvih članova tog niza definiše se na sledeći način:

$$d(A) = \inf_{n\geq 1} \frac{A(n)}{n}$$

i naziva se *Šnirelmanova gustina*. Kao i kod asimptotske gustine, $A(n)$ predstavlja broj članova niza A ne većih od n (Lepson 1950; Niven *et al*. 1991).

Očigledno je da važi: $0 \leq d(A) \leq \delta_1(A) \leq 1$.

Činjenica da ova gustina zavisi samo od prvih članova niza vidi se na primerima:

Ako $1 \notin A$, tada je $d(A) = 0$; ako $k \notin A$, tada je $d(A) \leq 1/k$. Za razliku od donje, asimptotske gustine (tvrđenje 4), Šnirelmanova gustina menja vrednost pri dodavanju odnosno oduzimanju prvih članova datom nizu A. Takođe, $d(A) = 1$ ako i samo ako skup A sadrži sve pozitivne cele brojeve, dok gustina $\delta(A)$ može imati vrednost 1 i ako je skup A neki od podskupa skupa prirodnih brojeva, koji ne sadrži sve elemente iz N.

Definicija 1.3. Neka $0 \in A$ i $0 \in B$. Suma $A + B$ skupova A i B je skup svih celih brojeva oblika $a + b$, takvih da $a \in A$ i $b \in B$.

S obzirom da je rad baziran na upotrebljavanju samo asimptotske gustine u dokazima teorema navedenih u daljem tekstu, sledeće dve teoreme vezane za Šnirelmanovu gustinu navodimo bez dokaza:

Teorema 1.3. Neka su A_1 i B_1 fiksirani skupovi nenegativnih celih brojeva ne većih od g, za bilo koje $g \in N$. Važi da $0 \in A_1$ i $0 \in B_1$. Vrednost $A_1 + B_1$ označimo sa C_1. Ako za neko θ iz intervala (0,1] važi da je $A_1(m) + B_1(m)\ \theta \cdot m$, $m = 1, 2, \ldots, g$, tada je $C_1(g) \geq \theta \cdot g$.

Teorema 1.4. ($\alpha\beta$ teorema) Neka su A i B bilo koji skupovi nenegativnih celih brojeva, takvih da $0 \in A$ i $0 \in B$, i neka α, β i γ označavaju Šnirelmanove gustine skupova A, B i C, redom. Tada je $\gamma \geq \min(1, \alpha + \beta)$.

Termin *rupa*

Mnoge teoreme iz teorije gustine skupova u skupu prirodnih brojeva dokazane su primenom graničnih vrednosti funkcija, kada broj članova datog niza teži beskonačnosti, bez striktnog obraćanja pažnje na veličinu razmaka između susednih elemenata niza. Uvođenjem termina rupe, uvedene su i dokazane neke teoreme i tvrđenja koja rešavaju neke složenije već rešene ili pak nerešene probleme.

Definicija 2.1. Neka je A podskup skupa prirodnih brojeva, čiji su elementi a_i poređani u rastućem poretku. Rupa između dva susedna elementa skupa A, a_i i a_{i+1}, jednaka je razlici vrednosti ta dva elementa, $a_{i+1} - a_i$.

Teorema 2.1. Ako se svaka sledeća rupa u datom skupu A strogo povećava, tada je gustina skupa 0.

Objašnjenje: Tvrđenje važi zato što je gornja gustina svakog skupa kod kojeg se rupa striktno povećava manja ili jednaka gornjoj gustini skupa koji ima rupe veličine: 1, 2, 3, ..., n, n+1, ..., redom. To je skup čiji su elementi: 1, 1+2, 1+2+ +3, 1+2+3+4, itd. n-ti član u tom skupu ima vrednost $\frac{n(n+1)}{2}$. Gustina tog skupa jednaka je:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} = im_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

Kako je gustina datog skupa manja ili jednaka nuli, sledi da je njegova gustina, pa samim tim i gornja gustina jednaka 0, odnosno da je gornja gustina (pa samim tim i gustina) svakog skupa kod kojeg se rupa striktno povećava jednaka 0.

Primenom teoreme 2.1. može se odrediti gustina nekih rekurentnih nizova kao sto je Fibonačijev niz, o čemu nam govori sledeća teorema:

Teorema 2.2. Nizovi zadati rekurentnom jednačinom oblika $a_n = x \cdot a_{n-1} + y \cdot a_{n-2}$ za koju važi $x > 1$ i $y > 0$ ili $x = 1$, $y > 0$, $(y+1) \cdot a_1 > a_2$ i $a_2 > a_1$ imaju gustinu nula.

Dokaz: Prema teoremi 2.1. svaki niz za koji važi nejednakost $a_n - a_{n-1} > a_{n-1} - a_{n-2}$, odnosno $a_n > 2a_{n-1} - a_{n-2}$ (a_i je i-ti član niza), ima gustinu 0.

Jasno je da prethodni uslov zadovoljavaju svi nizovi zadati rekurentnom jednačinom oblika $a_n = x \cdot a_{n-1} + y \cdot a_{n-2}$ kod kojih je $x > 1$ i $y > 0$. Ako je $x = 1$ i $a_n - a_{n-1} > a_{n-1} - a_{n-2}$ iz rekurentne veze sledi da niz ima gustinu nula ako za svako n važi: $(y+1) \cdot a_{n-2} > a_{n-1}$. Takođe, kako je niz rastući, $a_{n-1} > a_{n-2}$. Dokažimo da je uslov zadovoljen indukcijom po n.

$(y+1) \cdot a_{n-2} > a_{n-1}$ i $a_{n-1} > a_{n-2}$,

sledi da je

$$a_{n-1} < a_n = a_{n-1} + y \cdot a_{n-2} < a_{n-1} + y \cdot a_{n-1} =$$

$$= (y+1) \cdot a_{n-1},$$

što je i trebalo dokazati.

Teorema 2.3. Skup koji ima proizvoljno veliku rupu, a koji nema osobinu da mu se rupe striktno povećavaju, ne mora imati gustinu 0.

Sledeći primer pokazaće da važi prethodno navedena teorema.

Posmatrajmo skup A koji za svako k sadrži k^2 uzastopnih prirodnih brojeva, ali i za svako k ima rupu dužine k. Primer takvog skupa je skup: {1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, ...}. Ovaj skup sadrži k^2 uzastopnih prirodnih brojeva, zatim ima rupu dužine k, zatim sadrži $(k + 1)^2$ uzastopnih priodnih brojeva, ..., sadrži $(k + i)^2$ uzastopnih prirodnih brojeva, ima rupu dužine $k + i$. Primetimo da taj skup ima proizvoljno veliku rupu. Izračunajmo njegovu gustinu:

$$\frac{A(n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} i^2}{\sum_{i=1}^{m} (i^2 + i)} = \frac{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}}{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2}}$$

$$\lim\inf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} =$$

$$= \lim\inf_{n\to\infty} \frac{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}}{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2}} =$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{2m+1}} = 1$$

Kako ovaj skup ima proizvoljno veliku rupu i donju gustinu jedan, sledi da ima i gustinu jedan. Napomenimo da komplement ovog skupa ima gustinu nula iako sadrži proizvoljno dugačak niz uzastopnih prirodnih brojeva.

Teorema 2.4. Neka je dat skup A gustine α ($\alpha > 0$). Tada skup A sadrži beskonačno mnogo rupa čija je veličina $\leq 1/\alpha$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno: Neka je broj rupa veličine ne veće od $1/\alpha$ konačan, i neka se sve one nalaze pre nekog broja k, $k \in A$. Veličina rupa koje se nalaze posle broja k je ne manja od $[1/\alpha]+1$. Na osnovu toga, gustinu skupa A računamo na sledeći način:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(k)+\frac{n-k}{[1/\alpha]+1}}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{A(k)\cdot([1/\alpha]+1)+n-k}{n\cdot([1/\alpha]+1)} =$$

$$= \frac{1}{[1/\alpha]+1} < \alpha$$

što je kontradikcija sa našom pretpostavkom. Time je dokaz završen.

Pre navođenja nekih važnijih teorema i njihovih dokaza navodimo prikaz jednog već rešenog problema, koji će nas uvesti malo dublje u teoriju gustine skupova.

Problem potpunog stepena

Da li postoji beskonačan skup prirodnih brojeva sa osobinom da suma elemenata bilo kojeg konačnog podskupa tog beskonačnog skupa nije potpun stepen? (Andreescu i Savchev 2003)

Rešenje: Neophodno je prvo dokazati sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 2.1. (Andreescu i Savchev 2003) Skup svih potpunih stepena celih brojeva je 0-skup.

Neka je $A(n)$ broj potpunih stepena, koji nisu veći od n. Kako je $a^k \leq n$ ako i samo ako je

$$a \leq \lfloor n^{1/k} \rfloor,$$

broj k-tih stepena ne većih od n je najviše $\lfloor n^{1/k} \rfloor$. Pretpostavljajući da postoji bar jedan potpun k-ti stepen takav da važi $a^k \leq n$, imamo da je $n \geq a^k \geq 2^k$, odakle je $k \leq \log_2 n$. Dakle, broj k-tih stepena ne većih od n je pozitivan za $k \leq \log_2 n$. Sledi da je

$$A(n) \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \ldots \leq$$

$$\leq \sqrt{n}\cdot k \leq \sqrt{n}\cdot \log_2 n$$

odnosno da je gustina skupa svih potpunih stepena jednaka:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot\log_2 n}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}} = 0$$

Da bismo odgovorili na traženo pitanje neophodno je dokazati i:

Tvrđenje 2.2. (Andreescu i Savchev 2003) Ako je $A \subset N$ 0-skup, tada postoji beskonačan skup B, $B \subset N$, takav da suma bilo kojeg konačnog podskupa skupa B ne pripada skupu A.

Dokaz 1(Andreescu i Savchev 2003): Traženi beskonačan skup $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ konstuisaćemo indukcijom.

Skup A ne može sadržati sve elemente iz N jer je gustina skupa N jednaka 1. Dakle, postoje prirodni brojevi koji nisu u A. Jedan od njih označimo sa b_1. Pretpostavimo da su prirodni brojevi $b_1, b_2, \ldots b_n$ odabrani tako da je bilo koji podskup suma iz skupa $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ ne pripada skupu A. Neka su $s_1, s_2, \ldots, s_m$ podskupovi suma iz tog skupa (uračunata je i suma koja ima vrednost 0 i odgovara praznom skupu). Kako skup A ima gustinu 0, sledi da i svi skupovi oblika $A - s_i = \{a - s_i \mid a \in A, a - s_i\ 0, i = 1, 2, \ldots, m\}$ imaju gustinu 0. Konačna unija 0-skupova je 0-skup, te je unija svih skupova oblika $A - s_i$ takodje 0-skup. Dakle, postoji $b_{n+1} \in N$ koji ne pripada skupu $A - s_i$ za bilo koje $i = 1, 2, \ldots, m$. Takav izbor broja b_{n+1} obezbedjuje da podskup suma skupa $\{b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}\}$ ne pripada skupu A.

Ovo možemo objasniti i na sledeći način: Dokaz 2:

Kako suma elemenata traženog skupa ne sme biti potpun stepen, taj skup ćemo konstruisati induktivno. Elemente u skupu ređaćemo u rastućem poretku. Neka je prvi element skupa a_1, tako da a_1 nije potpun stepen. Ako je poznat skup od k elemenata, koji zadovoljava tražene uslove, sledeći koji treba da konstruišemo je broj $a_{k+1} = x$.

x konstruišemo tako da važi da x i zbir x-a i sume elemenata svakog podskupa skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ pripadaju istoj rupi (tj da $x, x + a_1, x + a_2, \ldots, x + a_k, x + a_1 + a_2, \ldots, x + a_{k-1} + a_k, \ldots, x + a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ nisu potpuni stepeni). Kako je gustina skupa svih stepena jednaka 0, taj skup ima proizvoljno veliku rupu. Samim tim, ima i rupu koja je veća od $x + a_1 + a_2 + ... + a_k$. Stoga, takav skup je moguće konstruisati.

Imajući sve dokazano u vidu, dobijamo da postoji beskonačan skup prirodnih brojeva, tako da suma elemenata bilo kojeg konačnog podskupa tog beskonačnog skupa nije potpun stepen.

Uopštenje problema potpunog stepena. Postoji beskonačan podskup prirodnih brojeva takav da je suma elemenata bilo kog njegovog konačnog podskupa udaljena od najbližeg potpunog stepena za barem x, gde je x prirodan broj.

Dokaz: Neka je skup A_i, $i \in (-x, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, x)$ podskup prirodnih brojeva definisan na sledeći način: $A_i = (a \mid a + i = x, x > 0, k > 1)$. Primetimo da je gustina skupa A_i jednaka gustini skupa svih potpunih stepena tj. jednaka nuli. Zato je i gustina unije ovih skupova jednaka nuli. Iz svega prethodno navedenog sledi da postoji beskonačan skup kod koga je zbir elemenata svakog konačnog podskupa različit od bilo kog elementa nekog skupa gustine nula, pa samim tim i skupa $A_{-x} \cup \ldots \cup A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_x$.

Substancijalnost skupova i gustina

Neki skupovi imaju svojstvo da suma recipročnih vrednosti njihovih elemenata divergira. Skupovi koji imaju tu osobinu nazivaju se substancijalni. Očigledno je da skupovi sa konačnim brojem elemenata nisu substancijalni. Takođe, skup prirodnih brojeva i skup prostih brojeva su substancijalni. Sledeća teorema povezuje gonju gustinu i substancijalnost skupova.

Teorema 3.1. (Rice 2007) Ako je $S \subseteq N$ i $\delta_2(S) > 0$, tada je S substancijalan, odnosno

$$\sum_{x \in S} \frac{1}{x} = \infty$$

Dokaz (Rice 2007): Pretpostavimo da važi $S \subseteq N$ i $\delta_2(S) = \delta > 0$. Neka je $N_0 = 1$. Biramo niz $\{N_k\}_{k \in N}$ prirodnih brojeva, tako da je:

$$N_k \geq \frac{4N_{k-1}}{\delta}, \quad \left|S \cap [1, N_k)\right| \geq \frac{\delta N_k}{2},$$

za svako $k \in N$. Tada je

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in A \cap [N_{k-1}, N_k)} \frac{1}{n} \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left|A \cap [1, N_k)\right| - N_{k-1} \right) \frac{1}{N_k} \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\delta N_k}{2} - \frac{\delta N_k}{4} \right) \cdot \frac{1}{N_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{4}$$

što teži beskonačnosti, čime je dokaz završen.

Kao direktnu posledicu ove teoreme navodimo tvrđenje:

Tvrđenje 3.1. Ako $\sum \frac{1}{n}$, $n \in S$ konvergira, tada je $\delta(S) = 0$.

Naglasimo da je do sada definisana gustinu isključivo u skupu prirodnih brojeva. Analogno se definiše i donja i gornja gustina, pa i asimptotska gustina u proizvoljnom beskonačnom podskupu skupa prirodnih brojeva.

Definicija 3.1. Neka je A beskonačan podskup skupa prirodnih brojeva, i neka je skup B podskup skupa A. Veličine $\delta_{1,A}(B)$ i $\delta_{2,A}(B)$ i $\delta_A(B)$ definisane na sledeći način:

$$\delta_{1,A}(B) = \liminf_{n \to \infty} \frac{B(n)}{A(n)}$$

$$\delta_{2,A}(B) = \limsup_{n \to \infty} \frac{B(n)}{A(n)}$$

$$\delta_A(B) = \lim_{n \to \infty} \frac{B(n)}{A(n)}$$

nazivaju se, redom, donja, gornja gustina i gustina skupa B u skupu A.

Prethodno uvedena definicija pomaže nam da objasnimo i dokažemo mnoge teoreme. Sledeća teorema odnosi se na primenu gustine beskonačnog skupa u skupu prostih brojeva.

Teorema 3.2. a) Neka je Q neki beskonačan podskup skupa prostih brojeva, gustine $d > 0$ u prostim brojevima. Tada je skup Q substancijalan, odnosno $\sum_{q \in Q} \frac{1}{Q}$ divergira.

Dokaz: Neka je P skup prostih brojeva i neka je $Q(t)$ broj elemenata skupa Q manjih od t. Na osnovu teoreme o prostim brojevima važi da je $Q(t) > \frac{d \cdot t}{2 \ln t}$, za sve $t > t_0$. Takođe važi:

$$\sum_{q\in Q}\frac{1}{q_i}=\sum_{p_i\in P}\frac{Q(p_i)-Q(p_{i-1})}{p_i}$$

jer je $Q(p_i)-Q(p_{i-1})=1$ ako $p_i\in Q$, u suprotnom jednako je 0. Koristeći Riman-Stiltjesovu sumaciju dobijamo:

$$\sum_{q\in Q}\frac{1}{q_i}=\sum_{p_i\in P}\frac{Q(p_i)-Q(p_{i-1})}{p_i}=$$

$$=\int_2^x\frac{\mathrm{d}Q(t)}{t}.$$

Formulom parcijalne integracije za Riman--Stiltjesov integral ova suma je

$$\sum_{q\in Q}\frac{1}{q_i}=\int_2^x\frac{\mathrm{d}Q(t)}{t}=C+\int_2^x\frac{Q(t)\cdot\mathrm{d}t}{t^2}$$

gde je $C=\dfrac{Q(t)}{t}$ u graničnim tačkama. Zbog pretpostavke o gustini

$$C+\int_2^x\frac{Q(t)\cdot\mathrm{d}t}{t^2}\geq\frac{d}{2}\cdot\int_3^x\frac{t\ \mathrm{d}t}{t^2\ln t}=\frac{d}{2}\cdot\int_3^x\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

ovaj poslednji integral je $\frac{d}{2}\cdot\ln\ln x+c_2$. Dakle, $\sum_{q\in Q}\frac{1}{q}\geq\frac{d}{2}\cdot\ln\ln x$, što teži beskonačnosti kad x teži beskonačno. Odnosno $\sum_{q\in Q}\frac{1}{q}$ divergira.

Prethodnu teoremu možemo uopštiti:

Teorema 3.2. b) Neka je Q neki beskonačan podskup supstancijalnog podskupa prirodnih brojeva A, gustine $\delta>0$ u skupu A. Tada je skup Q substancijalan, odnosno $\sum_{q\in Q}\frac{1}{q}$ divergira.

Dokaz: Neka su elementi skupa Q, redom q_1, q_2, … Kako je gustina skupa Q u skupu A veća od nule, postoji $0<d$ tako da za svako $t>t_0>1$ važi da je $Q(t)>A(t)\cdot d$. Dokažimo da za proizvoljno $k>\frac{1}{d}$ i proizvoljno veliko m, važi:

$$\sum_{q\in Q,q<m}\frac{k}{q}>\sum_{a\in A,m>a>t_0}\frac{1}{a}.$$

Dokazujemo indukcijom.

Posmatrajmo prvih k najmanjih elemenata $a\in A$ za koje je $a>t_0$. Konstruišimo rastući niz B za koji važi da je i-ti element niza B $k\cdot i$-ti element po redu rastućeg niza A, koji je veći od t_0. Stoga, važi da je:

$$\frac{k}{q_1}>\sum_{a\in A,t_0<a\leq b_1}\frac{1}{a}$$

jer je $q_1\leq t_0\leq a$. Pretpostavimo da za prvih n brojeva važi da je

$$\sum_{q\in Q,q\leq q_n}\frac{k}{q}>\sum_{a\in A,t_0<a\leq b_n}\frac{1}{a}$$

gde je b_n n-ti član niza B. Dokažimo da je

$$\sum_{q\in Q,q\leq q_{n+1}}\frac{k}{q}>\sum_{a\in A,t_0<a\leq b_{n+1}}\frac{1}{a}$$

Kako je $Q(b_n)>A(b_n)\cdot d\geq(k\cdot n+1)\cdot d$, odakle je $p_{n+1}<b_n$, sledi da je:

$$\sum_{q\in Q,q\leq q_{n+1}}\frac{k}{q}>\sum_{a\in A,t_0<a\leq b_n}\frac{1}{a}+\sum_{a\in A,b_n<a\leq b_{n+1}}\frac{1}{a}=$$

$$=\sum_{a\in A,t_0<a\leq b_{n+1}}\frac{1}{a}$$

Kako ovo važi za svako, proizvoljno veliko n i $\sum_{a\in Q}\frac{1}{a}$ divergira, sledi da i suma $\sum_{a\in Q}\frac{1}{q}$ divergira.

Prethodno dokazana teorema pomaže nam da dokažemo mnoga tvrđenja koja se odnose kako na gustinu skupa u skupu prirodnih brojeva tako i na gustinu nekog skupa u beskonačnom podskupu skupa prirodnih brojeva, konkretno, u skupu prostih brojeva.

Sledeća teorema odnosi se na skupove koji sadrže brojeve koji su deljivi prostim brojem p, a nisu deljivi brojem p^2. Direktno je povezana sa gornjom gustinom, a njene posledice se odnose i na asimptotsku gusinu posmatranih skupova. Teorema je navedena sa dokazom.

Teorema 3.3. (Niven 1951) Ako je p_i skup prostih brojeva tako da $\sum\frac{1}{p_i}$ divergira tada je $\delta_2(A)\leq\sum\delta_2(Ap_i)$ (Ap predstavlja podskup celih brojeva n iz A za koje $p\mid n$ i p^2 ne deli n, za svaki prost broj p).

Dokaz (Niven 1951): Neka I predstavlja skup svih pozitivnih celih brojeva, a B^r komplement skupa $Ip_1\cup Ip_2\cup\ldots\cup Ip_r$, odnosno B^r sadrži sve one brojeve koji su deljivi bar jednim od kvadrata brojeva: p_1, p_2, …, p_r.

Broj celih brojeva u skupu B^r, koji su manji od x, označicemo $B^r(x)$. Indukcijom dobijamo da je:

$$B^r(x) = \sum (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r} \cdot \left[\frac{x}{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}}\right]$$

Dalje, imamo da je:

$$B^r(x) < \sum (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r} \cdot \frac{x}{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}} + 3^r$$

Nejednakost važi zato što je $[x] < x + 1$ (svako α može uzeti vrednosti 0, 1 ili 2, što znači da data suma ima 3^r sabiraka).

Stoga, imamo da je:

$$B^r(x) < \sum (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r} \cdot \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}} + \frac{3^r}{x}$$

odnosno

$$B^r(x) < \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2}\right) + \frac{3^r}{x}$$

Kako je $\sum \frac{1}{p_i} = \infty$, sledi da je i

$$\sum \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_i^2}\right) = \infty.$$

Možemo odabrati dovoljno veliko r tako da važi:

$$\prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

za neko $\varepsilon > 0$. Takođe, biramo N dovoljno veliko tako da je $\frac{3^r}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$ za $x \geq N$.

Koristići sve do sada dobijene jednakosti i nejednakosti, imamo da je:

$$\frac{A(x)}{x} = \frac{B^r(x)}{x} + \sum \frac{Ap_i(x)}{x} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \sum \frac{Ap_i(x)}{x} = \varepsilon + \sum \frac{Ap_i(x)}{x}$$

Dakle, imamo da je $\delta_2(A) \leq \sum \delta_2(Ap_i)$, što je i trebalo dokazati.

Navodimo tri posledice ove teoreme:

Posledica 1. Ako za skup prostih brojeva $\{p_i\}$ važi $\delta(Ap_i) = 0\ \forall i$, i ako važi $\sum \frac{1}{p_i} = \infty$, tada je $\delta(A) = 0$.

Posledica 2. Za bilo koje fiksirano k, ako je $\{p_i\}$ skup prostih brojeva za koje važi $\sum \frac{1}{p_i} = \infty$, i ako je A bilo koji niz čiji su članovi deljivi sa najviše k od ovih prostih brojeva, prvog stepena, tada je $\delta(A) = 0$.

Posledica 3. Neka je $\{p_i\}$ skup prostih brojeva za koje važi $\sum \frac{1}{p_i} = \infty$. Ako je $\delta_2(A) \neq 0$, tada je $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_2(Ap_i) = \infty$

Teorema 3.4. (Niven 1951) Za fiksirano m, skup A prirodnih brojeva za koji je $a \in A$, akko je $x^2 \equiv m (\text{mod } a)$ rešivo, ima gustinu 0 ako i samo ako m nije potpun kvadrat.

Dokaz (Niven 1951): Koristimo posledicu1. Slučaj kada je m potpun kvadrat je trivijalan. Kada $m \neq x^2$ za svako $x \in N$, i važi $(m, a) = 1$, postavlja se pitanje: da li postoji beskonačno brojeva p_i tako da m nije kvadratni ostatak po modulu p_i?

Neka se brojevi $q_1, q_2, \ldots, q_k$ javljaju na neparan stepen u kanonskoj faktorizaciji broja m (postoje takvi prosti brojevi jer m nije potpun kvadrat).

Koristeći Gausov zakon reciprociteta imamo da je $\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} + \frac{q-1}{2}}$.

Neka je p broj oblika $4k + 1$ takav da za neparan broj q_i-ova važi da je $\left(\frac{p}{q_i}\right) = -1$. Iz kineske teoreme o ostacima dobijamo da ove osobine određuju broj p po modulu koji deli $4m$. Sledi da je $\prod \left(\frac{q_i}{p}\right)^{\alpha_i} = \left(\frac{m}{q}\right) = -1$. Na osnovu Dirihleove teoreme imamo beskonačno vrednosti za p koje zadovoljavaju ovu jednakost i za koje ona važi (dobija se presek prostih brojeva i nekog aritmetičkog niza oblika: x, $4m + x$, $2 \cdot 4m + x, \ldots$ gde su x i m uzajamno prosti). Dakle, $\sum \frac{1}{p_i} = \infty$, te je $\sum \delta(Ap_i) \geq \delta_2(A)$. Kako svako p_i ne deli nijedno $a \in A$, sledi da je $\delta(Ap_i) = 0\ \forall p_i$ koje se pojavljuje u sumi $\sum \frac{1}{p_i}$. Zaključno, $\delta(A) = 0$.

Za uopštavanje prethodno navedenog tvrđenja neophodno je navesti još jednu teoremu. Dokaz te teoreme nije neophodan za razumevanje traženog uopštenja, te je navodimo bez dokaza.

Teorema 3.5. (Matthews 1997) Neka je m fiksirano, skup Q skup prostih brojeva za koji je $q \in Q$ ako i samo ako $x^p \equiv m(\text{mod } q)$ nije rešivo, gde je p prost broj. Tada skup Q ima gustinu veću od 0 u skupu prostih brojeva ako i samo ako m nije potpun p-ti stepen.

Primetimo da za proste brojevi za koje $x^p \equiv m(\text{mod } q)$ nije rešivo, važi da je $q \equiv 1(\text{mod } p)$. U suprotnom bi važilo da je x^p, za svako $x \in N_q$, potpun sistem ostataka po modulu q. Na osnovu uopštene Dirihleove teoreme važi da je gustina skupa Q u prostim brojevima manja od $1/p$, a dokazano je da je ona veća od nule.

Koristeći prethodno navedenu teoremu i posledicu 1. teoreme 3.3. uopštićemo teoremu 3.4. Dato je uopštenje te teoreme, sa dokazom.

Teorema 3.6. Neka je m fiksirano, a skup A skup prirodnih brojeva za koji je $a \in A$ ako i samo ako je $x^p \equiv m(\text{mod } a)$ rešivo, gde je p prost broj. Tada skup A ima gustinu 0 ako i samo ako m nije potpun p-ti stepen.

Dokaz: Slučaj kada je m potpun p-ti stepen je trivijalan. Jasno je da je tada gustina skupa A $\delta(A) = 1$ jer su svi prirodni brojevi u skupu A.

Kada $m \neq x^p$ za svako $x \in N$, tada možemo da posmatramo skup Q prostih brojeva za koji je $q \in Q$ ako i samo ako $x^p \equiv m(\text{mod } q)$ nije rešivo. Primetimo da je $\delta(A_q) = 0$ za svako $q \in Q$. Kako je gustina skupa Q u prostim brojevima veća od nule, na osnovu teoreme 3.2. važi da $\sum_{q \in Q} \frac{1}{q}$ divergira. Primenjujući taj rezultat, iz posledice 1. teoreme 3.3. sledi da je $\delta(A) = 0$, što je i trebalo dokazati.

Računanje gustine *k*-fri brojeva

U ovom odeljku rada prikazan je jedan od već poznatih načina računanja gustine beskvadratnih brojeva u skupu prirodnih brojeva. Na osnovu toga, analognim postupkom, izračunata je gustina k-fri brojeva. Dokazi su izvedeni korišćenjem Mebijusove funkcije.

Problem beskvadratnog broja (Niven *et al.* 1991): Kolika je gustina beskvadratnih brojeva?

Neophodno je prvo navesti definiciju Mebijusove funkcije i neke njene osnovne osobine. μ je Mebijusova funkcija, za koju važi:

$$\mu : N \to \{-1, 0, 1\}$$

$$\mu(N) = \begin{cases} 1, & \omega(n) = 2k, k \in Z, p^2 \neg | n \\ -1, & \omega(n) = 2k+1, k \in Z, p^2 \neg | n \\ 0, & p^2 | n, \text{ gde je } p \text{ prost broj} \end{cases}$$

Koristimo u računu sledeću činjenicu: $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ kada je $n \neq 1$. Kada je $n = 1$ važi $\sum_{d|n} \mu(d) = 1$.

Kako imamo da je

$$\mu^2(N) = \sum_{d^2|n} \mu(d) = |\mu(n)|$$

sledi da je

$$\sum_{n \le x} |\mu(n)| = \sum_{n \le x} \sum_{d^2|n} \mu(d) = \sum_{d \le \sqrt{x}} \sum_{k=1}^{k \le x/d^2} \mu(d) =$$

$$= \sum_{d \le \sqrt{x}} \mu(d) \cdot \left[\frac{x}{d^2}\right] = \sum_{d \le \sqrt{x}} \mu(d) \cdot \left(\frac{x}{d^2} + O(1)\right) =$$

$$= \sum_{d \le \sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{x}) =$$

$$= x \cdot \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d \ge \sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2}\right) + O(\sqrt{x})$$

Kako je

$$\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}$$

imamo da je

$$\sum_{n \le x} |\mu(n)| = \frac{6}{\pi^2} \cdot x - x \cdot \sum_{d \ge \sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{x}).$$

U datu jednakost uvrštavajući sledeću nejednakost

$$x \cdot \sum_{d \ge \sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} \le \sum_{d \ge \sqrt{x}} \left|\frac{\mu(d)}{d^2}\right| \le$$

$$\le \sum_{d \ge \sqrt{x}} \frac{1}{d^2} = O\left(\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

dobijamo da je

$$\sum_{n \le x} |\mu(n)| \ge \frac{6}{\pi^2} - x \cdot O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + O(\sqrt{x}) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2} \cdot x + O(\sqrt{x})$$

Uzimajući sve do sada navedene jednakosti i nejednakosti u obzir, možemo izračunati gustinu beskvadratnih brojeva:

$$\delta = \frac{\frac{6}{\pi^2} \cdot x + O(\sqrt{x})}{x} = \frac{6}{\pi^2} .$$

Koristeći osobine konvolucije i multiplikativnost posmatranih funkcija imamo:

$$D_f(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^S}$$

$$\zeta(S) = D_1(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^S}$$

$$D_f(S) \cdot D_g(S) = D_{f*g}(S)$$

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$1 * \mu = \delta$$

Sledi da je:

$$D_1(2) \cdot D_\mu(2) = D_{1*\mu}(2) = D_\delta(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_\mu(2) = \frac{1}{D_1(2)} = \frac{6}{\pi^2} .$$

Analogno beskvadratnim, određujemo gustinu k-fri brojeva.

Problem *k*-fri broja: Kolika je gustina k-fri brojeva?

Analogno Mebijusovoj funkciji, definšimo funkciju $f^k(n)$ sa sledećim osobinama:

$$f^k(n) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n\ k\text{-fri} \\ 0, & \text{kada } p^k | n, \text{ gde je } p \text{ prost broj} \end{cases}$$

Na osnovu toga imamo da je

$$f^k(n) = \sum_{d^k|n} \mu(d)$$

Iz toga sledi da je

$$\sum_{n \le x} f^k(n) = \sum_{n \le x} \sum_{d^k|n} \mu(d) = \sum_{d \le \sqrt[k]{x}} \sum_{l=1}^{x/d^k} \mu(d) =$$

$$= \sum_{d \le \sqrt[k]{x}} \mu(d) \cdot \left[\frac{x}{d^k}\right] = \sum_{d \le \sqrt[k]{x}} \mu(d) \cdot \left(\frac{x}{d^k} + O(1)\right) =$$

$$= \sum_{d \le \sqrt[k]{x}} \frac{\mu(d)}{d^k} + O(\sqrt[k]{x}) =$$

$$= x \cdot \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k} - \sum_{d \ge \sqrt[k]{x}}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}\right) + O(\sqrt[k]{x}).$$

Kako je

$$\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k} = \frac{1}{\zeta(k)}$$

imamo da je

$$\sum_{n \le x} f^k(n) = \frac{1}{\zeta(k)} \cdot x - x \cdot \sum_{d \ge \sqrt[k]{x}} \frac{\mu(d)}{d^k} + O(\sqrt[k]{x}) .$$

U datu jednakost uvrštavajući sledeću nejednakost

$$x \cdot \sum_{d \ge \sqrt[k]{x}} \frac{\mu(d)}{d^k} \le$$

$$\le x \cdot \left| \sum_{d \ge \sqrt[k]{x}} \frac{\mu(d)}{d^k} \right| \le x \cdot \sum_{d \ge \sqrt[k]{x}} \frac{1}{d^k} = x \cdot O\left(\int_{\sqrt[k]{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^k}\right) =$$

$$= x \cdot O\left(\frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right)$$

dobijamo da je

$$\sum_{n \le x} f^k(n) \ge \frac{1}{\zeta(k)} - x \cdot O\left(\frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right) + O(\sqrt[k]{x}) =$$

$$= \frac{1}{\zeta(k)} \cdot x + O(\sqrt[k]{x}).$$

Uzimajući sve do sada navedene jednakosti i nejednakosti u obzir, možemo izračunati gustinu k-fri brojeva.

$$\delta = \frac{\frac{1}{\zeta(k)} \cdot x + O(\sqrt[k]{x})}{x} = \frac{1}{\zeta(k)} .$$

Analogno beskvadratnim brojevima, i ovde smo koristili:

$$D_1(k) \cdot D_\mu(k) = D_{1*\mu}(k) = D_\delta(k) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_\mu(k) = \frac{1}{D_1(k)} = \frac{1}{\zeta(k)} .$$

Uopštavanjem dokaza za gustinu beskvadratnih brojeva u skupu prirodnih brojeva, dobili smo da je gustina k-fri brojeva u skupu prirodnih brojeva $1/(\zeta(k))$.

Zaključak

Gustina skupa u skupu prirodnih brojeva definiše se $\delta(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{A(n)}{n}$, gde $A(n)$ predstavlja broj brojeva iz datog skupa A koji su manji od n (brojevi iz skupa su poređani u rastući niz). Intuitivno, to je „verovatnoća” da se izabrani element iz skupa prirodnih brojeva nalazi u datom skupu A. Gustina može uzimati bilo koju vrednost iz intervala [0,1].

Ovaj rad je teorijska analiza asimptotske gustine, koja ne zavisi od prvih nekoliko članova niza, već samo od svih članova datog niza. Definisan je termin *rupe*, koji je omogućio jednostavnije dokazivanje mnogih novouvedenih teorema. Rupa između dva uzastopna elementa niza predstavlja apsolutnu vrednost razlike vrednosti ta dva elementa. Pokazano je da ako se rupa u datom skupu A striktno povećava, gustina tog skupa mora biti 0, dok ako niz sadrži proizvoljno veliku rupu (a da mu se rupe ne povećavaju striktno), njegova gustina u skupu prirodnih brojeva može uzimati i pozitivne vrednosti.

Analogno gustini skupa u skupu prirodnih brojeva, uvedena je definicija gustine skupa u proizvoljnom skupu A, koji je podskup skupa prirodnih brojeva. Koristeći tu definiciju dokazana je teorema: ako je dat beskonačan podskup (Q) substancijalnog podskupa skupa prirodnih brojeva, pozitivne gustine u tom podskupu, tada je i sam taj skup Q substancijalan. Takođe, već poznata, i dokazana teorema za kvadratne ostatke: skup A prirodnih brojeva za koji je $a \in A$ ako i samo ako je $x^2 \equiv m (\mathrm{mod}\ a)$ rešivo, ima gustinu 0 ako i samo ako m nije potpun kvadrat (m je fiksirano), uopštena je na potpune p-te stepene x-a, po modulu a. Pored toga, rešenje problema beskvadratnog broja uopšteno je na rešenje problema k-fri broja, korišćenjem funkcije koja je analogna Mebijusovoj funkciji korišćenoj u poznatom dokazu gustine beskvadratnih brojeva.

Zahvalnost. Zahvaljujemo se mentoru Marku Đikiću za pomoć pri izradi projekta. Takođe, prof. dr. Goranu Đankoviću na dokazu teoreme 3.2.a, Vukašinu Stojisavljeviću za ideju dokaza teoreme 3.2.b, kao i Stevanu Gajoviću i Stefanu Mihajloviću za pomoć pri pisanju rada.

Literatura

Andreescu T., Savchev S. 2003. Mathematical Miniatures. Problem 42. *Perfect Powers*. MAA Textboox

Lepson B. 1950. Certain best possible results in the Theory of Shnirelmann density. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **1**: 592.

Matthews K. R. 1997. An example from Power Residues of the Critical Problem of Crapo and Rota. *Journal of Number Theory*, **9**: 203.

Niven I. 1951. The asymptotic density of sequences. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **57**: 420.

Niven I., Zuckerman H. S., Montgomery H. L. 1991. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, str. 472-483.

Rice A. 2007. Density and substance: an investigation into the size of integer subsets. UGA VIGRE Graduate Student Seminar, September 2007.

Anđela Šarković and Tanja Asanović

Density of Sets in Set of Positive Integers

This paper is an introduction to natural density theory. Defining the term *rupa* (a gap between two consecutive elements) made possible to calculate the density of certain sets. Density in subset A of positive integer is defined analogously to density in positive integers. The definition enabled the proof of following theorem: if Q is subset of substantial subset A of positive integers which has density in A greater than zero, then Q is substantial, too. The following theorem is generalized to pth powers of x modulo a: for fixed m, the set A of integers a for which $x^2 \equiv m (\mathrm{mod}\ a)$ is solvable has density zero if and only if m is not a perfect square. Calculating the density of square-free numbers is generalized to the problem of k-free numbers.