

## Ispitivanje razvojnog procesa spacijalnih sposobnosti rešavanjem zadataka sa 2D i projekcijom 3D geometrijskih figura

---

*Istraživanje je za cilj imalo da ispita sposobnost razumevanja prostora u okviru razvojnog procesa dece. U istraživanju je učestvovalo 70 učenika osnovne škole u Kragujevcu, uzrasta 11 (četvrti razred) i 15 godina (osmi razred) i 15 odraslih ispitanika prosečnog uzrasta 25 godina (saradnici Istraživačke stanice Petnica). Uzorak je balansiran po polu. Kombinacijom tipova zadataka u odnosu na to da li su uključivali rad sa 3D ili 2D geometrijskim figurama i da li je bilo potrebno pronaći delove složene figure (analiza figure) ili sklopiti novu od ponuđenih figura (sinteza figura) dobijena su četiri testa koja su korišćena u ovom istraživanju. Utvrđeno je da postoji statistički značajna razlika u rešavanju zadataka na sva četiri testa u odnosu na uzrast ispitanika. Kako su sve razlike bile takve da su odrasli imali najveće skorove, potom osmaci, a najmanje četvrtaci možemo da zaključimo da su te razlike posledica razvojnog procesa i da postoji prostor za dalje razvijanje spacijalnih sposobnosti kod dece četvrtog i osmog razreda osnovne škole. Nije dobijena statistički značajna razlika u skorovima u odnosu na pol ispitanika. Učenici su imali najveći procenat grešaka na zadacima koji su uključivali trougao (odnosno pravouglu trostrana prizma), dok su najmanji procenat grašaka imali na zadacima koji su uključivali rad sa kvadratima i pravougaonicima (odnosno kocke i kvadri).*

---

### Uvod

Pojam spacijalna sposobnost dovodi se u vezu sa prostorom i definiše kao sposobnost njegovog razumevanja. Sposobnost razumevanja prostora podrazumeva mentalne mogućnosti osobe da razume, reorganizuje, transformiše ili vizuelno interpretira veze između različitih objekata (Tatre 1990). Potpuniju definiciju sposobnosti razumevanja prostora daje Karol (Carroll 1993, prema Bayrak 2007) koji navodi da ona obuhvata sposobnost da se zamisle, mentalno transformišu i reorganizuju različiti objekti i forme, a potom te misaone radnje reprodukuju u obliku crteža ili kakvih objašnjenja. Iako se ne slažu u potpunosti oko definicije spacijalnih

---

*Tijana Šušteršič  
(1993), Kneza Mihaila  
84, Kragujevac,  
učenica 3. razreda  
Prve kragujevačke  
gimnazije*

sposobnosti, psiholozi su jedinstveni u oceni da je u pitanju kompleksan konstrukt. U istraživanjima su ispitivane različite komponente ove složene sposobnosti, počev od procesa stvaranja mentalnih slika, pa do njihovog skladištenja i izvlačenja iz memorije.

U literaturi se često navode moguće veze između sposobnosti razumevanja prostora i matematike. Gaj i Mek Danijel (Guay i McDaniel 1977) su ispitivali vezu između postignuća na testovima matematike i sposobnosti razumevanja prostora kod dece u osnovnoj školi različitog uzrasta i pola. Rezultati ukazuju da postoji statistički značajna povezanost i to pozitivna, što znači da je velika verovatnoća da će osoba sa visokim znanjem iz matematike, posebno geometrije i algebre, imati i visok skor na testovima sposobnosti razumevanja prostora.

Jedan od važnih preduslova razumevanja pojmova iz geometrije svakako je i određeni nivo kognitivnog razvoja. Prema Pijaževoj teoriji kognitivnog razvoja dece postoje četiri faze razvoja mentalnih struktura koje su povezane sa uzrastom deteta. Intelektualni razvoj sastoji se od četiri razdoblja: senzomotorni stadijum (0 do 2 godine), preoperacionalni stadijum (2 do 7 godina), stadijum konkretnih operacija (7 do 11 godina), i stadijum formalnih operacija (12 do kraja života). Ovi stadijumi su veoma važni za razumevanje sposobnosti dece određenog uzrasta i načina na koji oni uče. S obzirom na to da se jedna grupa naših ispitanika nalazi na stadijumu konkretnih operacija, a druge dve na stadijumu formalnih operacija, reći ćemo nešto više o karakteristikama ova dva stadijuma. Kod deteta koje je na stadijumu konkretnih operacija pojavljuje se mogućnost logičkog razmišljanja i mogućnost konzervacije na poznatim i konkretnim sadržajima. Konzervacija je sposobnost razumevanja da menjanjem jednog svojstva objekta, ne menjamo sve njegove karakteristike (npr. količina tečnosti se ne menja prilikom njenog presipanja iz jedne čaše u drugu (čaše su različitih dimenzija) iako se menja nivo koji ona zauzima u čaši). Razdoblje formalnih operacija završno je razdoblje u Pijaževoj hijerarhiji razvojnih stadijuma. Početak ovog razdoblja obično se smešta između 12. i 13. godine, s početkom adolescencije. Mišljenje sve više ide od konkretno-stvarnog prema opsežnijem području hipotetsko-mogućeg, od pojedinog konkretnog sadržaja prema opštijem, apstraktnijim oblicima i strukturama bez konkretnog sadržaja. Jedan od glavnih obeležja razdoblja formalnih operacija je sposobnost hipotetičko-deduktivnog rasuđivanja (Pijaže i Inhelder 1978).

Razrađenu teoriju nivoa kroz koje učenik prolazi u procesu učenja matematičkih sadržaja dao je Van Hile, a koreni njegovog učenja su u Pijaževoj teoriji. Van Hile-ova teorija opisuje proces učenja geometrijskih pojmova kroz hijerarhijsku strukturu nivoa njihovog shvatanja (Gagatsis *et al.* 2006).

Na nultom nivou (vizuelni) fokus dečjeg razmišljanja je na individualnim karakteristikama geometrijskih oblika koje dete pokušava da imenuje. Dete na ovom nivou je u stanju da identifikuje geometrijski oblik, ali ne i da objasni zašto ga je baš tako označilo.

Na prvom nivou (deskriptivni) dete je u stanju da analizira geometrijsku figuru na osnovu njenih karakteristika i svrsta je u datu grupu geometrijskih figura. Međutim, dete na ovom nivou ne može da uvidi vezu između svojstava dve geometrijske figure.

Na drugom nivou (teorijski sa logičkim osnovama) ukazuje se na sposobnost primećivanja svojstva geometrijskih figura, ali i uviđanja veza između njihovih važnih karakteristika. Takođe, dolazi i do shvatanja odnosa između različitih vrsta geometrijskih oblika.

Na trećem nivou (formalno logički) dete je u stanju da od aksioma izvodi teoreme, dok su na četvrtom nivou deca u stanju da upoređuju aksiome sa razumevanjem (Van Hiele 1999).

Prema Van-Hilovoj teoriji nivoi su produkt iskustva i interakcije više nego uzrasta. To ukazuje da dete mora posedovati neko iskustvo i steći znanje o geometrijskim pojmovima da bi prešlo na sledeći nivo (Van Hiele 1999). Po njemu, na nivou preoperacionalnog mišljenja dete ima teškoće da konzervira izvesne odlike figure, zapostavlja druge, a zapaža se i njegova nemogućnost da bez deformacije stranica predstavi kontinuirane transformacije geometrijskih oblika (Pijaže i Inhelder 1978).

Upoznavanje dece sa geometrijom u okviru obrazovnog procesa počinje u okviru tzv. Euklidske geometrije koja obuhvata linije, trouglove, kvadrate i krugove. Njihova važna karakteristika je da dužine i uglovi ne smeju da se promene prilikom transformacije, dok je pomeranje i rotacija geometrijskih figura moguća (Copeland 1970, prema Bayrak 2007). Psihološka istraživanja razumevanja geometrijskih figura i sposobnosti razumevanja prostora su počela 1970-ih sa ciljem ispitivanja sposobnosti rešavanja matematičkih zadataka u prostoru (Owens i Outhred 2006). Prethodna istraživanja razumevanja geometrijskih figura kod dece bila su prvobitno usmerena na rešavanje zadataka sa dvodimenzionalnim figurama. Ovi zadaci uključivali su prepoznavanje figura (Gagatsis *et al.* 2006), pronalaženje istih unutar složenih crteža ili doctavanje izostavljenih delova započete geometrijske figure (Owens 2001). Nešto skorije Elija i Gagatsis (2003) su istraživali sposobnost dece da transformišu predstavljene poligonalne oblike. Rezultati su pokazali da su prilikom transformacije ili doctavanja izostavljenih delova, deca prvih razreda osnovnih škola, crtala deformisane figure koje po svojim karakteristikama nisu odgovarale prethodim (npr. prilikom povećanja dimenzija kvadrata, modifikovane stranice su bile nacrtane tako da nova figura više nije kvadrat). Kasnija istraživanja pokazala su povezanost između

shvatanja prostornih dimenzija i matematičkih sposobnosti vezanih za rešavanje zadataka sa 3D geometrijskim figurama. Ispitanici koji su imali ostvarene visoke skorove na testovima ispitivanja shvatanja prostornih dimenzija, imali su i visoke skorove na testovima rešavanja matematičkih zadataka, posebno sa geometrijskim figurama (Panaoura et al. 2007). Owens je u svom istraživanju (2006) ispitivala kako se deca snalaze u zadacima sa trodimenzionalnim figurama koje su predstavljene crtežima i došla do zaključka da su deca na uzrastu od 15 godina sposobna da uspešno rešavaju zadatke vezane za prepoznavanje trodimenzionalnih figura i njihovu transformaciju, ali i formiranje 3D figura od žice. Istraživanja su pokazala da deca sa malo iskustva u prepoznavanju 3D figura predstavljenih crtežima lako mogu da prevaziđu taj problem razgovarajući sa eksperimentatorom (Lean 1983). Iako u svom okruženju dete prvo opaža trodimenzionalne figure i igrajući se sa njima upoznaje njihove karakteristike, u osnovnom školskom obrazovanju prvo se na časovima upoznaje i rešava zadatke sa dvodimenzionalnim figurama. Takođe, prethodna istraživanja pokazala su da su se deca lakše snalazila u zadacima sa 2D geometrijskim figurama (Owens 1993). Zadatak ispitanika u ovom istraživanju bio je da, posmatrajući mreže dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih figura na papiru, odgovore na različita pitanja vezana za pogled na figuru sa različitih strana.

Autori koji se bave razvojem dečjeg mišljenja se slažu da se i pojmovi, kao i mišljenje, razvijaju po principima: od konkretnog ka apstraktnom i od pojavnog ka suštinskom (Zeljić 2005). Međutim, dete pojam formira i koristi pre nego što je u stanju da ga definiše (Zeljić 2005), jer veći deo svakodnevnog znanja dete stiče u direktnom kontaktu sa sredinom. Međutim matematički pojmovi daleko su složeniji za razumevanje od pojmova iz svakodnevnog života, a specifičnost njihovog učenja je u apstraktnosti i uopštenosti (Marjanović 2004). Još u vrtiću dete usvaja prve matematičke pojmove, i to kroz sledeće oblasti: opažanje i shvatanje prostora i prostornih relacija (u, na, izvan, gore, dole, levo, desno); usvajanje pojma skupa (uočavanje i razvijanje relacija jedan-mnogo, jednako-više-manje); razvijanje pojma broja; razvoj pojma geometrijskih oblika i struktura (krug, kocka, valjak, kvadar, trougao); opažanje, imenovanje i apstrahovanje prostornih dimenzija predmeta (duže-kraće, široko-usko, visoko-nisko, debelo-tanko, plitko-duboko) (Marjanović 2004).

Iako se geometrijske figure javljaju svakodnevno u detetovom okruženju, teškoća razumevanja nekih geometrijskih pojmova je veoma izražena, i ogleda se u sposobnosti deteta da verbalizuje sličnosti i razlike između figura (Zeljić 2005). Geometrijski pojmovi koji su obično predviđeni programom prva četiri razreda osnovne škole obrađuju se najpre na opažajnom nivou. Postepeno, pomoću njihovih ikoničnih predstava i kroz

verbalno izražavanje, oni postaju sve više apstraktni, približavajući se nivou apstraktnosti svojstvenom za matematičke pojmove.

Prethodna istraživanja (Owens 2005; 2006) su utvrdila sposobnost snalaženja dece od 15 godina sa trodimenzionalnim figurama. Međutim, u obrazovnom sistemu naše zemlje prvi susreti sa projekcijama 3D figura predviđeni znatno ranije – programom četvrtog razreda (11 godina). U prethodnim istraživanjima je, sa jedne strane, pokazano da su se učenici bolje snalazili u rešavanju zadataka sa dvodimenzionalnim figurama. Sa druge strane, ukazano je na činjenicu da se deca još u vrtiću upoznaju i igraju sa kockama i različitim 3D geometrijskim figurama, te pokazuju bolji učinak u osnovnoj školi u radu sa 3D geometrijskim figurama. Zato smo u ovom radu pokušali da utvrdimo razlike između uspešnosti rešavanja zadataka sa dvodimenzionalnim i trodimenzionalnim figurama, koji zapravo ukazuju na status razvijenosti spacijalnih sposobnosti.

Cilj ovog istraživanja obuhvatao je utvrđivanje da li su deca uzrasta mlađeg od 15 godina koji je ispitivan u istraživanju Owens (Owens 2005) sposobna da rešavaju zadatke koji zahtevaju mentalizaciju 3D geometrijskih figura. Pored toga, važno je bilo da se utvrdi da li su se deca bolje snalazila u zadacima vezanim za 3D figure u odnosu na 2D. Takođe, važno je bilo utvrditi razlike u skorovima ostvarenim na osnovu zadataka u odnosu na uzrast i pol ispitanika.

#### Hipoteze:

H1: Ispitanici starijeg uzrasta biće uspešniji u rešavanju zadataka sa 2D i projekcijama 3D figura. Ovakva pretpostavka zasniva se na tome da su se kod odraslih ljudi spacijalne sposobnosti već razvile, dok kod dece četvrtog i osmog razreda postoji još prostora za njihovo razvijanje. Takođe, prema istraživanju Osterih utvrđeno je da deca na uzrastu 7 do 10 godina imaju lošije postignuće u odnosu na starije na perceptivnim zadacima u kojima figure nisu jasno odvojene jedna od druge (Osterrieth 1944).

H2: Uspešnost na zadacima sa projekcijama 3D figura biće veća u odnosu na uspešnost na zadacima sa 2D figurama na svim uzrastima, a postojaće statistički značajne razlike u skorovima ostvarenim na zadacima sa projekcijama 3D figurama i 2D figurama. Ovakva pretpostavka zasniva se na istraživanju Ševeleva (Shevelev 2003) koji je ispitivao ulogu linija i uglova u prepoznavanju geometrijskih figura. Naime, ispitanici su imali veći skor ostvaren na osnovu prepoznavanja maskiranih trodimenzionalnih u odnosu na dvodimenzionalne figure.

H3: Pretpostavlja se da će postojati razlike u skorovima u odnosu na pol ispitanika na svim uzrastima. Postojaće razlika na oba tipa zadataka sa 2D figurama i projekcijama 3D figura, a dečaci će biti uspešniji od devojčica. Ovakva pretpostavka zasniva se na istraživanju Ben-Chaim (Ben-Chaim 1988) koji je utvrdio da su dečaci bili uspešniji od devojčica

u rešavanju zadataka shvatanja prostora. Takođe je utvrdio da se ove razlike sa uzrastom povećavaju, zbog čega očekujemo i interakciju faktora pol i uzrast.

## Metod

**Uzorak** je činilo 70 učenika (Osnovna škola „Moma Stanojlović“ iz Kragujevca), po 35 ispitanika uzrasta 11 godina (četvrti razred) i 15 godina (osmi razred), i 15 odraslih ispitanika prosečnog uzrasta 25 godina (saradnici Istraživačke stanice Petnica). Uzorak je balansirani po polu.

### **Varijable:**

Nezavisne varijable:

- uzrast
- pol
- tip zadataka koji su ispitanici rešavali:
  - sa 2D ili projekcijom 3D figura
  - pronalaženje figura unutar složene (analiza figure) ili korišćenje ponuđenih figura za sklapanje novih (sinteza figura)

Zavisne varijable: skorovi na svakom od četiri tipa zadatka (pronalaženje 2D i 3D geometrijskih figura koje odgovaraju delovima ponuđene složene figure i pronalaženje 2D i 3D figure koja bi nastala spajanjem ponuđenih figura).

### **Instrumenti i postupak:**

Dobijena su četiri testa kombinacijom tipova zadataka u odnosu na to da li su uključivali rad sa 3D ili 2D geometrijskim figurama i da li je bilo potrebno pronaći delove složene figure (analiza figure) ili sklopiti novu od ponuđenih figura (sinteza figura). Analiza-sinteza tip zadataka preuzet je iz istraživanja Owens (Owens 2003), a raden po ugledu na testove spacijalnih sposobnosti. Zadatak ispitanika u analizi složene figure bio je da posmatrajući nacrtanu složenu figuru, od ponuđenih izdvoje one koje ulaze u njen sastav. Zapravo, zadatak je obuhvatao prepoznavanje figura kao i predviđanje rezultata njihovog spajanja, što bi ukazivalo na shvatanje prostora. Svaka složena figura sastojala se od tri geometrijske figure, a kombinacijom sklapanja tri figure dobijene su složene koje su korišćene u ovom testu. Zadatak ispitanika koji je uključivao sintezu figura bio je da, mentalno spajajući dve predstavljene (nacrtane) geometrijske figure, izaberu od ponuđenih onu geometrijsku figuru, koja bi odgovarala sklopu.

Ispitanici su posebno rešavali zadatke sa dvodimenzionalnim i trodimenzionalnim figurama, te su na taj način dobijena četiri testa sa po jednim tipom zadatka:

- pronalaženje projekcija 3D delova složene figure (analiza složenih projekcija 3D figura)

- pronalaženje 2D delova složene figure (analiza složenih 2D figura)
- korišćenje ponuđenih projekcija 3D figura za sklapanje novih (sinteza projekcija 3D figura)
- korišćenje ponuđenih 2D figura za sklapanje novih (sinteza 2D figura)

Skorovi su određivani tako što je ispitanik za svaki tačno rešen zadatak dobijao 1 poen, a za netačno rešen 0 poena. Ispitivanje je sprovedeno individualno, a vreme za odgovaranje nije bilo ograničeno.

Svi ponuđeni odgovori u sva četiri testa dobijeni su pilot istraživanjem. U tom istraživanju je od dece istog uzrasta kao i u glavnom eksperimentu traženo da nacrtaju tri figure od kojih se sastojala ponuđena složena figura, pri čemu to moraju biti kombinacije trouglova, kvadrata i pravougaonika. Na osnovu toga napravljeni su ponuđeni odgovori prvog i drugog testa. Na isti način izabrane su figure koje su nastale sklapanjem datih u trećem i četvrtom testu.

Podaci su obrađeni u statističkom paketu SPSS.

## Rezultati

Analizom varijanse utvrđeno je da postoji statistički značajna razlika u rešavanju zadataka na sva četiri testa u odnosu na uzrast ispitanika (tabela 2). Osmaci su imali veći skor od četvrtaka na sva četiri testa, a manji od odraslih ljudi. Na osnovu ostvarenog skora grupe odraslih, utvrđeno je da su razlike u uspešnosti rešavanja testova rezultat razvojnog procesa. To znači da postoji prostor za dalje razvijanje specijalnih sposobnosti kod dece četvrtog i osmog razreda osnovne škole. Naknadnim Šefeovim testom utvrđeno je da na svakom pojedinačnom testu postoje statistički značajne razlike u odnosu na uzrast ispitanika.

Osmaci su imali veći skor na testu 1 koji je uključivao analizu projekcija 3D figura (0.52) u odnosu na četvrtake (0.32), a manji u odnosu na odrasle (0.98). Slični rezultati dobijeni su i na testu 2 (analiza 2D figura) gde su osmaci imali skor 0.49, što je više od skora koji su ostvarili četvrtaci (0.32), a manje od odraslih (0.99).

Sve razlike su statistički značajne sa nivoom značajnosti  $p < 0.01$ . Na slici 1 prikazane su razlike u skorovima na testovima koji su imali isti tip zadataka (analiza figura), a različit prostorni izgled figure (test 1 je bio sa projekcijama 3D figura, a test 2 sa 2D figurama).

Slični rezultati dobijeni su i na testovima sinteze projekcija 3D i 2D geometrijskih figura. Osmaci su imali veći skor i na testu 3 (sinteza 3D figura) (0.67) i na testu 4 (sinteza 2D figura) (0.72) u odnosu na četvrtake (0.45 na testu 3 i 0.6 na testu 4), a manji u odnosu na odrasle (0.99 na testu 3 i 1.00 na testu 4). Prikaz dat je na slici 2, a sve razlike su statistički značajne sa nivoom značajnosti  $p < 0.01$ .

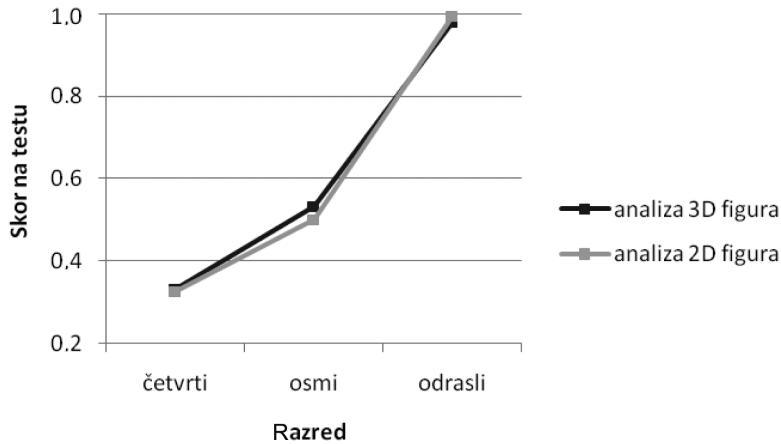
Tabela 1. Skor ostvaren na osnovu tačnih odgovora na sva četiri testa kod učenika četvrtog, osmog razreda i odraslih

Vrsta testa	Razred	Broj ispitanika	Srednja vrednost skorova	Standardna devijacija
Test 1 (analiza 3D figura)	četvrti	35	0.32	0.138
	osmi	36	0.52	0.169
	odrasli	15	0.98	0.04
Test 2 (analiza 2D figura)	četvrti	35	0.32	0.20
	osmi	36	0.49	0.20
	odrasli	15	0.99	0.025
Test 3 (sinteza 3D figura)	četvrti	35	0.45	0.23
	osmi	36	0.67	0.19
	odrasli	15	0.99	0.04
Test 4 (sinteza 2D figura)	četvrti	35	0.60	0.16
	osmi	36	0.72	0.17
	odrasli	15	1.00	0.00

Tabela 2. Razlike u skorovima na sva četiri testa između učenika četvrtog, osmog razreda i odraslih

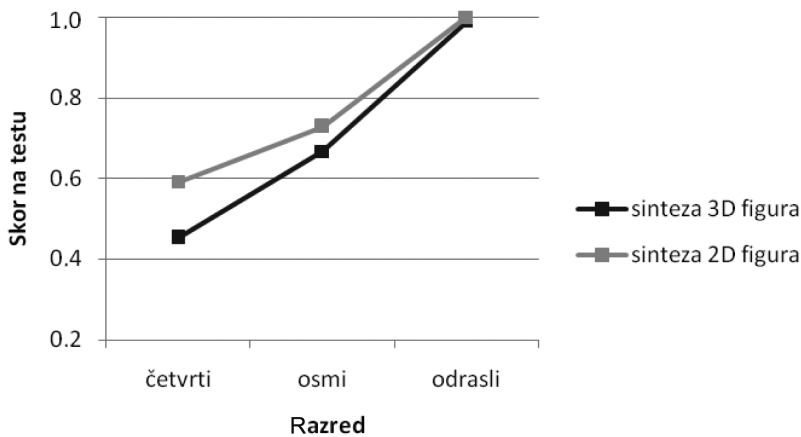
Skor	Razred		Razlika u srednjim vrednostima	Statistička značajnost
Skor na testu 1	četvrti	osmi	-0.20	0.00
		odrasli	-0.66	0.00
	osmi	četvrti	0.20	0.00
		odrasli	-0.45	0.00
Skor na testu 2	četvrti	osmi	-0.16	0.002
		odrasli	-0.66	0.00
	osmi	četvrti	0.16	0.002
		odrasli	-0.50	0.00
Skor na testu 3	četvrti	osmi	-0.22	0.00
		odrasli	-0.53	0.00
	osmi	četvrti	0.22	0.00
		odrasli	-0.32	0.00
Skor na testu 4	četvrti	osmi	-0.12	0.006
		odrasli	-0.40	0.00
	osmi	četvrti	0.12	0.006
		odrasli	-0.27	0.00





Slika 1.  
Prikaz razlike u skorovima na testovima 1 (analiza 3D figura) i 2 (analiza 2D figura) u odnosu na uzrast ispitanika

Figure 1.  
Differences in scores on tests 1 (dis-embedding 3D figures) and 2 (disembedding 2D figures) in relation to the age of the respondents

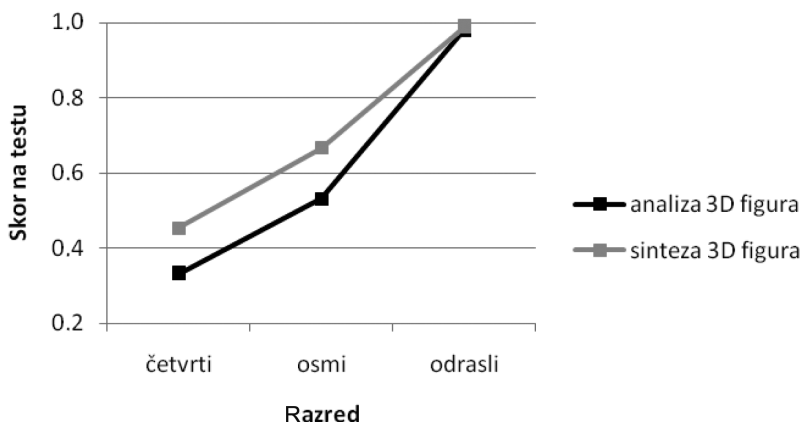


Slika 2.  
Prikaz razlike u skorovima na testovima 3 (sinteza 3D figura) i 4 (sinteza 2D figura) u odnosu na uzrast ispitanika

Figure 2.  
Differences in scores on tests 3 (embedding 3D figures) and 4 (embedding 2D figures) in relation to the age of the respondents

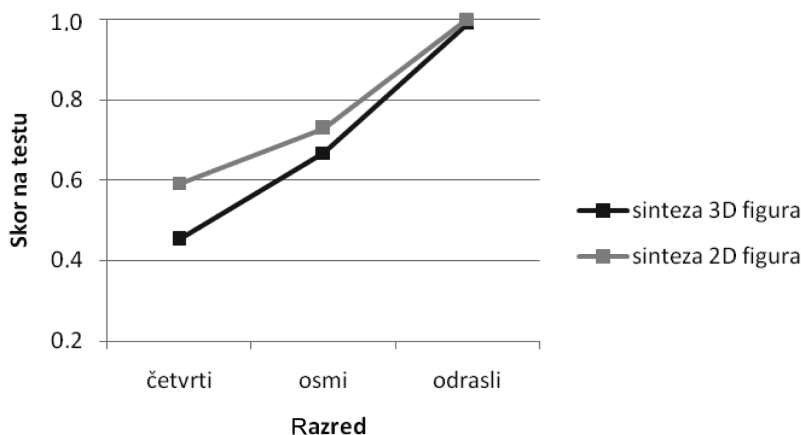
Na slici 3 prikazane su razlike u skorovima na testovima koji su sadržavali zadatke sa figurama istog prostornog izgleda (projekcije 3D figura), a različit tip zadatka (test 1 – analiza i test 3 – sinteza). Rezultati su pokazali da su odrasli imali veći skor na oba testa (0.98 na testu 1 i 0.99 na testu 3) u odnosu na osmake (0.52 na testu 1 i 0.67 na testu 3) i četvrtake (0.32 na testu 1 i 0.45 na testu 3). Sve pomenute razlike su značajne na nivou  $p < 0.01$ .

Dobijene su statistički značajne razlike u odnosu na uzrast ispitanika na testovima koji su imali zadatke sa figurama istog prostornog izgleda (ovoga puta 2D figure), a različit tip zadatka (test 2 – analiza i test 4 – sinteza) (slika 4). Četvrtaci su imali najmanji skor na oba testa (0.32 na testu 2 i 0.6 na testu 4), potom osmaci (0.49 na testu 2 i 0.72 na testu 4), a najveći skor su postigli odrasli (0.99 na testu 2 i 1.00 na testu 4). Sve razlike su značajne na nivou  $p < 0.01$ .



Slika 3.  
Prikaz razlike u skorovima na testovima 1 (analiza 3D figura) i 3 (sinteza 3D figura) u odnosu na uzrast ispitanika

Figure 3.  
Differences in scores on tests 1 (disembedding 3D figures) and 3 (embedding 3D figures) in relation to the age of the respondents

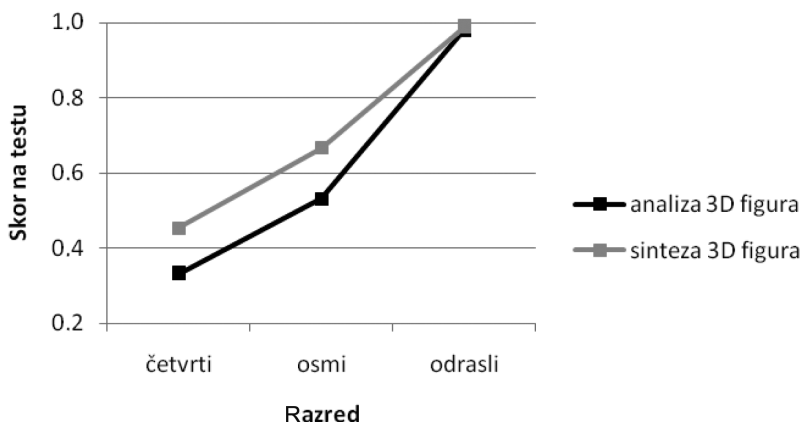


Slika 4.  
Prikaz razlike u skorovima na testovima 2 (analiza 2D figura) i 4 (sinteza 2D figura) u odnosu na uzrast ispitanika.

Figure 4.  
Differences in scores on tests 2 (disembedding 2D figures) and 4 (embedding 2D figures) in relation to the age of the respondents

Nije dobijena statistički značajna razlika u skorovima ni na jednom od četiri testa u odnosu na pol, iako u četvrtom testu (sinteza 2D figura) možemo govoriti o maginalnoj značajnosti interakcije (slika 5). Ovakav nalaz može se diskutovati, jer je utvrđena interakcija pola i uzrasta sa statistickom značajnošću od 0.059. Dvofaktorskom analizom varijanse utvrđeno je da kod dečaka postoji tendencija da uspješnije rešavaju zadatke sa povećanjem uzrasta do osmog razreda, dok je kod devojčica ona manje izražena i skoro da ne postoji. Nakon toga primećuje se da i kod dečaka i devojčica postoji razvoj spacijalnih sposobnosti na taj način da ponovo u odrasloj dobi nema statistički značajne razlike u odnosu na pol ispitanika.

Analizirajući prvi test (sklapanje trodimenzionalne složene figure od delova), dobijeno je da je učenicima četvrtog razreda najteža za rešavanje



Slika 5.  
Marginalna značajnost interakcije pola i uzrasta na četvrtom testu između četvrtaka i osmaka

Figure 5.  
The marginal significance of the interaction of gender and age on the fourth test between fourth and eighth grade pupils

bila figura koja se sastojala od kvadra i dve trostrane prizme (97% netačnih odgovora), a takođe teške figure su bile i ona koja je sastavljena od tri trostrane prizme (91% netačnih) i ona sastavljena od dve trostrane prizme i kocke (91% netačnih). Najlakši zadatak uključivao je figuru koje je bila sastavljena od dva kvadra i kocke (20% netačnih). Slično četvrtacima, figure sastavljene od tri trostrane prizme (89% netačnih) i dve trostrane prizme i kocke (92% netačnih) bile su najteže osmacima, dok su im najlakše bile one koje su sastavljene od tri kocke (11% netačnih) i dva kvadra i jedne kocke (14% netačnih).

U drugom testu (sklapanje dvodimenzionalne složene figure od delova) četvrtacima je izuzetno težak zadatak za rešavanje uključivao figuru koja se sastojala od dva pravougla trougla i pravougaonika (98% netačnih odgovora), dok im je najlakši zadatak predstavljao onaj gde su tražili delove figure sastavljene od tri kvadrata (26% netačnih). Osmacima je, takođe, najteži bio zadatak sa figurom sastavljenom od dva pravougla trougla i pravougaonika (97% netačnih), a najlakši sa figurom sastavljenom od tri kvadrata (14% netačnih). Interesantno da je figura sastavljena od dva kvadrata različitih dimenzija i jednog pravouglog trougla osmacima bila teža za rešavanje (74% netačnih) nego četvrtacima (22% netačnih).

U trećem testu (predviđanje trodimenzionalnog sklopa na osnovu delova) četvrtacima je najteže bilo da rešavaju zadatak sa sklapanjem dva kvadra različitih dimenzija (66% netačnih odgovora), dok je upravo taj zadatak bio najlakši za rešavanje osmacima (22% netačnih). Sličan rezultat dobijen je i u četvrtom testu (predviđanje dvodimenzionalnog sklopa na osnovu delova) gde je isti zadatak, samo u dve dimenzije bio najteži za rešavanje četvrtacima (63% netačnih), a najlakši osmacima (17% netačnih odgovora).

Utvrđeno je da kod odraslih ljudi na svim testovima skor bio maksimalan, izuzev na prvom testu u zadacima sa figurom koja se sastojala iz dve trostrane prizme i kocke (7% netačnih odgovora) i figurom sastavljenom iz dve kocke i kvadra (7% netačnih). Na drugom testu je, takođe, samo skor na figuri sastavljenoj od trougla i dve kocke različitih dimenzija (7% netačnih) bio manji od maksimalnog. Sličan rezultat je dobijen za treći test gde je skor za figuru sastavljenu iz dve kocke (7% netačnih) bio manji od maksimalnog, dok su na testu četiri imali maksimalan skor na svim zadacima.

## Diskusija

Utvrđeno je da postoji statistički značajna razlika u skorovima na sva četiri testa iz istraživanja u odnosu na uzrast ispitanika, što govori da su te razlike rezultat razvojnog procesa. Kako su sve razlike bile takve da su odrasli imali najveće skorove, potom osmaci, a najmanje četvrtaci bilo da se radilo o testovima koji su imali isti tip zadataka (npr. analiza figura), a različit prostorni izgled figure (projekcija 3D figura i 2D figure) ili obratno (različit tip zadataka, a isti prostorni izgled figura), možemo da zaključimo da su te razlike posledica razvojnog procesa. Ovakvi rezultati su u skladu sa ispitivanjem Osterih (1944) gde je pokazano da deca na uzrastu 7 do 10 godina imaju lošiji učinak na perceptivnim zadacima u kojima figure nisu jasno odvojene jedna od druge. Osterih je takođe zaključio da oni percipiraju kompleksniju geometrijsku figuru kao jedinstvenu celinu bez primećivanja detalja. Iako je Osterih jasno ukazala da deca na ovom uzrastu mogu da uoče ograničen broj geometrijskih figura u okviru složene, Vitkin (1950) je utvrdio da deca imaju poteškoće u rešavanju zadataka koji uključuju pronalaženje delova složene geometrijske figure. Oba istraživanja ukazuju na to da postoje statistički značajne razlike u pronalaženju jednostavnih geometrijskih figura unutar složene između dece uzrasta 7 godina i starijih, jer ne uspevaju da mentalno jasno odvoje jednu figuru od druge.

Pretpostavlja se da kada je figura „skrivena“ od strane drugih figura, tako da su jasno definisane samo konturne linije, teže za pronalaženje unutar složene, nego kada su figure unutar složene jasno odvojene linijama jedne od drugih. Sa povećanjem uzrasta, raste i tačnost odgovora na testu pronalaženja delova figure unutar složene, što je u skladu sa rezultatima ovog istraživanja.

Dvofaktorskom analizom varijanse nije dobijena statistički značajna razlika u skorovima ni na jednom od četiri testa u odnosu na pol, mada je utvrđena interakcija pola i uzrasta na četvrtom testu sa statističkom značajnošću od 0.059. Ovakava marginalna značajnost interakcije ukazuje na to da kod muškaraca postoji tendencija da uspešnije rešavaju zadatke sa

povećanjem uzrasta, dok kod devojaka je ona manje izražena i skoro da ne postoji. Rezultat da su stariji ispitanici muškog pola imali veći skor u rešavanju zadataka sa transformacijom 2D figura nego mlađi u istraživanju Ovens (1993) donekle može objasniti tendenciju muškaraca da sa povećanjem uzrasta uspešnije rešavaju zadatke, iako kod devojaka nisu dobijeni slični rezultati. Naime, one kao da ostaju na istom nivou i ne postoje statistički značajne razlike u skorovima kod devojaka do osmog razreda. Međutim, primećuje se poboljšanje spacijalnih sposobnosti i kod dečaka i devojčica u periodu posle osmog razreda, te u odraslom dobu ponovo nema statistički značajne razlike u odnosu na pol ispitanika. Ovakav nalaz je donekle neočekivan i u suprotnosti sa rezultatima istraživanja Ben-Kaima koji je utvrdio da se razlike u spacijalnim sposobnostima dečaka i devojčica sa uzrastom povećavaju (Ben-Chaim *et al.* 1988).

Rezultati su pokazali da su učenici imali najveći procenat grešaka na zadacima koji su uključivali trougao, odnosno pravouglu trostranu prizmu u radu, u mentalnoj transformaciji i sastavljanju delova tako da se dobije složena figura. Pokazano je da ukoliko je jedna od tri figure koje su činile delove složene figure pravougla trostrana prizma (prvi test), odnosno trougao (drugi test) procenat netačnih odgovora je bio viši nego kada su figure koje su činile delove složene figure bile kocke i kvadri odnosno kvadrati i pravougaonici. Ovakav nalaz u skladu je sa rezultatima dobijenim u istraživanju Elija i Gagatsis (2003) koji su utvrdili da je transformacija dimenzija figure ili docrtavanje izostavljenih delova figure bilo najteže ukoliko je trougao bio uključen u zadatak. U skladu sa tim su najlakše rešavani zadaci bili oni u kojima su figurisale kocke i kvadri (prvi test) odnosno kvadrati i pravougaonici (drugi test). Podatak da figura sastavljena od dva kvadrata različitih dimenzija i jednog pravouglog trougla (drugi test) koja je četvrtacima bila teža za rešavanje nego osmacima može se objasniti pretpostavkom da su osmaci imali iskustvo u radu sa tim figurama u četvrtom razredu, dok se sadašnji četvrtaci tek upoznaju sa njima.

Na trećem i četvrtom testu (sinteza figura) postoje razlike u odnosu na uzrast ispitanika u broju netačnih odgovora na zadatku u kojem su figurisala dva kvadra (odnosno pravougaonika) kao delovi složene figure. Nalaz da su četvrtaci imali veći udeo netačnih odgovora na ovom zadatku u odnosu na osmake takođe se može objasniti razvojnim procesom.

Obrazovni sistem u Srbiji prati ovaj razvoj spacijalnih sposobnosti kod dece i u skladu sa njim deca se u četvrtom razredu prvi put susreću sa projekcijama 3D figura. Potpunija i detaljnija analiza trodimenzionalnih figura obrađuje se kao tematska jedinica u osmom razredu, jer su osmaci na većem razvojnom nivou i imaju više znanja i iskustva u radu sa projekcijom 3D figura nego četvrtaci. Sličan nalaz je dobijen na četvrtom testu

gde su iste figure, ali u dve dimenzije (dva pravougaonika) bile teže za rešavanje četvrtacima nego osmacima. Takođe se ovaj nalaz može objasniti razvojnim procesom, koji je podržavan od strane obrazovnog sistema kao u prethodnom nalazu.

Procenat netačnih odgovora koji se javio kod odraslih ljudi može se tumačiti kao posledica različitih faktora (nepažnje, koncentracije...), jer nije utvrđena statistička značajnost razlika, već naprotiv, odrasli ljudi pokazuju stabilnost vezanu za specijalne sposobnosti.

## Zaključak

Istraživanje se bavilo pitanjem da li postoje razlike na testovima specijalnih sposobnosti rešavanjem zadataka sa 2D i projekcijama 3D figura u odnosu na uzrast ispitanika. Prethodna istraživanja (Panaoura *et al.* 2007; Owens 1993) ukazuju na to da su deca uspešnija u rešavanju zadataka sa dvodimenzionalnim figurama, jer se u svom osnovnoškolskom obrazovanju prvo susreću sa njima i obrađuju ih kao nastavnu jedinicu. Druga pak (Yakimanskaya 1991) ukazuju da deca koja se još u vrtiću susreću sa različitim trodimenzionalnim figurama, u kasnijem periodu lakše snalaze u zadacima sa njima.

Rezultati našeg istraživanja pokazali su da postoji statistički značajna razlika na testovima specijalnih sposobnosti u odnosu na uzrast ispitanika (četvrti i osmi razred, i odrasli). Na osnovu skora odraslih na testovima može se zaključiti da su razlike u postignutim rezultatima osmaka i četvrtaka rezultat razvojnog procesa, kao i da osmaci imaju još mogućnosti za razvoj specijalnih sposobnosti.

Nije dobijena statistički značajna razlika u odnosu na pol ispitanika, iako je bila očekivana interakcija pola i uzrasta na osnovu prethodnog istraživanja Ben-Kaima i saradnika (1988). Interesantan je rezultat da na testu koji je uključivao sintezu 2D figura postoji marginalna značajnost interakcije, što može biti predmet daljih istraživanja koja bi uključila veći broj ispitanika.

Najmanji skorovi četvrtaka i osmaka bili su na zadacima sa figurama koje su uključivale trougao (odnosno trostranu prizmu), dok su im zadaci sa kvadratima i prougaonicima (odnosno kockom i kvadrom) bili najlakši. Ovakvi nalazi su u skladu sa prethodnim istraživanjima, i ukazuju na to da je potrebno više iskustva i rada sa trouglovima (trostranim piramidama) da bi se razumele karakteristike ove geometrijske figure (Elia 2003). Upravo rezultat da odrasli nisu imali problema u rešavanju zadataka koji su ih uključivali potvrđuju prethodnu pretpostavku.

U cilju potpunijeg razumevanja razlika koje se javljaju u odnosu na uzrast ispitanika, potrebno je napraviti intervjue sa decom ispitivanih uzrasta i kvalitativnom analizom utvrditi koji se procesi i nivoi specijalnih

sposobnosti javljaju na tim uzrastima. Na taj način bi se moglo objasniti kako deca razumeju zadatke sa geometrijskim figurama i da li umeju to da verbalizuju. Takođe, predlog za dalja istraživanja može biti ispitivanje da li se deca različitog uzrasta lakše snalaze u zadacima koja će uključivati rad sa geometrijskim figurama na papiru, ili modelima istih figura. Tako bi se utvrdile razlike na uzrasnom nivou i izvršila potpunija analiza razvoj spacijalnih sposobnosti kod dece.

---

## Literatura

- Bayrak M. E. 2007. Investigation of effect of visual treatment on elementary school student's spatial ability and attitude toward spatial ability problems. Unpublished master's thesis, Middle East Technical University, Ankara, Turkey.
- Ben-Chaim D., Lappan G., Houang R. 1988. The effect of instruction on spatial visualization skills by middle school boys and girls. *American Educational Research Journal*, **25**: 51
- Clements D. H., Battista M. T. 1992. Geometry and spatial reasoning. U *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (ur. D. A. Grouws). New York: Macmillan, str. 420-464.
- Elia I., Gagatsis A. 2003. Young children's understanding of geometric shapes: The role of geometric models. *European Early Childhood Education Research Journal*, **11**: 43.
- Gagatsis A., Sriraman B., Elia I., Modestou M. 2006. Exploring young children's geometrical strategies. *University of Montana, Department of Mathematical Science*, **11**: 23-50.
- Guay R. B., McDaniel E. D. 1977. The Relationship Between Mathematics Achievement and Spatial Abilities Among Elementary School Children. *Journal for Research in Mathematics Education*, **8**: 211.
- Lean G. 1983. The conquest of space: A review of the research literatures pertaining to the development of spatial abilities underlying an understanding of 3-D geometry. Unpublished paper presented at the Fifth International Congress on Mathematical Education, Adelaide
- Marjanović M. 2004. *Metrička, euklidska, projektivna i topološka svojstva*. Beograd: Republički seminar o nastavi matematike i računarstva, 3: 1-29
- McGee M. G. 1979. Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic, Hormonal and Neurological Influences. *American Psychological Association*, **86**: 889.
- Osterrieth P. A. 1944. Le test de copie d'une figure complexe. *Geneve: Arch. Psychol.*, **30**: 205.
- Owens K. 2001. Draft materials for Count Me Into Space, NSW Department of Education and Training Curriculum Support Materials. Charles Sturt University, Sidney, Australia
- Owens K. 2005. Imagery and property noticing: Young students perceptions of three-dimensional shapes. *Melbourne: International Education Research Conference* (ur. L.D. English *et al.*). USA: Mathematical Education, str. 96

- Owens K. and Outhred L. 2006. The complexity of learning geometry and measurement. U *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (ur. A. Gutiérrez i P. Boero). Rotterdam: Sense Publishers, str. 83-115.
- Panaoura G., Gagatsis A., Lemonides C. 2007. Spatial abilities in relation to performance in geometry tasks. *University of Cyprus, Department of Education*, 5: 1062.
- Pijaže Ž., Inhelder B. 1978. *Intelektualni razvoj deteta*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva
- Pittalis M., Christou C. 2010. Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *University of Cyprus, Department of Education, Educ. Stud. Math.*, 75: 191.
- Shevelev I. A. 2003. The role of lines and corners of geometric figures in recognition Performance. *Acta Neurobiol. Exp.*, 63: 361.
- Tartre L. A. 1990. Spatial Orientation Skill and Mathematical Problem Solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21: 216.
- Van Hiele P. 1999. Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5: 310.
- Venger L. A. 1998. Predgovor knjizi *Psihički razvoj predškolskog deteta* (O. M. Đačenko i T. V. Lavrentjeva). Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva
- Yakimanskaya I. S. 1991. The development of spatial thinking in school-children. *Soviet Studies in Mathematics Education*, 3: 347.
- Witkin H. A. 1950. Individual differences in ease of perception of embedded figures. *J. Personal*, 19: 1.
- Zeljić M. 2005. Nivoi u procesu učenja matematičkih pojmova. *Beograd: Pedagogija*, 60: 544.

Tijana Šušteršič

## Examining Spatial Abilities Throughout Children Development by Solving Tasks with 2D and Projection of 3D Geometrical Figures

The concept of spatial ability is used for the abilities related to the use of space and the ability to understand space. Spatial ability is defined as the ability to imagine, perceive, manipulate, reorganize, and retrieve visual images of objects or forms and afterwards reproduce mental operations in a form of drawings or explanations. Although a child first perceives three-dimensional geometrical figures in its surrounding and playing with them gets to know their characteristics, it first solves tasks with two-dimensional figures in primary school education. Previous research also showed that it was easier for children to do tasks with 2D geometrical figures (Owens 1993). So the aim of this research was to



examine if there are differences in scores on all tests in relation to age and sex of examinees. The study included 70 pupils (Primary school "Moma Stanojlović", Kragujevac), 35 examinees at the age of 11 years (fourth grade in primary school) and 35 examinees at the age of 15 years (eight grade in primary school) and in addition 15 adult examinees of average age 25 years (assistants in Petnica Science Center). The sample was balanced according to the gender of the respondents. Combining types of tasks in order if they included 3D or 2D geometrical figures and if it was necessary to find parts of a complex figure (disembedded figure task) or to make a complex figure from given parts (embedded figure task), four tests which were used in this study are made. Analysis of variance showed that there is statistically significant difference in scores achieved on each test in relation to age of examinees. Since findings showed that 8th grade pupils had a higher score than 4th grade pupils in all tests, and less than adults, it can be concluded that those differences are a result of children's development. That means that there is still possibility and scope for developing spatial ability of primary school children. There was no statistically significant difference in scores in relation to sex, although it could be discussed about marginal significance of interaction, because it was found that statistical significance of interaction of sex and age was 0.059 (Figure 5). Two-factor analysis of variance showed that boys have a tendency to solve tasks more successfully with the age growing to 8th grade, while that tendency is less visible and almost does not exist in girls. After that, it could be seen that both boys' and girls' spatial ability develops so that there is again no statistically significant difference in relation to sex at adults. Results also showed that pupils had the biggest percentages of mistakes in tasks which included triangle (that is rectangular three-sided prism in 3D), while the lowest percentages of mistakes were present on those tasks which included square or rectangle (that is cube or rectangles in 3D). For further research and better understanding of the spatial ability development in relation to age, it could be useful to make interviews with examined children and using qualitative analysis, look into processes and levels of spatial abilities in those ages. Furthermore, that could be used in giving possible explanations of how children understand tasks with geometrical figures and if they know to verbalize the knowledge.

