

Ispitivanje haosa u kretanju Malkus-Lorencovog točka

U ovom radu ispitivano je prisustvo haosa u kretanju Malkus-Lorencovog točka. Malkus-Lorencov točak je primer mehaničkog sistema čije se kretanje može opisati jednačinama Edvarda Lorenca. Istraživanju je najpre pristupljeno putem kompjuterske simulacije, a zatim je korišćena aparatura slična onoj koju je Malkus predložio kako bi se eksperimentalno potvrdile pretpostvke. Pomoću konstruisane aparature su izvršena merenja ugaonih brzina za nekoliko uzoraka parametara dobijenih putem simulacije, nakon čega je pomoću indikatora haosa ispitano prisustvo haosa u kretanju točka. Kao kvalitativni indikatori haosa korišćeni su spektar snage, autokorelaciona funkcija i fazni dijagram. Dobijeni rezultati pokazuju postojanje haosa u kretanju točka pri određenom odabiru parametara sistema.

Uvod

Teorija haosa proučava nelinearne dinamičke sisteme. Osnovna osobina ovakvih sistema jeste velika osetljivost na početne uslove. Posledica Hajzenbergovog principa neodređenosti jeste da početne uslove nelinearnih dinamičkih sistema možemo odrediti do na konačnu tačnost, te ovakvi sistemi pri određenim uslovima ispoljavaju osobine determinističkog haosa. Haos podrazumeva da nije moguće predvideti ponašanje sistema i posledica je nelinearnosti, tj. činjenice da u ovakvim sistemima mala odstupanja rastu eksponencijalno tokom vremena. Determinizam potiče iz potpune određenosti zakona po kojima se sistem menja tokom vremena. Deterministički haos javlja se u kompleksnim sistemima poput meteoroloških i ekonomskih, ali i u sasvim jednostavnim, sa samo jednim stepenom slobode (Belić 1990; Gleick 2001; Gligorijević 2006).

Malkus-Lorencov točak predstavlja primer mehaničkog sistema čija se dinamika može opisati Lorencovim jednačinama (Lorenz 1963, 1993):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z\end{aligned}\tag{1}$$

pri čemu je stanje sistema određeno uređenom trojkom (x, y, z) , a σ, β i ρ su parametri sistema. Postoji više ekvivalentnih načina da se kretanje Malkus-Lorencovog točka predstavi Lorencovim sistemom (Matson 2007), kao i nekoliko dinamički ekvivalentnih konstrukcija ovog mehaničkog sistema. U radu je korišćen sistem sačinjen od diska koji može da rotira oko vertikalne ili blago iskošene ose, pri čemu su po obodu diska postavljene čaše iz kojih na dnu ističe voda, i pumpa iznad diska koja obezbeđuje stalan dotok vode u sistem (Malkus 1972).

Cilj rada je ispitivanje haosa u kretanju uprošćenog mehaničkog sistema konstruisanog na osnovu Malkus-Lorencovog točka. Upotrebom kompjuterske simulacije sistematski su birani parametri za koje sistem prelazi u haotičan režim kretanja, pri čemu je za klasifikovanje korišćen kvantitativni metod Ljapunovljevog eksponenta. Ispitano je kretanje sistema za različite setove parametara, dobijenih posredstvom simulacije. Primenom kvalitativnih indikatora haosa okarakterisani su dobijeni rezultati. Sistem ispoljava osnovne režime kretanja: nepromenljivo, periodično i haotično.

Metod

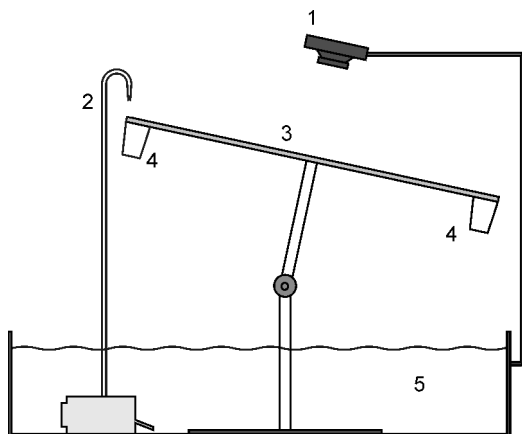
Konstrukcija aparature

Prikaz aparature sa osnovnim delovima dat je na slici 1. Na stabilan sto postavljen je stakleni akvarijum koji zadržava vodu unutar sistema. Unutar akvarijuma se nalazi Malkus-Lorencov točak – sistem

Teodora Đorđević (1994), Niš, Trg učitelja Tase 1/4, učenica 4. razreda Gimnazije „Svetozar Marković” u Nišu

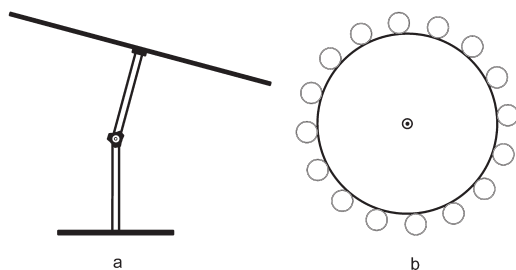
Mario Cekić (1993), Novi Sad, Miše Dimitrijevića 7a/18, učenik 4. razreda Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj” u Novom Sadu

MENTOR: Jelena Pajović, Institut za nuklearne nauke „Vinča” u Beogradu



Slika 1. Shematski prikaz aparature: 1 – kamera, 2 – pumpa, 3 – Malkus-Lorencov točak, 4 – čaše, 5 – akvarijum sa vodom

Figure 1. Experimental setup: Figure 1. Schematic view of the apparatus: 1 – camera, 2 – water pump, 3 – Malkus-Lorenz waterwheel, 4 – glasses, 5 – glass aquarium



Slika 2. Shematski prikaz Malkus-Lorencovog točka.

Figure 2. Schematic view of the Malkus-Lorenz waterwheel

sačinjen od diska koji može da rotira oko vertikalne ili blago iskošene ose, pri čemu su po obodu diska postavljene čaše iz kojih na dnu ističe voda. U akvarijum je uronjena vodena pumpa koja obezbeđuje stalan dotok vode u čaše. Iznad točka, u paralelnoj ravni, nalazi se digitalna kamera pomoću koje se određuje ugaona brzina kretanja točka (slika 1).

Prikaz Malkus-Lorencovog točka dat je na slici 2. Prečnik točka R iznosi 30 cm, masa točka M je 2 kg, prečnik obruča r je 36 mm, masa obruča m_0 jednaka je 8 g, a rastojanje centra obruča od centra točka iznosi $d = R + r = 336$ mm. Važno je napomenuti da su mase obruča, kao i mase praznih plastičnih čaša zanemarljive u odnosu na masu točka.

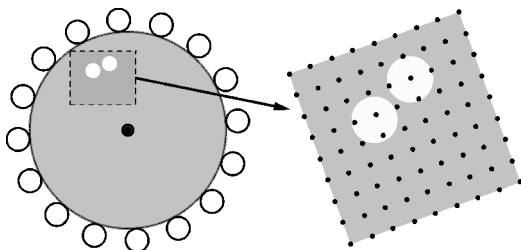
Ovako konstruisana aparatura omogućava variranje nekoliko parametara. Trenje na osovini regulisano je pomoću zavrtnja na centru diska (slika 2b). Osovina je prelomljena u tački u kojoj je moguće podešati nagib točka (slika 2a). Menjanjem promera otvora na dnu čaša moguće je kontrolisati isticanje vode iz čaša. Na kraju, podešavanjem vodene pumpe kontroliše se protok.

Merenje ugaone brzine točka

Pomoću kamere postavljene iznad aparature snimano je rotiranje diska. Obradom dobijenih snimaka dobijena je zavisnost ugaone brzine od vremena.

Postupak obrade snimaka počinje razlaganjem snimaka na odvojene kadrove. Zatim se vrši obrada pojedinačnih kadrova, koja se sastoji iz određivanja pozicije uočljivog kružnog markera zalepljenog na disk. Na osnovu niza ovako dobijenih pozicija određuje se pomeraj markera između dva kadra, na osnovu kojeg se direktno dobija trenutna ugaona brzina. Zbog ograničene rezolucije kamere, u slučaju kada su kadrovi vremenski bliski pomeraj je mali, pa su relativne greške, nastale obradom slike, velike. S druge strane, posmatranjem vremenski udaljenih kadrova smanjuje se glatkost rezultujuće krive. Neposrednom proverom, kao optimalna, odabrana je brzina τ od 6 kadrova u sekundi.

Pre početka obrade svakog snimka, najpre se uzorkuje prvi kadar. Smisao uzorkovanja je da otkloni uticaj promenljivog kontrasta usled spoljnog osvetljenja tokom različitih delova dana. Pored toga, na osnovu uzorkovanja određuje se prečnik markera. Pomoću njega se vrši procena regiona u kome se marker može naći u sledećem posmatranom trenutku. Neposredno je procenjeno da je za korišćenu aparaturu dovoljno posmatrati kvadratni region sa centrom u centru markera i stranicom jednakom 5 prečnika markera. Radi efikasnosti, svaki sledeći kadar se pretražuje tako što se region podeli na mrežu jedinice jednake poluprečniku markera (slika 3). U bar jednom temenu ovako postavljene mreže mora doći do poklapanja sa uzorkovanom bojom.



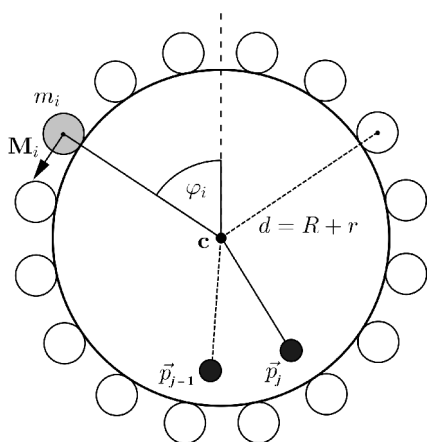
Slika 3. Prikaz kadra i ograničenog regiona za pretragu sa mrežom tačaka u kojima će se raditi pretraga

Figure 3. The view of a frame with limited searching region and grid of search points

U prvoj tački u kojoj se dogodi poklapanje primenjuje se Flood Fill algoritam, nakon čega se dobija nova pozicija markera. Isti postupak se ponavlja za svaki sledeći kadar, nakon čega se dobija niz pozicija $\vec{p}_0, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$. Ako je pozicija centra markera \vec{c} , tada je ugaona brzina u j -tom trenutku (slika 4) određena jednostavnom relacijom

$$\omega_j = \frac{1}{2\pi\tau} \sin^{-1} \left\| \frac{(\vec{p}_j - \vec{c}) \cdot (\vec{p}_{j-1} - \vec{c})}{\|\vec{p}_j - \vec{c}\| \cdot \|\vec{p}_{j-1} - \vec{c}\|} \right\|$$

Pri tumačenju rezultata, korišćena je takođe zavisanost prebrisanog ugla Ω od vremena, koja se dobija integraljenjem ugaone brzine.



Slika 4. Shematski prikaz markera na tačku u dva uzastopna trenutka; koordinate i -te čaše

Figure 4. Schematic view of disc and camera marker in two consecutive moments; coordinates of i -th glass

Kompjuterska simulacija

U svrhu sistematskog traženja parametara za koje sistem prelazi u haotičan režim kretanja, napravljena je kompjuterska simulacija. Za svaki set parametara posmatrana su dva Malkus-Lorencova točka veoma bliskih početnih uslova. Pomoću Ljapunovljevog eksponenta računata je divergencija putanja ova dva sistema u njihovom faznom prostoru. Na osnovu dobijene vrednosti, birani su setovi za koje sistem prelazi u haotičan režim kretanja.

Implementiran je model koji približno opisuje dinamiku korišćene aparature. Moment inercije diska I_0 , masa vode u i -toj čaši m_i u posmatranom trenutku, rastojanje d centra proizvoljne čaše od ose rotacije točka normalizovani su u skladu sa vrednostima korišćenim u aparaturi. Varirani su nagib diska θ , koeficijent trenja na osovinu μ , površina poprečnog preseka kružne rupe na dnu čaše S i maseni protok vode iz pumpe q .

Kretanje točka opisano je relacijom

$$M - \mu\omega = I\dot{\omega} \quad (2)$$

gde je M moment sprega sila koje deluju na disk u odnosu na centar, ω ugaona brzina točka, a I ukupan moment inercije sistema disk-čaše sa vodom. Neka je φ_i ugao kao na slici 4 u posmatranom trenutku. Tada je moment gravitacije čaše u odnosu na centar diska dat relacijom

$$M_i = d m_i \sin \varphi_i \sin \theta \quad (3)$$

Čaše su smatrane telima zanemarljivih dimenzija u odnosu na dimenzije diska, te je računat moment inercije I , na osnovu čega relacija (3) postaje:

$$d g \sin \theta \sum_{i=1}^{32} m_i \sin \varphi_i - \mu\omega = \left(I_0 + d \sum_{i=1}^{32} m_i^2 \right) \dot{\omega}$$

Korišćenjem poznatog Runge-Kutta metoda za numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina dobija se približno rešenje $\omega(t)$ za parametre (θ, S, q) .

Indikatori haosa

Indikatori haosa predstavljaju metode pomoću kojih se karakteriše haos. Dele se na kvantitativne i kvalitativne. U ovom radu korišćeni su kvalitativni indikatori haosa (Özer i Akin 2005; Bowaire 2006).

Fazni dijagrami

Stanje bilo kog dinamičkog sistema može se predstaviti uređenom n -torkom (x_1, x_2, \dots, x_n) , gde su

$x_1 \dots x_n$ veličine koje u potpunosti opisuju sistem. Svakom stanju sistema odgovara tačno jedna tačka u n -dimenzionalnom (hiper)prostoru, i obrnuto.

Skup tačaka svih mogućih stanja jednog sistema naziva se faznim prostorom tog sistema. Fazni prostor sistema prikazuje evoluciju sistema. Za ispitivanje faznog prostora koriste se fazni dijagrami sistema. Fazni dijagrami predstavljaju 2- ili 3-dimenzione dijagrame potprostora faznog prostora. Na faznim dijagramima koji opisuju haotično kretanje, putanje se grupišu, ali se, zbog determinizma, nikad ne seku. Iz sistema jednačina (1) se vidi da je fazni prostor Lorencovog sistema trodimenzioni. Za indicaciju haosa, u radu su korišćeni dvodimenzioni fazni dijagrami. Konstantan i periodičan režim kretanja se direktno mogu ustanoviti upotrebom faznih dijagrama (Gligorijević 2006).

Spektri snage

Spektar snage dobija se od kvadrata modula Furijevog razvoja. Korišćen je za kvalitativno razlikovanje periodičnog kretanja sa više frekvencija, tj. kvaziperiodičnog kretanja, od haotičnog kretanja. U spektru kvaziperiodičnog kretanja jasno su izraženi pikovi koji odgovaraju određenim frekvencijama, dok u spektru haotičnog kretanja ne postoje dominantni pikovi – ili uopšte nema pikova ili ima nekoliko pri čemu nisu jasno odvojeni. Treba imati u vidu razlike između teorijskih i eksperimentalnih spektara. U

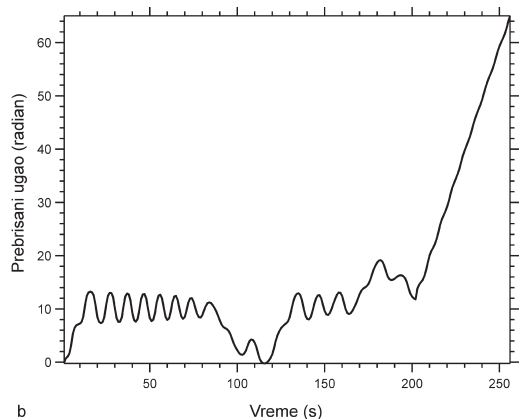
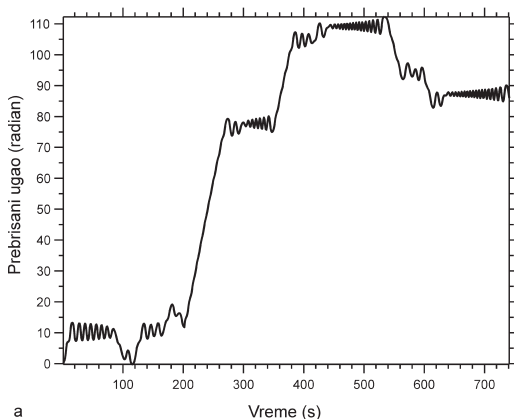
ovim drugim treba razlikovati šum od haosa. U eksperimentu se mogu javiti kvaziperiodična kretanja sa velikim brojem osnovnih frekvencija. Ovakva kretanja u prirodi uglavnom predstavljaju prelazan režim između kvaziperiodičnog i haotičnog režima (haos nastaje beskonačnim udvostručavanjem perioda) (Bowaire 2006; Belić 1990).

Autokorelaciona funkcija

Autokorelaciona funkcija prikazuje korelaciju nekog signala sa samim sobom u različitim vremenskim intervalima. Korelacija je visoka za regularna kretanja, dok za haotična, ne samoslična, kretanja eksponencijalno opada i teži nuli, što je korišćeno za kvalitativno tumačenje rezultata (Bowaire 2006).

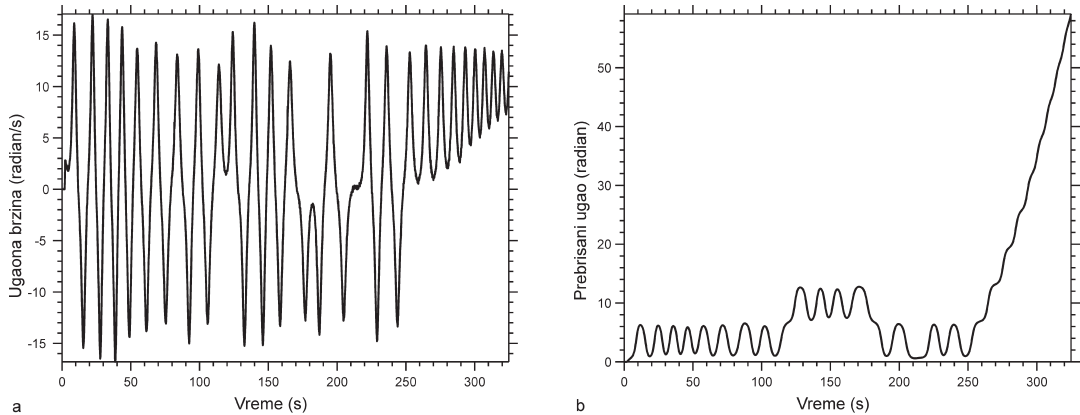
Rezultati

Cilj rada je ispitati prisustvo haosa u kretanju Malkus-Lorencovog točka korišćenjem uprošćene aparature. Radi sistematskog odabira setova parametara pri kojima Malkus-Lorencov točak prelazi u haotičan režim kretanja korišćena je kompjuterska simulacija, pri čemu je u simulaciji haos kvantitativno karakterisan Ljapunovljevim eksponentom. Odabrano je 9 setova parametara, za koje je podešena aparatura i neposredno ispitano kretanje sistema. Jedan od rezultata prikazan je ovde u radu. Na slici 5 data je zavisnost prebrisanog ugla od vremena dobijena putem



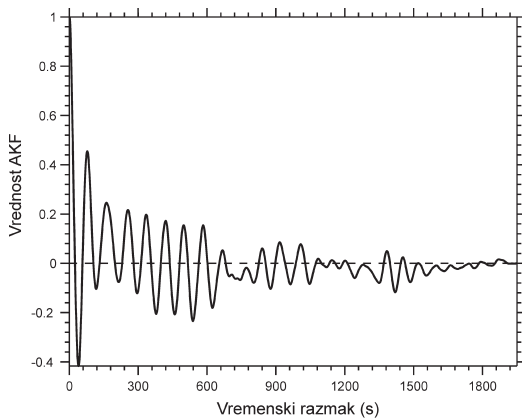
Slika 5. Grafik zavisnosti prebrisanog ugla Ω od vremena t za set parametara P : a) kompletno kretanje; b) prvi deo kretanja, uvećan

Figure 5. The offset angle Ω vs time dependence (parameter set P): a) complete movement; b) first part of movement, zoomed in



Slika 6. Kretanje diska za parametre procenjene simulacijom: a) ugaona brzina; b) prebrisani ugao

Figure 6. Movement of a disk for parameter set obtained using computer simulation: a) angular velocity vs time; b) offset vs time



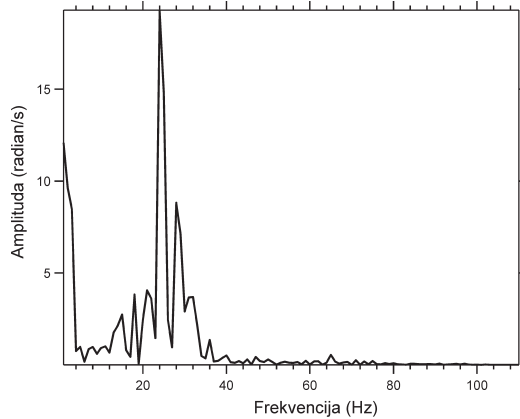
Slike 7. Autokorelaciona funkcija zavisnosti sa slike 6.

Figure 7. Autocorrelation function according to dependency given in figure 6

simulacije za set parametara $P = (\theta, S, q)$ (parametri su računati u obliku normalizovanih vrednosti).

Za set parametara P dobijenih simulacijom kretanje dobijeno odgovarajućim podešavanjem aparature dato je na slici 6.

Autokorelaciona funkcija u odnosu na zavisnost sa slike 6 data je na slici 7. Primećuje se da autokorelacija opada eksponencijalno, odnosno da kretanje sa slike 6 nije samoslično.

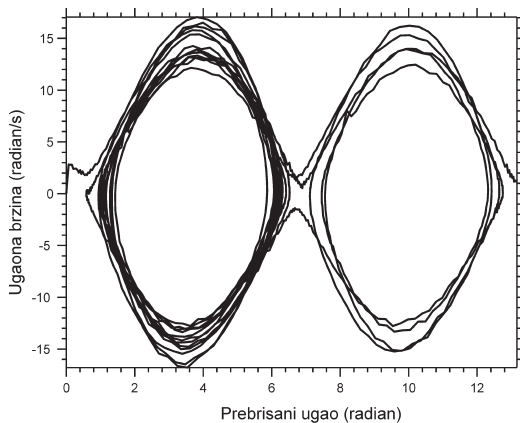


Slike 8. Spektar snage zavisnosti sa slike 6.

Figure 8. Power spectrum according to dependency given in figure 6

Na slici 8 dat je spektar snage zavisnosti sa slike 6. Primećuje se da ne postoji izražen, dominantan pik. Ima više pikova različitih amplituda, ali oni nisu jasno odvojeni. Posledica prethodnog jeste da posmatrano kretanje nije ni periodično, ni kvaziperiodično.

Na slici 9 je dat fazni dijagram sistema, odnosno zavisnost $\omega = \omega(\theta)$. Dijagram ne odgovara ni periodičnom, ni konstantom kretanju (Belić 2006), što ne znači nužno da je reč o haotičnom režimu. Ipak, kako se na ovom dijagramu nalaze dva od tri parametra



Slika 9. Fazni dijagram sistema.

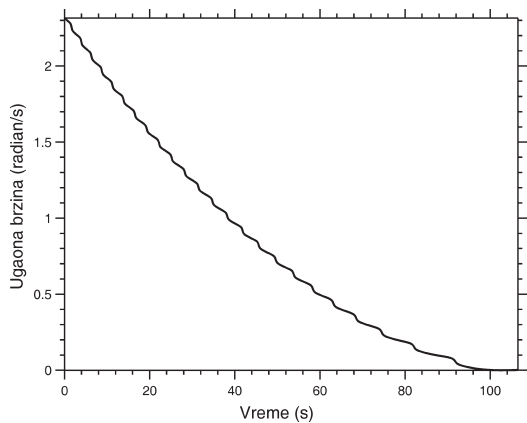
Figure 9. phase diagram of a system

koja u potpunosti opisuju stanje sistema, to dijagram na slici 9 predstavlja projekciju faznog prostora na ravan određenu fiksnim trećim parametrom. Na osnovu rezultata iz rada (Kolar 1992) ovaj fazni dijagram odgovara haotičnom režimu kretanja.

Diskusija

Dobijeni rezultati potvrđuju prelazak sistema u haotičan režim kretanja za određene parametre. Ipak, postoje odstupanja od kretanja predviđenog simulacijom. Naime, idealan Malkus-Lorensov točak zadovoljava nekoliko bitnih uslova. Prvo, količina vode koja ulazi u sistem treba da bude konstanta u vremenu, što znači da preliavanje vode iz čaša i razmake između čaša treba izbegavati. U slučaju korišćene aparature razmaci između čaša jesu zanemarljivi. Isto važi i za preliavanje, te možemo smatrati da je ovaj uslov zadovoljen. Drugo, potrebno je da usporenje zavisi isključivo od trenja na osovini, ali tako da ono bude direktno proporcionalno ugaonoj brzini, odnosno statičko trenje treba da bude zanemarljivo. Korišćenjem centralnog zavrtnja nije moguće u potpunosti obezbediti ovaj uslov. Na slici 10 data je zavisnost ugaone brzine točka od vremena kada je disk slobodan, bez prisustva vode.

Data zavisnost nije linearna, ali u dovoljnoj meri aproksimira linearnu zavisnost. Treće, brzina isticanja vode iz čaše treba da je proporcionalna masi



Slika 10. Zavisnost ugaone brzine slobodnog diska od vremena.

Figure 10. Angular velocity vs time of a free disk

vode u čaši. Otvori na dnu čaša nisu mašinski bušeni, te postoje nepravilnosti koje uzrokuju zanemarljive kontrakcije mlaza. Kako su nagibni uglovi pod kojima je točak otklonjen dovoljno mali, može se smatrati da voda ističe laminarno. Na osnovu prethodnog, primenom Toričelijeveog zakona, za maseni protok vode iz čaša važi:

$$q = \sqrt{2 \rho g S} \cdot \sqrt{m_v}$$

gde je ρ gustina vode, g gravitaciono ubrzanje, S poprečni presek otvora, a m_v masa vode u čaši. Kako je masa vode relativno mala, može se smatrati da je ova zavisnost približno linearna.

Dakle, aparatura u velikoj meri odgovara teorijskom modelu.

Zaključak

Cilj rada je bio da se ispita prisustvo haosa u kretanju Malkus-Lorensovog točka. Konstruisana je uprošćena aparatura po ugledu na onu prikazanu u originalnom radu. Radi sistematskog odabira setova parametara pri kojima Malkus-Lorensov točak prelazi u haotičan režim kretanja napravljena je kompjuterska simulacija, pri čemu je u simulaciji haos kvantitativno karakterisan Ljapunovljevim eksponentom. Na osnovu rezultata simulacije podešena je

aparatura i vršena su snimanja. Obradom snimaka dobijene su zavisnosti ugaone brzine od vremena. Na osnovu ovih zavisnosti i kvalitativnih indikatora haosa, autokorelacione funkcije, spektra snage i faznog dijagrama potvrđeno je da točak prelazi nakon određenog vremena u haotičan režim kretanja. Na samom kraju razmotrene su nesavršenosti aparature i njihov uticaj na rezultate. Aparatura dobro aproksimira idealan Malkus-Lorensov točak.

Zahvalnost. Ovim putem želimo da iskažemo veliku zahvalnost našem mentoru Jeleni Pajović na strpljivoj pomoći koju nam je ukazala tokom rada na projektu. Takođe, zahvalili bismo se Stevanu Radanoviću na korisnim sugestijama vezanim za primenu indikatora haosa. Na kraju, izuzetnu zahvalnost dugujemo Marku Kuzmanoviću na ustupljenoj inicijalnoj verziji kompjuterske simulacije, kao i ogromnoj pomoći u svim fazama projekta.

Liteatura

- Belić M. 1990. *Deterministički haos*. Beograd: Institut za fiziku, Sveske fizičkih nauka, III
- Bowaire A. N. 2006. Chaos in an Accelerated Rotating Horizontal Spring. U *First Step to Nobel Prize in Physics – Proceedings of the International Competition in Research Projects in Physics for High School (Lyceum) Students, 2004/2005* (ur. W. Gorzkowski *et al.*). Warszawa: Instytut Fizyki PAN, str. 11.
- Gleick J. 2001. *Haos*. Beograd: Narodna knjiga
- Gligorijević V. 2006. Simulacija haosa u RLD kolu. *Petničke sveske*, 61: 107.
- Illing L. F. Frodyce R. M. Saunders A., Ormond R. 2012. *Experiments with a Malkus-Lorentz Water Wheel: Chaos and Synchronization*. Portland (US): Reed College, Physics Department.
- Kolar M., Gumbs G. 1992. Theory of the Experimental Observation of Chaos in a Rotating Waterwheel. *Physics Review A*, **45**: 626.
- Lorenz E. N. 1963. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20** (2): 130.

Lorenz E. N. 1993. *The Essence of Chaos*. Seattle: University of Washington Press

Malkus W. V. R. 1972. Non-periodic convection at high and low Prandtl number. *Mem. Soc. R. Sci. Liege Collect.*, IV: 125.

Matson L. E. 2007. *The Malkus Lorenz water wheel revisited*. Eugene (Oregon, US): University of Oregon, Physics Department

Özer B. A., Akin E. 2005. Tools For Detecting Chaos. *SAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, **9** (1): 60.

Taghizadeh S. R. 2000. *Digital Signal Processing*. London: University of North London, School of Communications Technology and Mathematical Sciences

Teodora Đorđević and Mario Cekić

Theoretical and Experimental Observation of Chaos in the Malkus-Lorenz Water Wheel

In this paper, we have examined chaotic movement of Malkus-Lorenz waterwheel. Malkus-Lorenz waterwheel represents a simple example of a mechanic system that obeys the laws described by Edward Lorenz equations. We have developed computer simulation and then applied it to the apparatus constructed according Willem Malkus' model in order to show chaos in its movement. Using the constructed apparatus we have measured angular velocity of waterwheel over time for several sets of parameters obtained using the simulation. Qualitative chaos indicators (power spectrum, autocorrelation function and phase diagram) were used to examine chaotic characteristics in the movement of the waterwheel. Obtained results show the chaotic movement of the waterwheel for certain sets of parameters. ☺