

Proučavanje dinamike Boze-Ajnštajnovog kondenzata simulacijom pri promeni parametara sistema

Proučavana je dinamika Boze-Ajnštajnovog kondenzata numeričkim simuliranjem Gross-Pitaevskii jedinačine pri promeni parametara sistema. Cilj rada je bio ispitivanje uticaja nelinearnosti samog sistema na procese raspada i osnovnu frekvenciju kondenzata u slučaju nagle promene koeficijenta nelinearnosti. Pokazano je kako nelinearnost utiče na proces raspada kondenzata pri isključenju magnetne zamke. Takođe je pokazano da frekvencija osnovne oscilacije zavisi od trenutnih parametara sistema ali i od početnog stanja sistem iz kojeg je sistem izveden.

1. Teorijski uvod

Boze-Ajnštajnov kondenzat predstavlja stanje materije razređenog gasa slabo interagujućih bozona pod dejstvom spoljnog potencijala pri temperaturama bliskim apsolutnoj nuli ($T < 10^{-5}$ K). Pri ovakvim uslovima većina čestica zauzima najniže dozvoljeno energetska stanje što dovodi do toga da su kvantno-mehanički efekti vidljivi na makro nivou. Ovaj fenomen je predviđen teorijskim radovima Satejandre Bozea i Alberta Ajnštajna 20-ih godina XX veka, dok smo za eksperimentalnu potvrdu fenomena morali sačekati 1995. godinu izvedenu od strane Erika Kornela i Karla Vajmana. Kvantna mehanika pruža teorijski model opis ovog fenomena koj se može tretirati analitički ili numerički u raznim uslovima.

1.2. Uvod u kvantnu mehaniku

Kvantna mehanika je deo moderne fizike nastao početkom 20. veka koji matematički objašnjava

ponašanje materije i međusobni uticaj materije na skalama veličine atoma u sub-atomskih čestica. Jedan od najvažnijih pojmova kvantne mehanike je pojam talasne funkcije. Talasna funkcija u kvantnoj mehanici je veličina koja potpuno opisuje stanje ispitivanog sistema u većini slučajeva mikro sistema kao što su sub-atomske čestice i atomi. U opštem slučaju talasna funkcija je kompleksna funkcija definisana na celom prostoru u datom trenutku. Sama vrednost talasne funkcije nema fizički smisao ali kvadrat njene amplitude predstavlja gustinu verovatnoće nalaženja čestice u datoj tački prostora. Za razliku od klasične predstave, kvantne čestice su delokalizovane i imaju talasnu svojstva, tj. njihov položaj nije tačno definisan već se ponaša kao talas koj određuje verovatnoću nalaženja čestice u datoj tački prostora. Hamiltonijan je operator koj opisuje dinamiku sistema jer se njegovom primenom na talasnu funkciju dobija promena talasne funkcije u vremenu. Šredingerova jednačina je jednačina u kojoj figuriše talasna funkcija i koja opisuje ovo svojstvo:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\psi(\vec{r}, t) \quad (1)$$

gde $\psi(\vec{r}, t)$ predstavlja talasnu funkciju u trenutku t i tački prostora određenoj vektorom položaja \vec{r} . Ovo je linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda koja je u opštem slučaju rešiva analitički. Fizičkim veličinama u kvantnoj mehanici se dodeljuju operatori, kakav je i hamiltonijan koji predstavlja operator energije: $H = T + V$, gde je T kinetička, a V potencijalna energija. Zamenom kinetičke energije T operatorom impulsa dobija se

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \text{ i time jednačina (1) postaje:}$$

Ognjen Marković (1992), Beograd, Džona Kenedija 9a/17, učenik 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu.

MENTOR:

Vladimir Luković, Fizički Fakultet Univerziteta u Beogradu

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}, t) \quad (2)$$

Talasna funkcija Ψ ispunjava uslove neprekidnosti, konačnosti i definisanosti na celom prostoru. Za granične uslove je uobičajeno da se talasna funkcija normira uslovom: $\int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = 1$.

1.2. Uvod u kvantnu mehaniku velikog broja čestica

Kod sistema sa velikim brojem čestica u kvantnoj mehanici se primenjuju statističke metode radi opisa sistema sa velikim brojem čestica. Najveća razlika kvantne statističke fizike od klasične statističke fizike je to što u kvantnoj fizici više identičnih čestica su nerazličive jedna od druge. U klasičnoj fizici u sistemu od više tela, recimo u sistemu sastavljenom od dve kugle, mi označavanjem jedne i druge kugle u svakom trenutku znamo gde se nalazi koja kugla. U kvantnim sistemima pošto su čestice same po sebi delokalizovane po određenom prostoru nemoguće je razlikovati dve kugle jednu od druge. Umesto više odvojenih talasnih funkcija za svakog člana tog sistema mi imamo jednu zajedničku talasnu funkciju tj. ceo sistem se ponaša na jedinstven način pa ih tako ne možemo razdvajati.

1.3. Boze-Ajnštajnov kondenzat

Boze-Ajnštajnov kondenzat (BAK) kao kvantno-mehanički fenomen velikog broja čestica može se opisati modelima kvantne statističke fizike. Pre svega BAK je sastavljen od bozona, jedne od vrsta elementarnih čestica čija je karakteristika da im je spin celobrojan ($n \in N$) dok druga vrsta elementarnih čestica fermioni ima polu celobrojan spin (oblika $n + \frac{1}{2}$, $n \in N$). Foton je bozon, elektroni i kvarkovi su fermioni dok se neutron i proton ponašaju kao fermioni. Za fermione važi Paulijev princip koj kaže da dva identična fermiona ne mogu zauzimati u istom trenutku isto kvantno stanje što ne važi za bozone. Time za bozone ne postoji ograničenje da li mogu da zauzimaju isto kvantno stanje. Atomi sastavljeni od fermiona mogu se ponašati kao bozoni ako imaju paran broj fermiona u sebi (tako da je spin celobrojan) tako da su u prethodnom radu (Roberts *et al.* 2000) korišćeni atomi. Na konačnim temperaturama energiji čestice najviše doprinosi toplotna energija te čestice usled haotičnog kretanja, dok je pri nižim temperaturama udeo ove energije je manji. Usled

toga na apsolutnoj nuli sistem bozona se kondenzuje u stanje sa istom energijom. Da bismo zadržali čestice u određenoj oblasti prostora uvodi se potencijalno polje koje ima ulogu zamke, kako se nekad i naziva.

Za sistem neinteragujućih bozona pri uključenoj zamci, koja ima jedan maksimum u tački 0, stacionarno stanje bi izgledalo kao na slici 1A. Ako se u istoj zamci nađe sistem bozona sa privlačnom interakcijom stacionarno stanje će izgledati kao na slici 1B, za slabiju odbojnu interakciju talasna funkcija u prostoru ima oblik 1C, dok za jaču odbojnu interakciju ima oblik 1D.

U radovima (Gross 1961) i (Pitaevskii 1961) su preko mean-field teorije izvedena jednačina talasne funkcije BEK-a na apsolutnoj nuli na položaju sa radijus vektorom \vec{r} i u trenutku t . Ova jednačina je nazvana Gross-Pitaevskii jednačina (GP):

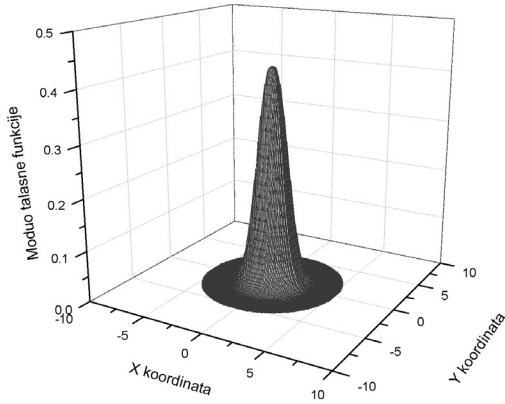
$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) + gN |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \right) \Psi(\vec{r}, t) \quad (3)$$

Vidimo da je osnovna razlika u odnosu na jednačinu (2) u tome što je ova jednačina nelinearna Šredingerova jednačina, jer je pored standardnih članova uključen i „nelinearni” član $gN |\Psi(\vec{r}, t)|^2$, gde N predstavlja broj čestica u kondenzatu dok parametar $g = \frac{4\pi^2 \hbar a}{m}$ predstavlja jačinu međučestične interakcije, gde je a parametar rasipne dužine. Pozitivno g označava odbojnu međučestičnu interakciju, dok negativno g označava privlačnu čestičnu interakciju.

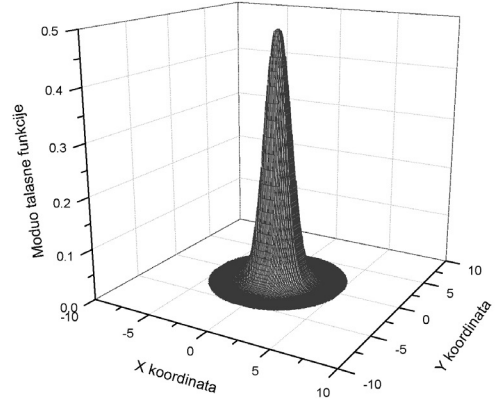
1.4. Definicija problema

U opštem slučaju GP jednačina nije rešiva analitički. To iziskuje rešavanje ili aproksimativnim ili numeričkim metodama. U ovom radu se primenjuje numerički pristup.

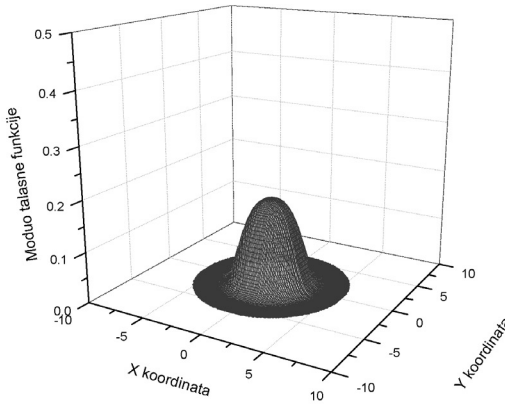
GP jednačinu je moguće dovesti na prihvatljiviji oblik radi korišćenja u numeričkoj simulaciji. U ovom radu bavićemo se sferno simetričnim problemom što značajno pojednostavljuje jednačinu (3). Moguće je uočiti sfernu simetriju gde se u opštem slučaju 3d jednačina realno svodi na jednačinu koja zavisi samo od jedne prostorne primenljive. Oblik potencijala koj se razmatra je harmonijski potencijal koj je u sferno simetričnom slučaju oblika:



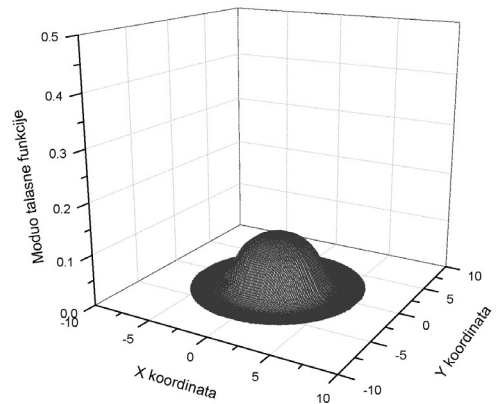
A



B



C



D

Slika 1. Modul talasne funkcije za nelineranosti $n = 0$ (A), $n = -3137$ (B), $n = 125$ (C) i $n = 627$ (D)

Figure 1. Amplitude of wave function for nonlinearities $n = 0$ (A), $n = -3.137$ (B), $n = 125$ (C) and $n = 627$ (D)

$V(\tilde{r}) = \frac{1}{2} m\omega^2 \tilde{r}^2$ gde je m masa čestice, ω frekvencija potencijalne jame i \tilde{r} radialna distanca. Zbog simetrije problema talasna funkcija zavisi samo od \tilde{r} i τ : $\psi(\tilde{r}, \tau)$ čime jednačina (3) postaje:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\tilde{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\tilde{r}) + gN |\psi(\tilde{r}, t)|^2 \right) \psi(\tilde{r}, t)$$

Transformacijama $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, $r = \frac{\tilde{r}}{l}$, i $t = \tau\omega$ što znači da se r računa u jedinicama l , dok se vreme računa u jedinicama $\frac{1}{\omega}$. Dobijamo jednačinu čijim

rešavanjem možemo dobiti $\psi(\tilde{r}, \tau)$, a time i sve osobine sistem:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi(r, t)}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2} r^2 + n \left| \frac{\varphi(r, t)}{r} \right|^2 \right) \varphi(r, t)$$

gde je $n = 4\pi Na/l$ i normalizacija računata funkcije $4\pi \int_0^\infty |\varphi(r, t)|^2 dr = 1$. Granični slučajevi za ovu funkciju su $\varphi(0, t) = 0$ i $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r, t) = 0$, što sledi iz uslova normiranosti talasne funkcije. U ovom radu smo proučavali dinamiku sistema pod određenim promenama koeficijenta nelinearnosti n ili pote-

ncijala u kome se kondenzat nalazi. U koeficijentu n figurišu broj čestica N i rasipna dužina a od koje zavisi među čestična interakcija. Pošto računamo da se broj čestica održava promena koeficijenta n zavisi samo od a , tj. od međučestične interakcije koja se podešava spoljnim magnetnim poljem. Pri naglom nastanku potencijalnog polja kondenzat se raspada, ali u zavisnosti od drugačije vrednosti parametra n , ovaj raspad se dešava drugačijom brzinom. Takođe je primećeno da se pri nagloj promeni nelinearnosti pojavljuje oscilatorno kretanje kondenzata (Roberts *et al.* 2000) i mi ćemo se takođe baviti proučavanjem ovog fenomena.

2. Numerička metoda

Numerička metoda korišćena za rešavanje svedene GP jednačine zasniva se na Crank-Nicholson metodu (Muruganadam i Adhikari 2009). Ako GP jednačinu napišemo kao:

$$i \frac{\partial \varphi(r, t)}{\partial t} = H \varphi(r, t)$$

razlaganjem operatora $H = H_1 + H_2$ gde je:

$$H_1 = \left(\frac{1}{2} r^2 + n \left| \frac{\varphi(r, t)}{r} \right|^2 \right) i$$

$$H_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

GP jednačina se svodi na:

$$\frac{\partial \varphi(r, t)}{\partial t} = H_1 \varphi(r, t) \text{ i}$$

$$\frac{\partial \varphi(r, t)}{\partial t} = H_2 \varphi(r, t)$$

Dalje ćemo dobijati $\varphi(r, t)$ diskretizacijom u vremenu sa korakom Δ u dva koraka. Prvo za talasnu funkciju u nekom trenutku t_0 , dobijamo rešenje za neki mali vremenski korak $t_{1/2} = t_0 + \Delta$ jednačinom:

$$\frac{\partial \varphi^{1/2}(r, t_0 + \Delta)}{\partial t} = H_1 \varphi(r, t_0).$$

Drugi korak je

$$\frac{\partial \varphi(r, t_0 + \Delta)}{\partial t} = H_2 \varphi^{1/2}(r, t_0 + \Delta).$$

Na sličan način ovu jednačinu rešavamo diskretizacijom u prostoru po poljima veličine Δr . Pomoću Crank-Nicholsonove šeme rešenje se dobija pomoću rešavanja sistema linearnih jednačina u zavisnosti od vrednosti talasne funkcije u prethodnom trenutku. Za ovu metodu su korišćeni granični uslovi koji su

opisani u delu 1.4. Ova metoda se može koristiti za dobijanje i stacionarnog rešenja talasne funkcije i za proučavanje dinamike sistema.

Međutim za dobijanje samo stacionarnog rešenja (tj. funkcije $\varphi(r, t \rightarrow \infty)$) metoda se znatno uprošćuje uvođenjem imaginarnog vremena, odnosno smenom $t = i\bar{t}$. GP jednačina se uprošćuje na oblik:

$$-\frac{\partial \varphi(r, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = H \varphi(r, \bar{t})$$

Vidimo da za stacionarna stanja sa energijama E_i za koje važi $\varphi_i(r, \bar{t}) = E_i \varphi_i(r, \bar{t})$ važi:

$$\frac{\partial \varphi_i(r, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = -E_i \varphi_i(r, \bar{t}),$$

to jest:

$$\varphi_i(r, \bar{t}) = e^{-E_i \bar{t}} \varphi_i(r, 0).$$

Time vidimo da za stanja sa višom energijom brže opadaju eksponencijalno nego ona sa nižom energijom. Pod pretpostavkom da je početno stanje linearna kombinacija stacionarnih stanja posle nekog vremena jedino stanje koje ostane je stanje sa minimalnom energijom tj. osnovno stanje. Ovim metodom se dobijaju stacionarna rešenja veoma brzo i efikasno uvođenjem nelinearnosti čak u jednom koraku za slabije nelinearnosti i u više za jače. Za proučavanje dinamike sistema se za početnu talasnu funkciju uzima već izračunata stacionarna talasna funkcija i onda se tokom iteracija po vremenu menjaju parametri sistema n ili $V(\vec{r})$.

Numerička simulacija je rađena u programskom jeziku C++ dok je obrada podataka vršena u programskom paketu MatLab. Računate fizičke veličine su bile sandardna devijacija i period oscilacija u slučaju da je oscilatorno ponašanje primećeno. Standardna devijacija tj. srednja širina raspodele predstavlja meru disperzije određene veličine i u našem slučaju ustvari predstavlja meru raširenosti kondenzata po prostoru. U opštem slučaju je:

$$\sigma = \int (x - \mu)^2 p(x) dx$$

gde je μ srednja vrednost veličine x dok je $p(x)$ gustina verovatnoće. Za naš primer ovo postaje:

$$\sigma_q = \int x^2 |\varphi(r, t)|^2 dx$$

jer je srednja vrednost nula pošto je kondenzat simetrično skoncentrisan oko tačke $x = 0$. Ako bi standardnu devijaciju posmatrane talasne funkcije označili sa X mi možemo označiti brzinu promene

raširenosti kondenzata sa \dot{X} gde je $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$. Standardna devijacija računata u simulaciji se dobija u jedinicama u kojima je dat prostor tj. u jedinicama $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, dok je brzina data u jedinicama $l\omega$.

3. Rezultati i diskusija

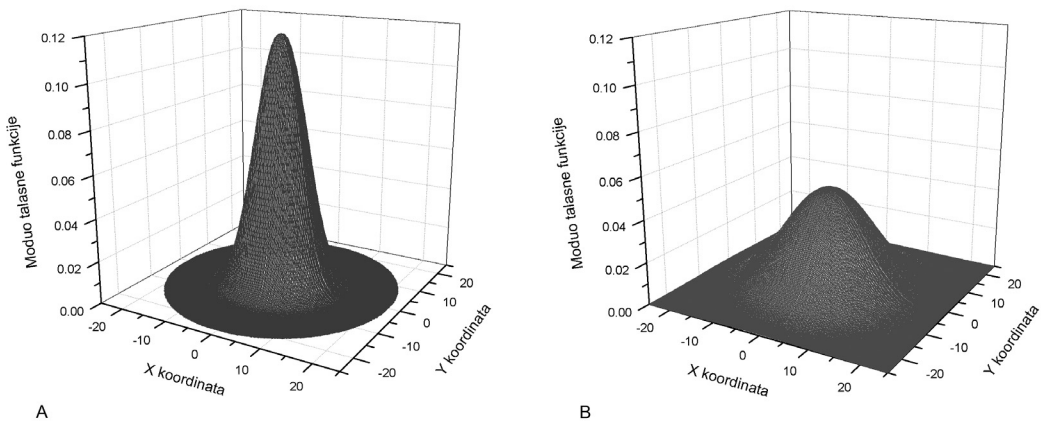
U ovom poglavlju su izneti rezultati numeričke simulacije za više slučajeva. Broj iteracija radi dobijanja stacionarnog stanja je varirao od $1 \cdot 10^5$ kod metode imaginarnog vremena, do $15 \cdot 10^6$ kod metode realnog vremena. Grafici na slici 1 dobijeni su metodom imaginarnog vremena za nelinearnosti $n_1 = 0$, $n_2 = -3.1371$, $n_3 = 125.484$. Talasne funkcije računane metodom imaginarnog vremena su izuzetno dobro konvergirale, pokazujući odstupanje manje od od rezultata datih u literaturi (Muruganadam i Adhikari 2009). Najveće odstupanje je primećeno kod najveće privlačne interakcije gde je kriva talasne funkcije najstrmija, pa je i greška pri simulaciji najveća. Vrednosti diskretizacije prostora Δr i vremena Δt su uzimane da budu oko 0.0001 za Δr i 0.01 do 0.0001 za Δt . Broj prostornih tačaka je uziman od 1000 pa do 8000, u zavisnosti od slučaja i prostorne proširenosti kondenzata. Primećena je nestabilnost numeričke simulacije za veoma jake privlačne interakcije što je i opravdano u neku ruku eksperimentalnim rezultatima gde se tada dešava eksplozija

kondenzata. Kad se određivalo stacionarno stanje metodom realnog vremena bilo je potrebno mnogo više iteracija da bi se dobio iole tačan rezultat i time je greška bila oko 0.1%. Stacionarne funkcije dobijene ovom metodom su korišćene u proučavanju dinamike sistema kao početni uslov.

3.1. Raspad kondenzata

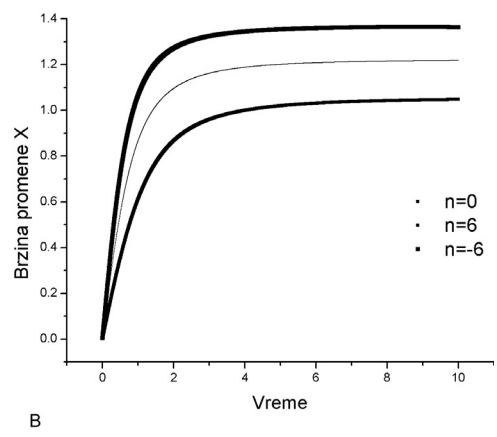
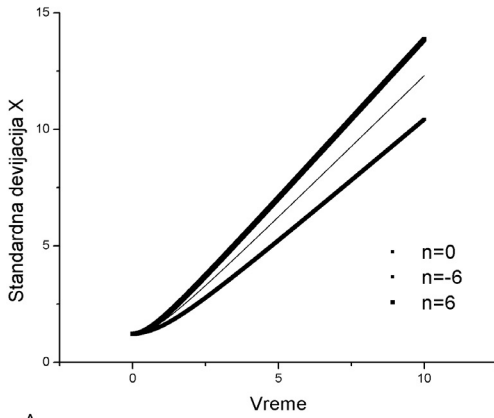
Raspad kondenzata je proučavan tako što se u jednom trenutku naglo isključuje potencijalna zamka i posmatra se promena talasne funkcije i njene standardne devijacije. Hamiltonijan primenjivan u ovom slučaju ima oblik $H_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + n \left| \frac{\varphi(r,t)}{r} \right|^2$, čijom se primenom na početnu talasnu funkciju $\varphi(r,0)$ dobija stanje sistema u nekom trenutku t . Primer ovakvog raspada u dva vremenska trenutka dat je na slici 2.

Na slici 2 je prikazan kondenzat sa koeficijentom nelinearnosti $n_3 = 3.1371$ posle isključenja potencijalne zamke u trenucima $t = 2$ i $t = 4$. Vidimo da se kondenzat raspada tako što se rasprostire po prostoru smanjujući svoju gustinu. Talasna funkcija teži da se proširi na neograničeni prostor kao kod slobodne čestice, ali je razlika između slobodne čestice i kondenzata baš u koeficijentu nelinearnosti n . Da bismo proučili uticaj koeficijenta nelinearnosti na raspad kondenzata bilo je potrebno dovesti kondenzat na isti početni uslov. To je urađeno tako što



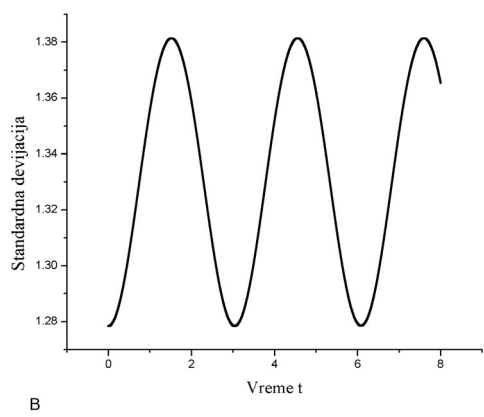
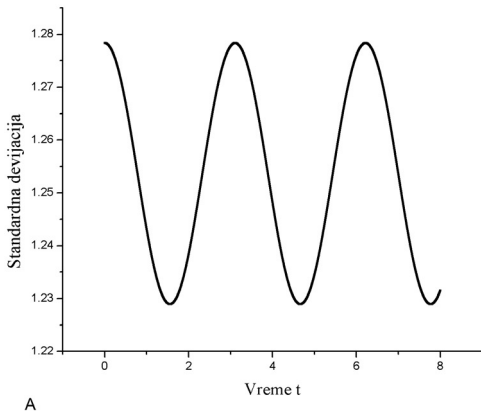
Slika 2. Raspadajući kondenzat u trenutku $t = 2$ (A) i trenutku $t = 4$ (B).

Figure 2. Dissolving condensate for moment $t = 2$ (A) and moment $t = 4$ (B)



Slika 3. Zavisnost standardne devijacije (A) i brzine promene standardne devijacije (B) od vremena kod raspada kondenzata

Figure 3. Dependence of standard deviation (A) and rate of change of standard deviation (B) with respect to time for dissolving condensate



Slika 4. Oscilatorno kretanje za $q = 0.5$ (A) i $q = 2$ (B)

Figure 4. Oscillatory movement for $q = 0.5$ (A) and $q = 2$ (B)

je uzeto $\varphi(r,0) = x \cdot \exp(-x^2/2) / \sqrt{\pi\sqrt{\pi}}$ za početnu talasnu funkciju. Ova početna funkcija je ustvari rešenje Šredingerove jednačine za osnovno stanje i kao takvo predstavlja početno stanje Boze-Ajnštajnovog kondenzata bez koeficijenta nelinearnosti. Na slici 3A je prikazan grafik zavisnosti standardne devijacije od vremena kod raspada tri kondenzata sa nelinearnostima $n = 0$, $n = 6$ i $n = -6$.

Na prvom grafiku vidimo da se za veoma malo vreme kondenzat brzo raspada i samo na početnom delu grafiku primećuje se razlika zbog različitih nelinearnosti. Posle nekog vremena zakrivljenje se smanjuje i brzina teži konstantnoj vrednosti. Ovo se bolje vidi na slici 3B gde se brzina stabilizuje na određenoj vrednosti i tada kondenzat se širi konstantnom brzinom. Do ovoga dolazi jer se širenjem kondenzata njegova gustina smanjuje pošto član

$n|\varphi(r,t)/r|^2$ označava jačinu trenutne interakcije, gde je $|\varphi(r,t)/r|^2$ gustina kondenzata.

3.2. Nagla promena interakcije

Nagla promena interakcije se dobija naglom promenom koeficijenta nelinearnosti n . Hamiltonijan ove promene je onda:

$$H_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2} r^2 + qn \left| \frac{\varphi(r,t)}{r} \right|^2$$

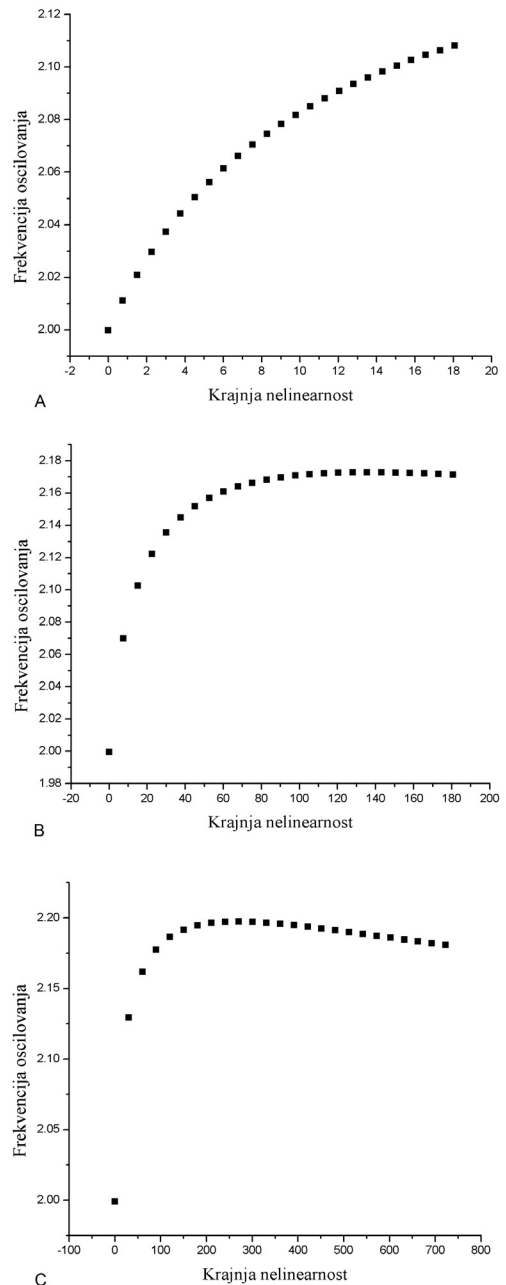
gde je q koeficijent promene interakcije. Očekivano ponašanje kondenzata je to da u tom slučaju on krene oscilatorno da se kreće, jer je nagla promena koeficijenta nelinearnosti ekvivalentna izvođenju kondenzata iz ravnotežnog položaja. Može se primeniti analogija sa harmonijskim oscilatorom ali je u ovom slučaju dinamika mnogo bogatija, jer je u pitanju nelinearni sistem. Na slici 4A je prikazan grafik promene srednje širine kondenzata usled nagle promene nelinearnosti za $q = 0.5$ i $n_0 = 3.1371$ dok je na slici 4B prikazan grafik za $q = 2$ i $n_0 = 3.1371$.

Primećujemo da pri nagloj promeni nelinearnosti sistem biva izveden iz ravnotežnog položaja i osciluje oko novog ravnotežnog položaja. Primećuje se da za $q < 1$ kondenzat osciluje oko skupljenijeg novog ravnotežnog položaja dok kod $q > 1$ osciluje oko raširenijeg novog ravnotežnog položaja. To je i logično, jer je za $q < 1$ nova interakcija biti slabija tj. manje privlačna dok je kod $q > 1$ obrnuto.

Dobijeni grafici predstavljaju sinusnu oscilaciju u granicama numeričke greške. Osnovni parametar ovog sistema predstavlja frekvencija njegove oscilacije koja je prikazana u jedinicama ω . Ovu frekvenciju možemo nazvati osnovna frekvencija sistema.

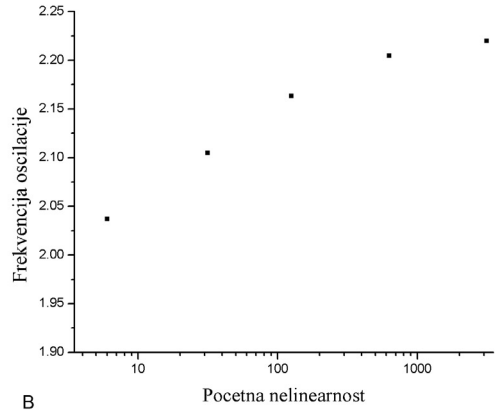
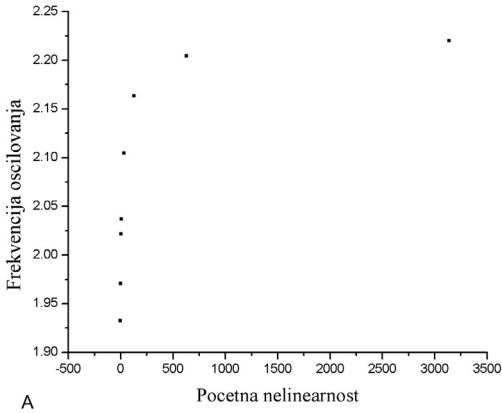
3.3. Zavisnost frekvencije oscilacija od promene n

Ključno pitanje koje se nameće jeste kako zavisi frekvencija predstavljena u 3.2. od nagle promene nelinearnosti. Za očekivati je da frekvencija te oscilacije u najopštijem slučaju zavisi od trenutnih parametra sistema (potencijala, međučestične interakcije, mase i broja čestica). Kao što ćemo pokazati frekvencija oscilacije će takođe zavisiti od početnog stanja iz koga je izveden kondenzat. U radu Adhikarija (2003) je dato da je ovakva oscilacija za slučaj $n = 0$ jednaka 2ω , gde je ω frekvencija date harmonijske zamke. U slučaju $n \neq 0$ ova frekvencija je drugačija. Na slikama 5 A-C je prikazana zavisnost frekvencije



Slika 5. Zavisnost frekvencije oscilovanja od krajnje nelinearnosti za $n = 3.131$ (A), 31.371 (B), 125.484 (C)

Figure 5. Frequency of oscillation in respect to nonlinearity at the end for $n = 3.131$ (A), 31.371 (B), 125.484 (C)



Slika 6. Zavisnost frekvencije oscilacija od početne nelinearnosti na linearnoj (A) i logaritamskoj skali (B)

Figure 6. Dependence of oscillating frequency in respect to nonlinearity at the beginning on linear (A) and logarithmic plot (B)

oscilovanja za novu nelinearnost za početne nelinearnosti $n_0 = 3.1371, 31.371$ i 125.483 , redom. Promene nelinearnosti su išle od $q = 0$ do $q = 6$.

Početna frekvencija na ovim graficima je tačno 2 što je u skladu sa teorijskim i eksperimentalnim rezultatima jer mi računamo vreme u jedinicama α pa je frekvencija u jedinicama $1/\alpha$.

Primećeno je da oblik ovih zavisnosti zavisi od početnog stanja, ali i od promene nelinearnosti. Recimo položaj maksimuma frekvencije zavisi od početne nelinearnosti tako da je za manje odbojne interakcije potrebno veće q da bi se postigao maksimum, dok je za odbojnije interakcije dovoljno manje q . Ovo se može objasniti time da je za privlačnije početne interakcije potrebna jača odbojna interakcija da bi se ta privlačna interakcija „raskinula”.

3.4. Zavisnost frekvencije od početnog stanja

U odeljku 3.3 je pokazano da frekvencija oscilacija zavisi od početne nelinearnosti. Ovde ćemo ostaviti fiksnu promenu nelinearnosti dok se početna stanja menjaju. Mi smo uzeli da je fiksna promena $q = 0.5$ pa je hamiltonijan ove promene:

$$H_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2} r^2 + qn_0 \left| \frac{\varphi(r,t)}{r} \right|^2.$$

Zavisnost novo nastalih oscilacija od nelinearnosti početnog stanja su data na slici 6.

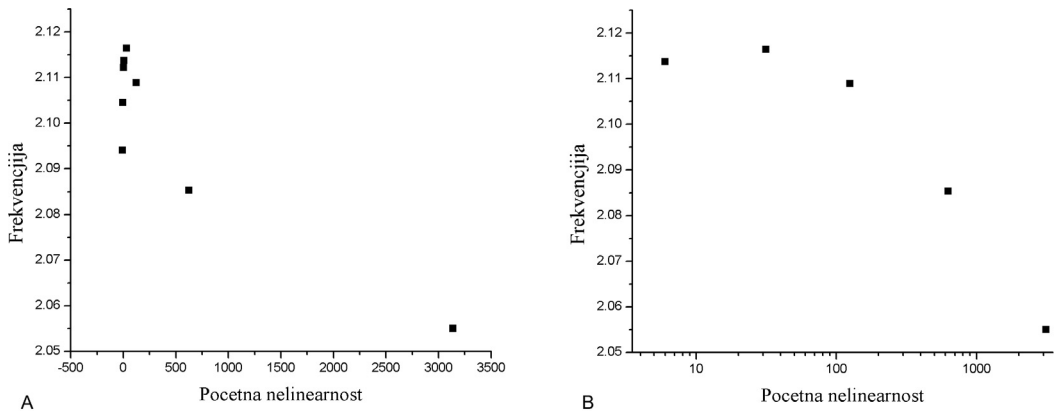
Vidimo da sa rastom početne nelinearnosti raste i frekvencija oscilacija ali da ona na početku veoma brzo raste pa onda usporava. Prikazivanjem grafika tako da je na x-osi logaritamska zavisnost nam daje pregledniji grafik ali nam ne govori mnogo više jer se opet dobija određeno zakrivljenje tako da ovaj grafik nije logaritamska funkcija.

Sada se postavlja ključno pitanje kako zavisi frekvencija oscilacije kada mi promenimo nelinearnost na neku fiksnu vrednost. Mi smo u našem slučaju uzeli da je ta novonastala nelinearnost $n = 20$ tako da je hamiltonijan ove promene:

$$H_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2} r^2 + 20 \left| \frac{\varphi(r,t)}{r} \right|^2$$

Grafik ovakve zavisnosti je prikazan na slici 7.

Isto kao u prethodnom primeru, grafik koji se dobije je skoncentrisan oko neke tačke pa on nije pogodan za diskusiju, tako da je logaritamski plot predstavljen na slici 7B. Vidimo da ovaj grafik ima maksimum u oblasti početnih nelinearnosti od 10 do 100 dok sa rastom nelinearnosti frekvencija opada. To se može objasniti time da u toj oblasti gde se promena nelinearnosti sa n_0 na $n = 20$ najmanja, najviše utiče novonastali kondenzat dok kod većih početnih nelinearnosti za ogromno smanjenje na utiče mnogo manje jer je sam kondenzat prostorno rašireniji pri većim nelinearnostima.



Slika 7. Zavisnost frekvencije oscilacija od početne nelinearnosti za nelinearnost $n = 20$ na linearnoj (A) i logaritamskoj skali (B)

Figure 7. Dependence of oscillating frequency in respect to starting nonlinearity for nonlinearities $n = 20$ on linear (A) and logarithmic plot (B)

5. Zaključak

U ovom radu je proučavano ponašanje Bose-Ajnštajnovog kondenzata pri raznim vrstama promena spoljnih uslova.

Numeričkom simulacijom su prvo dobijana stacionarna stanja pa su onda pri određenim promenama ta početna stanja razvijana.

Proučavano je kako raspad kondenzata kad se isključi potencijalna zamka zavisi od koeficijenta nelinearnosti koji označava međučestičnu interakciju. Uočena je da se kondenzat posle nekog vremena kreće konstantnom brzinom jer je uticaj međučestične interakcije mali ali da ta brzina zavisi od koeficijenta nelinearnosti.

Takođe su proučavane osnovne frekvencije koje se dobijaju kada se kondenzat u ravnotežnom stanju naglo izvede iz toga promenom nelinearnosti na neku novu vrednost. Provereno je da li je, kada nema nelinearnosti, frekvencija tačno ona koja je predviđena teorijom. Pri nekoj ne nultoj nelinearnosti pokazano je da frekvencija oscilacije zavisi ne samo od trenutnih parametara sistema već i od početnog stanja kondenzata što je detaljnije proučavano u delu 3.4.

Primećeno je nekoliko efekata koji nisu objašnjeni kao što je nestabilnost numeričke simulacije pri jakim privlačnim interakcijama.

Ovo istraživanje se može proširiti i u teorijskom smeru teorijskim izvođenjem frekvencije oscilacija i u smeru numeričkih simulacija gde bi se detaljnije proučila zavisnost osnovne frekvencije od koeficijenta nelinearnosti.

Zahvalnost. Zahvaljujem se mom mentoru Vladi Lukoviću na sveobuhvatnoj pomoći i idejama i sugestijama koji su značajnu proširili ovaj rad. Takođe se zahvaljujem mojim saradnicima u Petnici Branku Nikoliću, Marini Radulaški i vodi seminara Branimiru Ackoviću bez koga ovaj rad ne bi ugledao svetlost dana.

Literatura

- Adhikari S. K. 2003. Resonance in Bose-Einstein condensate oscillation from a periodic variation in scattering length. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **36**: 1109.
- Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii P. L., Stringari S. 1999. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, **71**: 463.
- Gross E. P. 1961. Structure of a quantized vortex in boson systems. II *Nuovo Cimento*, **20** (3): 454.

Muruganadam P., Adhikari S. K., 2009. Fortran programs for the time-dependent Gross-Pitaevskii equation in a fully anisotropic trap. *Computer Physics Communications*, **180**: 1888.

Pethick C. J., Smith H. 2002. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge: Cambridge University Press

Pitavetskii L. P. 1961. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, **13**: 451.

Roberts J. L., Claussen N. R., Cornish S. L., Donley E. A., Cornell E. A., Wieman C. E. 2000. Stable 85Rb Bose-Einstein Condensate with widely tunable interactions. *Phys. Rev. Lett.*, **85**: 1795.

Ognjen Marković

Dynamics of the Bose-Einstein Condensate in a Simulation with Changes in Parameters

The dynamics of the Bose-Einstein condensate were studied using a numerical simulation of the Gross-Pitaevskii equation with changes in condensate parameters. The aim of this study was to investigate the influence of nonlinearity of the system on the dissolution process and on the natural frequency of the condensate in the case of sudden changes of the coefficient of nonlinearity. It is shown how nonlinearity affects the process of dissolution of condensate after turning off the magnetic trap. It was found that the natural frequency depends on the current parameters of the system and the initial state of the system.

