*Sanela Numanović i Jovana Perović*

# Karakteristike spektra grafa

*U ovom radu predstavljene su neke karakteristike sopstvenih vrednosti prostih neorjentisanih grafova. Pokazano je kako pojedini koeficijenti karakterističnog polinoma i broj petlji, grana ili trouglova zavise jedni od drugog. Izračunat je broj n-touglova i setnji duzine k. Određen je interval kome hromatski broj grafa pripada i dokazano da je spektar bihromatskog grafa simetrican u odnosu na nulu. Izračunati su spektri ciklusa, kompletnih, p-partitnih grafova. Regularni grafovi povezani su sa Markovljevim lancima i na taj način je određena maksimalna sopstvena vrednost.*

## Uvod

Spektralna teorija grafova je grana matematike koja je povezana sa informatikom, hemijom, biologijom, fizikom, psihologijom i drugim oblastima. Ovu teoriju ćemo predstaviti kroz nekoliko klasa prostih neorjentisanih grafova. Svaki graf je moguće predstaviti matricom susedstva, čiji karakteristični polinom i sopstvene vrednosti možemo odrediti i obrnuto, na osnovu tih sopstvenih vrednosti moguće je odrediti broj petlji grafa, broj $n$-touglova, ivica, hromatski broj, bipartitnost itd. Jedan deo rada bavi se spektrom poznatih klasa grafova kao što su konture, kompletni, bipartitni, odnosno $p$-partitni grafovi. Na osnovu datog polinoma možemo dobiti klasu izomorfnih, ali i skup različitih grafova.

Navešćemo definicije i osnovne pojmove koje ćemo koristiti.

**Definicija**: Kvadratnu matricu $A$ zvaćemo simetričnom, ako je jednaka svojoj transponovanoj matrici.

**Definicija**: Minor $M_{ij}$ date kvadratne matrice je determinanta podmatrice koja se dobija kada iz matrice uklonimo $i$-tu vrstu i $j$-tu kolonu. Minor datog reda je determinanta podmatrice dimenzije $k$.

**Definicija**: Glavni minor $k$-tog reda matrice $A$ je determinanta podmatrice dimenzije $k$ koja sadrži $k$ elemenata glavne dijagonale.

Na ovaj način uklanjanje se vrši po glavnoj dijagonali. Glavne minore koristićemo pri dokazivanju i prezentaciji svojstava vezanih sa grane grafova.

*Sanela Numanović (1990), Žabare (Kruševac), učenica 4. razreda Gimnazije u Kruševcu*

*Jovana Perović (1992), Kraljevo, Čibukovačka 18, učenica 2. razreda Gimnazije u Kraljevu*

Dati graf $G$ sa $n$ čvorova možemo predstaviti matricom susedstva $A_{nn}$, pri čemu je $a_{ij}$ broj grana između $i$-tog i $j$-tog čvora. U radu ćemo se baviti samo neorjentisanim prostim grafovima, pa je broj grana između bilo koja dva čvora jednak ili nuli ili jedinici. Kada čvorove numerišemo proizvoljno, dobijamo nenegativnu simetričnu matricu koja na glavnoj dijagonali sadrži isključivo nule. Poznato je da simetrične matrice imaju realne sopstvene vrednosti (Oklapi i Numanović 2008), što znači da spektre grafova kojima ćemo se baviti u ovom radu kakrakterišu isključivo realne vrednosti.

**Definicija**: Spektar grafa $G$ je spektar matrice povezanosti $A$ sa svim njegovim višestrukostima.

$$\mathrm{specG} = \mathrm{specA} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$$

## Svojstva koeficijenata karakterističnog polinoma

Označimo sa $p_i$, $i = \overline{0, n}$ koeficijente karakterističnog polinoma matrice povezanosti.

$$\det(A - \lambda I) = P(\lambda) = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n$$

U ovom odeljku ćemo navesti karakteristike grafa i sopstvenih vrednosti koje oni određuju.

**Teorema 1**. Ako je $p_0$ koeficijent karakterističnog polinoma koji stoji uz $\lambda^n$, onda je $p_0 = (-1)^n$.

Dokaz: Karakteristična determinanata ima oblik:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & -\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{12} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinanta dimenzije $n$ definiše se kao zbir svih permutacija od $n$ elemenata gde ne postoje dva koja pripadaju istoj vrsti, odnosno koloni. Ukoliko je permutacija parna, ona je pozitivna, u suprotnom je negativna.

Član $\lambda^n$ može se dobiti jedino permutacijom svih elemenata glavne dijagonale. Postoji jedna takva permutacija i ona je parna, jer ne postoje dva elementa koja su u inverziji. Prema tome, koeficijent $p_0$ koji stoji uz $\lambda^n$ jednak je $(-1)^n$.

**Teorema 2**. Trag matrice $A$ koji označavamo sa tr$A$, tj. broj petlji u grafu jednak je $(-1)^{1-n} p_1$, gde je $p_1$ koeficijent koji stoji uz $\lambda^{n-1}$.

Dokaz: $\det(A - \lambda I) = P(\lambda) = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n$

Samo je permutacija elemenata glavne dijagonale karakterstične determinanate, tj. $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda)$ polinom sepena $n$, dok su sve ostale permutacije polinomi stepena manjeg od $n-1$. Na osnovu toga dobijamo:

$$p_1=(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})=(-1)^{n-1}\mathrm{tr}A$$

Pošto elementi na dijagonali predstavljaju povezanost čvorova sa samim sobom, trag je jednak broju petlji u grafu.

**Teorema 3**. Trag matrice jednak je sumi svih sopstvenih vrednosti matrice, odnosno $\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$.

Dokaz: Na osnovu prethodne teoreme i Vijetovih veza važi:

$$p_1=(-1)^{n-1}\mathrm{tr}A$$

$$p_1=-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)p_0$$

$$(-1)^{n-1}\mathrm{tr}A=-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)(-1)^n$$

$$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

Pošto u radu govorimo o prostim grafovima, onda je trag matrice povezanosti jednak nuli. Samim tim koeficijent $p_1$ i suma sopstvenih vrednosti su jednaki nuli.

**Teorema 4**. Ako je $p_2$ koeficijent koji stoji uz $\lambda^{n-2}$, onda je $(-1)^{2-n}p_2$ jednako zbiru glavnih minora drugog reda matrice susedstva, odnosno je jednako $(-1)^{3-n}p_2$ broju grana u grafu.

Dokaz: Pošto se bavimo karakteristikama koeficijenta $p_2$ koji stoji uz $\lambda^{n-2}$, posmatrajmo permutacije karakteristične determinante koje sadrže $n-2$ elementa glavne dijagonale. Ostala dva elementa tražimo u presecima preostalih vrsta i kolona. Očigledno je da su ta dva elementa, $a_{ij}$ i $a_{ji}$, simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu, pa iz simetričnosti matrice sledi da su jednaki. Jedinu inverziju u permutaciji čine elementi koje biramo van glavne dijagonale, pa je svaka od posmatranih permutacija neparna. Zaključujemo da uz $(-\lambda)^{n-2}$ stoji 0 kada je $a_{ij}=a_{ji}=0$, ili $-1$ kada je $a_{ij}=a_{ji}=1$. Glavni minori drugog reda posmatrane simetrične matrice takođe imaju ove vrednosti, pa je $(-1)^{2-n}p_2$ jednako njihovom zbiru. Ovi glavni minori matrice definišu podgrafove stepena dva, odnosno povezanost bilo koja dva različita čvora. Minor ima vrednost $-1$ kada su čvorovi povezani, odnosno 0 kada nisu. Iz toga sledi da je zbir minora jednak negativnoj vrednosti broja grana grafa, odnosno broj grana grafa jednak je $(-1)^{3-n}p_2$.

**Teorema 5**. Proizvod $(-1)^{3-n}p_3$ je jednak zbiru glavnih minora trećeg reda matrice susedstva, odnosno dvostrukom broju trouglova u grafu.

Dokaz: Zbir svih permutacija karakteristične determinante koje sadrže tačno $n-3$ elementa glavne dijagonale jednak je članu $p_3\lambda^{n-3}$ karakterističnog polinoma. Elementi glavne dijagonale nisu u inverziji, a tri elementa van nje imaju inverziju 2, pa su posmatrane permutacije parne. Nakon što izaberemo elemente sa glavne dijagonale, preostaje nam glavni minor trećeg reda. Slobodan član tog minora jednak je odgovarajućem glavnom minoru trećeg reda matrice susedstva, a koji predstavlja povezanost tri čvora grafa. Ako su posmatrani čvorovi povezani svaki sa svakim, onda formiraju trougao i vrednost minora je 2, a u suprotnom je 0. Tada je svaka permutacija jednaka 0 ili $2(-\lambda)^{n-3}$. Zbir svih glavnih minora trećeg reda matrice susedstva jednak je $(-1)^{3-n}\,p_3$, odnosno dvostrukom broju trouglova u grafu.

**Teorema 6**. Slobodan član $p_n$ karakterističnog polinoma jednak je determinanti matrice $A$.

Dokaz: Posmatrajmo permutacije determinante matrice $A-\lambda I$ koje ne sadrže elemente glavne dijagonale, zato što permutacije koje sadrže elemente glavne dijagonale daju stepene $\lambda$. Zbir svih takvih permutacija jednak je slobodnom članu $p_n$ karakterističnog polinoma.

Permutacije determinante matrice $A$ koje sadrže elemente glavne dijagonale jednake su nuli zato što su svi elementi glavne dijgonale nule. Sledi da je determinanta matrice $A$ jednaka zbiru permutacija koje ne sadrže elemente oblika $a_{ii}$ $(i=\overline{1,n})$.

Pošto se matrice $A$ i $A-\lambda I$ razlikuju samo po dijagonali, a dijagonala ne utiče na vrednosti $\det A$ i $p_n$, zaključujemo da je $\det A = p_n$.

Postoji veza izmeđ u koeficijenata karakterističnog polinoma i osobina grafa koji posmatramo. Slobodan član karakterističnog polinoma bilo kog grafa jednak je determinanti matrice susedstva. Koeficijenti $p_0$ i $p_1$ svakog prostog grafa jednaki su $(-1)^n$ i 0. Ako znamo koeficijente $p_2$ i $p_3$, znamo i broj grana, odnosno trouglova u grafu i obrnuto.

## Bojenje grafova

Čvorovi grafa boje se tako da svaka dva susedna čvora budu različitih boja. Najmanji broj različitih boja kojima je moguće obojiti graf naziva se hromatski. Hromatski broj grafa $G$ obelažavaćemo sa $\chi(G)$. Za $r$-regularni graf hromatski broj jednak je $r-1$, $p$-partitni $p$. Pitanje koje se postavlja je da li je moguće na osnovu spektra grafa odrediti njegov hromatski broj ili u kom se intervalu nalazi.

**Definicija**: Matrica $A$ je razloživa ako postoji permutaciona matrica $A$ takva da je:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} X & O \\ Y & Z \end{bmatrix}$$

gde su $X$ i $Z$ kvadratne matrice, a $O$ nula matrica. Ako nije razloživa, matrica se zove nerazloživa.

Spektralne osobine grafova u vezi su sa spektralnim osobinama nenegativnih nerazloživih matrica. Matrica povezanosti je nenegativna jer su svi njeni elementi nule i jedinice. Osobina nerazloživosti matrica odgovara osobini povezanosti neorjentisanih grafova. Za graf koji ima matricu susedstva oblika

$$A' = \begin{bmatrix} X & O \\ Y & Z \end{bmatrix}$$

očigledno je da iz čvorova koji određuju podmatricu $X$ ne vodi nijedna grana u čvorove koji određuju podmatricu $Z$, jer je matrica susedstva simetrična. Iz toga sledi da grafovi sa matricom $A'$ nisu povezani.

Komponente povezanosti $G_1, G_2. \ldots, G_S$ grafa $S$ možemo posmatrati kao posebne grafove, a $A_1, A_2. \ldots, A_S$ kao njihove matrice susedstva. Tada važi:

$$\begin{bmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_S \end{bmatrix}$$

gde je $A$ matrica povezanosti grafa $G$. Može se pokazati da za karakteristične polinome važi:

$P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda)\ldots P_{G_S}(\lambda)$

što dalje znači da se spektar grafa dobija unijom spektara njegovih komponenti povezanosti $G_1, G_2. \ldots, G_S$.

Navešćemo teoremu Frobeniusa o nenegativnim nerazloživim matricama.

**Teorema 7**. Svaka nenegativna, nerazloživa matrica $A$ ima pozitivnu karakterističnu vrednost $r$, koja je jednostruka nula karakterističnog polinoma. Moduli svih ostalih karakterističnih vrednosti nisu veći od $r$. Maksimalnoj karakterističnoj vrednosti $r$ odgovara sopstveni vektor sa pozitivnim koordinatama. Ako pri tome matrica $A$ ima $h$ sopstvenih vrednosti po modulu jednakih $r$, ti brojevi su međusobno različiti i zadovoljavaju jednačinu $\lambda^h - r^h = 0$. Spektar posmatran kao skup tačaka u kompleksnoj ravni prelazi sam u sebe pri rotaciji za ugao $2\pi/h$. Za $h > 1$ je moguće, permutacijom vrsta i istom permutacijom kolona, dovesti matricu $A$ na sledeći oblik:

$$A=\begin{bmatrix} O & A_{11} & \dots & O \\ O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A_{1,h-1} \\ A_{1h} & O & \dots & O \end{bmatrix}$$

gde se duž glavne dijagonale nalaze kvadratne nula-matrice.

Ovu teoremu nećemo dokazivati zbog složenosti postupka. Za dokaz videti, na primer, članak K. Y. Lina (Lin 1977).

**Definicija**: Matrica koja je simetrična, ima za članove isključivo nenegativne brojeve i nerazloživa je naziva se hermitska matrica.

Matrica susedstva neorjentisanih grafova je simetrična, što znači i hermitska, pa se spektar sastoji od realnih brojeva (za dokaz ove teoreme videti: Oklapi i Numanović 2008). Iz toga sledi, na osnovu Frobeniusove teoreme, da svaka sopstvena vrednost pripada intervalu $[-r, r]$.

**Teorema 8**. Neka je dat graf $G$ čiji je najveći stepen čvora $r$. Tada važi nejednakost:

$\lambda_{\max} \geq r$

Jednakost je zadovoljena akko je graf regularan.

Dokaz: Ako $i$-ti čvor ima stepen jednak $r$, onda je $i$-ta koordinata vektora $x$ jednaka 1, a u suprotnom 0. Vektor $x$ jeste sopstveni vektor, jer postoji $\lambda$ za koje je zadovoljena jednakost $Ax = \lambda x$ i to za $\lambda = r$. Dalje važi $\lambda \leq \lambda_{\max}$, odnosno $r \leq \lambda_{\max}$.

Neka je $\lambda$ maksimalna sopstvena vrednost regularnog grafa $G$ i neka je x $= [a_1, \dots, a_n]^T$ sopstveni vektor koji joj odgovara. Prema Frobeniusovoj teoremi važi da maksimalnoj sopstvenoj vrednosti odgovara vektor sa pozitivnim koordinatama, odnosno da je svako $a_i$, $i = \overline{1.\ n}$ veće od nule. Pošto je $G$ regularan graf, onda svaka vrsta matrice susedstva ima tačno $r$ jedinica, pa važi:

$$Ax = \lambda x$$
$$[a_1 r \ \dots \ a_n r]^T = [a_1\lambda \ \dots \ a_n\lambda]^T$$
$$r = \lambda$$

**Teorema 9**. Ako je $\chi(G)$ hromatski broj grafa $G$, onda važi nejednakost:

$$\chi(G) \leq \lambda_{\max}+1$$

Jednakost je zadovoljena kada je $G$ ragularan graf.

Dokaz: Neka je $\chi(G) = m$. Najveći stepen čvora u grafu je $m-1$, jer bi u suprotnom bilo $\chi(G) > m$. Na osnovu prethodne teoreme važi nejednakost $\lambda_{\max} \geq m-1$, a iz nje sledi:

$$\chi(G) \leq \lambda_{\max} + 1$$

Ako je $G$ regularan graf, onda, na osnovu prethodne teoreme, važi $\lambda_{\max} = m - 1$. Iz poslednje jednakosti sledi da je $\chi(G) = \lambda_{\max}+1$.

**Teorema 10**. Neka je $\chi(G)$ hromatski broj grafa $G$ čije su sopstvene vrednosti $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Tada važi:

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

Dokaz: Neka je $\chi(G) = m$. Prema Frobeniusovoj teoremi, maksimalna sopstvena vrednost je pozitivna, tj. $\lambda_{\max} > 0$. Na osnovu Teoreme 3 važi da je $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0$, pa je $\lambda_1 < 0$. Dalje važe nejednakosti:

$$\lambda_n + (m-1)\lambda_1 \leq \lambda_n + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{m-1} = 0$$

$$\lambda_n + \lambda_1 \chi(G) - \lambda_1 \leq 0$$

$$\lambda_1 \chi(G) \leq \lambda_1 - \lambda_n$$

Pošto je $\lambda_1 < 0$, iz poslednje nejednakosti dobijamo:

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

**Teorema 11**. Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti matrice $A$, onda su $\lambda_1^{\kappa}, \lambda_2^{\kappa}, \ldots \lambda_n^{k}$ sopstvene vrednosti matrice $A^k$.

Dokaz: Neka je $x$ sopstveni vektor. Po definiciji je $Ax = \lambda x$, gde je $\lambda$ sopstvena vrednost matrice $A$ za vektor $x$. Za matricu $A^k$ i vektor $x$ važi:

$$A^k x = A^{k-1}(Ax)$$

$$A^k x = A^{k-1}(\lambda x)$$

$$A^k x = A^{k-2}(A\lambda x)$$

$$A^k x = A^{k-2}(\lambda^2 x)$$

$$\ldots$$

$$A^k x = \lambda^k x$$

Sopstvena vrednost matrice $A^k$ za vektor $x$ je $\lambda^k$. Dakle, za isti vektor $x$ sopstvene vrednosti matrica $A$ i $A^k$ su redom $\lambda$ i $\lambda^k$.

**Teorema 12**. Povezan, konačan i neorjentisan graf, bez petlji i sa najmanje dva čvora je bihromatski ako i samo ako je njegov spektar, posmatran kao skup tačaka na brojnoj osi, simetričan u odnosu na tačku nula.

Dokaz: Matrica susedstva $A$ je nerazloživa, nenegativna i simetrična.

$\Leftarrow$

Ako je spektar simetričan u odnosu na nulu, po Frobeniusovoj teoremi, sledi da se matrica $A$ može svesti na:

$$A = \begin{bmatrix} O & B^T \\ B & O \end{bmatrix}.$$

Pošto se dati graf može podeliti na dva disjunktna podgrafa koji nemaju grane (na to ukazuju podmatrice $O$ raspoređene dijagonalno), graf je bipartitan, pa samim tim i bihromatski.

$\Rightarrow$

Ako je graf bihromatski, za matricu susedstva možemo uzeti matricu $A$. Tada važi:

$$A^2 = \begin{bmatrix} B^T B & O \\ O & BB^T \end{bmatrix}$$

Na osnovu oblika matrice $A^2$ zaključujemo da je spektar te matrice unija spektara matrica $BB^T$ i $B^T B$. Pošto je $(BB^T)^T = B^T B$ i, $(B^T B)^T = BB^T$, matrice $BB^T$ i $B^T B$ su simetrične. Uz to su i nenegativne i nerazložive, pa, na osnovu Frobeniusove teoreme, imaju proste i pozitivne maksimalne sopstvene vrednosti. Te vrednosti su jednake, pa matrica $A^2$ ima maksimalnu vrednost sa višestrukošću 2.

Na osnovu Teoreme 11 znamo da se spektar matrice $A^2$ sastoji iz kvadrata svih sopstvenih vrednosti matrice $A$. Matrica $A$ je hermitska, pa ima prostu i pozitivnu maksimalnu sopstvenu vrednost i realan spektar. Iz toga dalje sledi da u njenom spektru postoji sopstvena vrednost koja je po modulu jednaka maksimalnoj, odnosno $-r$. Ona je takođe prosta, jer je višestrukost maksimalne sopstvene vrednosti matrice $A^2$ jednaka 2.

Dakle, u spektru matrice $A$, koji je realan, postoje dve sopstvene vrednosti, $r$ i $-r$, čiji su moduli jednaki modulu maksimalne sopstvene vrednosti. Po Frobeniusovoj teoremi, spektar se slika sam u sebe pri rotaciji za ugao $\pi$, pa je simetričan u odnosu na nulu.

**Teorema 13**. Konačan, povezan graf bez petlji i sa najmanje dva čvora, čija je maksimalna vrednost jednaka $r$, bihromatski je akko njegov spektar sadrži $-r$.

Dokaz: Ako je graf bihromatski, iz prethodne teoreme sledi da njegov spektar sigurno sadrži $-r$. Pretpostavimo da graf sadrži $-r$. Matrica susedstva $A$ je hermitska. Na osnovu Frobeniusove teoreme $r$ i $-r$ su proste sopstvene vrednosti i njihov modul je maksimalan. Sledi da se ova matrica može permutacijom vrsta i kolna dovesti na oblik:

$$\begin{bmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{bmatrix}.$$

Pošto se na glavnoj dijgonali nalaze kvadratne nula matrice, graf je bihromatski.

## Neke klase grafova

**Teorema 14**. Neka je $A$ matrica susedstva grafa $G$. Tada je broj šetnji dužine $k$ između čvorova $i$ i $j$ jednak elementu $a_{ij}$ matrice $A^k$.

Dokaz: Ovo ćemo dokazati metodom matematičke indukcije.

*Baza indukcije*

U matrici susedstva $A$ grafa $G$ $i$-ta vrsta, $i = \overline{1, n}$, predstavlja broj puteva dužine 1 od tog do svakog $l$-tog čvora u vrsti, $l = \overline{1, n}$. Broj puteva dužine 1 do $j$- tog od svakog $l$-tog čvora je predstavljen tom kolonom. Pošto od $i$-og do $l$-tog čvora možemo stići na $a_{il}$, a od $l$-tog do $j$-tog čvora možemo stići na na $a_{lj}$, onda od $l$-tog do $j$-tog čvora možemo stići na $\sum_{l=1}^{n} a_{il} a_{lj}$ načina.

*Indukcijska hipoteza*

U matrici $A^k$ element $a_{il}$, $i, l = \overline{1, n}$, predstavlja broj puteva dužine $k$ od $i$-og do $l$-tog čvora.

*Indukcijski korak*

Na osnovu indukcijske hipoteze znamo da $i$-ta vrsta matrice $A^k$ predstavlja broj puteva dužine $k$ od $i$-og do svakog $l$-tog čvora u vrsti. Kako u matrici $A$ elementi $j$-te kolone predstavljaju broj puteva dužine 1 do $j$-tog čvora od svakog $l$-tog čvora u koloni, onda element

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il} a_{lj}$$

predstavlja broj puteva dužine $k+1$ od od $i$-og do $j$-tog čvora.

**Teorema 15**. Dat je graf $G$ čije su sopstvene vrednosti $\lambda_i$, $i = \overline{1, n}$. Broj $k$-touglova u grafu jednak je

$$t = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k .$$

Dokaz: Označimo sa $A$ matricu susedstva grafa $G$. Broj $k$-touglova u oznaci $t$ u grafu jednak je broju zatvorenih šetnji dužine $k$. Na osnovu prethodne teoreme sledi da je broj tih šetnji za dati početni čvor $i$ jednak elementu $a_{ii}$ matrice $A^k$. Trag matrice $A$ jednak je $2kt$, jer smo svaki $k$-tougao obišli $k$ puta u oba smera. Iz Teoreme 11 sledi da su $\lambda_i^k$ sopstvene vrednosti matrice $A^k$, a iz Teoreme 3 da je $\mathrm{tr}A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$. Dakle,

$$t = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k .$$

**Teorema 16**. Dat je graf $G$ sa $m$ grana i $n$ čvorova čije su sopstvene vrednosti $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Važi nejednakost:

$$\lambda_n \leq \left( \frac{2m(n-1)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Dokaz: Na osnovu Koši-Švarcove nejednakosti važi:

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)^2 \le (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2)(1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)^2 \le (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2)(n-1) \tag{1}$$

Suma sopstvenih vrednosti matrice $A$ jednaka je njenom tragu, odnosno:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \mathrm{trA} = 0 \tag{2}$$

Iz Teoreme 15 možemo izračunati broj grana u grafu:

$$2m = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 \tag{3}$$

Kada jednakosti (2) i (3) zamenimo u (1), dobijamo:

$$(0 - \lambda_n)^2 \le (2m - \lambda_n^2)(n-1)$$

$$\lambda_n^2 \le 2m(n-1) - \lambda_n^2(n-1)$$

$$n\lambda_n^2 \le 2m(n-1)$$

Maksimalna sopstvena vrednost je pozitivna na osnovu Frobeniusove teoreme, pa iz poslednje nejednakosti sledi:

$$\lambda_n \le \left(\frac{2m(n-1)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Teorema 17**. Karakteristični polinom matrice povezanosti kompletnog grafa ima oblik $P(\lambda) = (\lambda + 1)^{n-1}(\lambda - n + 1)$, tj. njegov spektar je

$$\begin{pmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}.$$

Dokaz: Matrica susedstva $A$ grafa $G$ ima nule na glavnoj dijagonali, dok su ostali elementi jedinice.

$$P(\lambda) = \det\left\|A - \lambda I\right\| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

Oduzimanjem prve kolone od svih ostalih dobija se:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1+\lambda & 1+\lambda & \cdots & 1+\lambda \\ 1 & -1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1-\lambda \end{vmatrix},$$

$$P(\lambda)=\det\left|A-\lambda I\right|=(1+\lambda)^{n-1}\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & \cdots & 1\\ 1 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & -1\end{vmatrix}.$$

Kada poslednju determinantu razvijemo po prvoj vrsti dobijamo član:

$$-\lambda(-1)^{n-1}\ \det(I_{n-1}) = (-1)^{n}\lambda$$

Daljim razvojem izdvajaju se poddeterminante reda $n-1$ sa predznakom $(-1)^{1+j}$. Vrednost svake od njih jednaka je zbiru permutacija $n-1$ elemenata. U svakoj poddeterminanti prva kolona sadrži samo jedinice, $j-1$-vrsta ima tačno jedan element različit od nule i to je $a_{j-1,1}$, a ostali elementi dijagonale su jednaki $-1$. Odatle zaključujemo da postoji tačno jedna permutacija elemenata poddeterminante koja je različita od nule, kada biramo $n-2$ elementa glavne dijagonale, koji su jednaki $-1$, i element $a_{j-1,1}$, koji je jednak 1. Inverzije permutacije čine element $a_{j-1,1}$ sa svakim od izabranih elemenata iz vrsta $i=\overline{1, j-2}$, pa je znak permutacije $(-1)^{j-2}$. Dakle, svaka od poddeterminanata ima vrednost:

$$(-1)^{1+j}\cdot(-1)^{j-2}\cdot(-1)^{n-2}\cdot 1=(-1)^{n-1}.$$

Konačno:

$$\det(A-\lambda I)=(1+\lambda)^{n-1}\left[(-1)^{n}\lambda+(-1)^{n-1}(n-1)\right]$$

$$\det(A-\lambda I)=(1+\lambda)^{n-1}(-1)^{n}(\lambda-(n-1)).$$

**Teorema 18**. Ako je $G_{m,n}$ kompletan bipartitan graf, onda je njegov spektar:

$$\begin{pmatrix}\sqrt{mn} & -\sqrt{mn} & 0\\ 1 & 1 & m+n-2\end{pmatrix}.$$

Dokaz. Matrica susedstva $A$ grafa $G$ ima oblik:

$$A=\begin{bmatrix}O & B\\ B^{T} & O\end{bmatrix}$$

gde je $B$ matrica $m\times n$ čiji su svi elementi jednaki 1. Karakteristični polinom jednak je zbiru svih permutacija karakteristične determinante. Permutacija koja sadrži sve elemente glavne dijagonale jednaka je $(-1)^{0}(-\lambda)^{m+n}$. Ako biramo jednu jedinicu iz podmatrice $B$, drugu iz podmatrice $B^{T}$ i iz preostalih kolona članove glavne dijagonale, dobijamo član $(-1)^{1}\cdot 1\cdot 1\cdot(-\lambda)^{m+n-2}$. Takvih permutacija ima $mn$. Sve druge permutacije jednake su nuli. Dakle, polinom ima oblik:

$$P(\lambda) = (-\lambda)^{m+n} - mn(-\lambda)^{m+n-2} = (-1)^{m+n}\lambda^{m+n} - (-1)^{m+n-2}mn\lambda^{m+n-2}$$

$$P(\lambda) = (-1)^{m+n}\lambda^{m+n-2}(\lambda^2 - mn).$$

**Lema**. Neka je $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ spektar regularnog grafa $G$. Tada je spektar njegovog komplementa $\overline{G}$ jednak:

$$\mathrm{spec}\overline{G} = \begin{pmatrix} n-1-r & -\lambda_a - 1 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}, \mathrm{a} = \overline{2, \mathrm{n}}.$$

Dokaz: Ako je $r$ stepen čvora grafa $G$, onda iz Teoreme 8 sledi da je $r$ njegova maksimalna sopstvena vrednost. Sopstveni vektor $j$ koji joj odgovara ima sve koordinate jednake 1. Neka su $\lambda_1 = r, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti grafa $G$ i neka je $x_a$ sopstveni vektor koji odgovara $\lambda_a$, $a = \overline{1, n}$, tada vektori $x_1 = j, x_2, \ldots, x_n$ čine ortogonalnu bazu vektorskog prostora $R^n$ jer su linearno nezavisni, tj. odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima. Ovde važi $x_a^T \cdot x_b = 0$ za $a \neq b$. Komplement $\overline{G}$ ima matricu susedstva $\overline{A} = J - I - A$, gde je $J$ kvadratna matrica čiji su svi elementi jednaki 1. Tada na osnovu $A\,j = r\,j$ važi:

$$\overline{A}x_a = (J - I - A)j = nj - j - rj = (n-1-r)j$$

Onda iz $x_a^T j = 0$ za $a = \overline{2, n}$ dobijamo:

$$\overline{A}x_a = (J - I - A)x_a = 0 - x_a - \lambda_a x_a = -(\lambda_a + 1)x_a$$

Ovde zaključujemo da $\overline{G}$ ima iste sopstvene vektore kao i G, a da su sopstvene vrednosti $\overline{G}$ brojevi $n-1-r$ i $-\lambda_a - 1$ za $a = \overline{2, n}$.

**Teorema 19**. Spektar $p$-partitnog grafa sa $m$ čvorova u svakom delu je:

$$\begin{pmatrix} pm-m & -m & 0 \\ 1 & p-1 & pm-p \end{pmatrix}.$$

Dokaz: Komplement $\overline{K_{m,\ldots,m}}$ grafa $K_{m,\ldots,m}$ sastoji se od $p$ komponenata povezanosti $K_m$, od kojih je svaka kompletan graf. Graf $K_m$ ima prostu sopstvenu vrednost $m-1$ i sopstvenu vrednost $-1$ sa višestrukošću $m-1$. Sledi da graf $\overline{K_{m,\ldots,m}}$ ima sopstvenu vrednost $m-1$ sa višestrukošću $p$ i sopstvenu vrednost $-1$ sa višestrukošću $p(m-1)$. Na osnovu Leme 1 dobijamo sopstvene vrednosti grafa $K_{m,\ldots,m}$:

$$m - 1 = pm - 1 - \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = pm - m$$

$$m - 1 = -\lambda_i - 1 \Rightarrow \lambda_i = -m \quad (\overline{i = 2, p})$$

$$-1 = -\lambda_j - 1 \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad (\mathrm{j} = \overline{\mathrm{p} + 1, \mathrm{pm}})$$

**Teorema 20**. Ciklus $C_n$ ima sopstvene vrednosti:

$$\lambda_k = 2\cos\frac{2\pi k}{n}, \ \mathrm{k} = \overline{0.\ \mathrm{n}-1}$$

Dokaz: Neka je $D_n$ orjentisani ciklus, a $B$ njegova matrica susedstva. Pošto je $B$ nesimetrična matrica, onda ona ima kompleksne sopstvene vrednosti. Odnosno, karakteristični polinom imaće različitih kompleksnih korena. Na osnovu Leme 1 iz rada Oklapi i Numanović (2008) sledi da matrica $B$ ima $n$ linearno nezavisnih sopstvenih vektora. Vektori $[1\lambda\lambda^2\ldots\lambda^n]^T$ su sopstveni vektori jer su linearno nezavisni i postoji $\lambda$ za koje je $[1\lambda\lambda^2\ldots\lambda^n]^T$ rešenje jednačine $Bx = \lambda x$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix}$$

$$1 = \lambda^n$$

Sopstvene vrednosti matrice $B$ su:

$$\lambda_k = \cos\frac{0 + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{n}, \ \mathrm{k} = \overline{0,\ \mathrm{n}-1}$$

Neka je $C_n$ neorjentisani ciklus sa istim brojem čvorova kao i ciklus $D_n$ i neka je $A$ njegova matrica susedstva. Sopstvena vrednost $\lambda$ matrice $A$ za sopstveni vektor $x$ određena je jednačinom $Ax = \lambda x$. Pošto je $A = B + B^T$, onda važi:

$$(B + B^T)x = \lambda x$$

$$Bx + B^T x = \lambda x$$

$$\lambda_1 x + \lambda_2 x = \lambda x$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda x$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$$

gde su $\lambda_1$ i $\lambda_2$ sopstvene vrednosti matrica $B$ i $B^T$ za isti sopstveni vektor $x$.

Iz:

$$B^T x = \lambda_2 x$$
$$BB^T x = \lambda_2 Bx$$
$$Ix = \lambda_2 \lambda_1 x$$
$$x = \lambda_2 \lambda_1 x$$

sledi da je:

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$$

Sopstvene vrednosti matrice $A$ su:

$$\lambda_k = \lambda_{1k} + \lambda_{2k}$$

$$\lambda_k = \lambda_{1k} + \lambda_{1k}^{-1}$$

$$\lambda_k = \cos\frac{0+2\pi k}{n} + i\sin\frac{0+2\pi k}{n} + \cos\left(-\frac{0+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{0+2\pi k}{n}\right)$$

$$\lambda_k = \cos\frac{0+2\pi k}{n} + i\sin\frac{0+2\pi k}{n} + \cos\left(\frac{0+2\pi k}{n}\right) - i\sin\left(\frac{0+2\pi k}{n}\right)$$

$$\lambda_k = 2\cos\frac{2k\pi}{n}.$$

## Markovljevi lanci

Markovljev lanac predstavlja niz stanja učesnika procesa. U svakom trenutku član može preći u neko drugo stanje, ali i ostati u istom. Markovljevi lanci se često opisuju direktnim grafom kod koga grane označavaju verovatnoću prelaska iz jednog stanja u drugo. Naravno, reč je o težinskim grafovima.

Ako Markovljev lanac ima $k$ stanja, njega možemo predstaviti matricom $A$ dimenzije $k$ tako da $a_{ij}$ predstavlja verovatnoću prelaska iz stanja $i$ u stanje $j$. Jasno je da je zbir elemenata u svakoj koloni kod matrice susedstva Markovljevih lanaca jednak jednak 1. Ova matrica se naziva Markovljeva ili stohastička. Postoje matrice koje se normiranjem mogu svesti na Markovljeve matrice, tj. grafovi koji predstavljaju određene procese su Markovljevi lanci. Jedna od takvih matrica je i matrica povezanosti grafa u Page Rank algoritmu. U radu Oklapi i Numanović (2008) pokazano je da ona ima maksimalnu sopstvenu vrednost $\lambda = 1$.

**Teorema 21**. Ako matricu $A$ normiramo tako što delimo svaku njenu kolonu brojem $k$, sopstvene vrednosti matrice $A$ i normirane matrice, koje odgovaraju istim sopstvenim vektorima, odnose se kao $k : 1$.

Dokaz: Normiranjem na ovaj način dobijamo matricu $\frac{1}{k}A$. Sopstvene vrednosti matrice $A$ određene su jednačinom $Ax = \lambda x$, a sopstvene vrednosti normirane matrice jednačinom $\frac{1}{k}Ax = \lambda' x$. Rešavanjem sistema dobijamo:

$$\frac{\lambda}{k}x = \lambda' x$$

iz čega sledi da je $\lambda' = \frac{\lambda}{k}$. Kako je maksimalna sopstvena vrednost Markovljeve, odnosno normirane matrice jednaka 1, sledi da je maksimalna sopstvena vrednost polazne matrice $A$ jednaka broju $k$.

Regularni grafovi čiji je stepen čvora $r$ normiraju se tako što se svaka kolona podeli brojem $r$. Zato normirane matrice susedstva $r$-regularnih grafova imaju sopstvene vrednosti koje su $r$ puta manje od sopstvenih vrednosti matrica susedstva. Spektar ciklusa, prema tome, sadrži broj 2 kao jednostruku i maksimalnu sopstvenu vrednost. Bipartitni graf $K_{mn}$ kod koga važi $m = n$, ima za maksimalnu sopstvenu vrednost broj čvorova u svakoj particiji.

Markovljevi lanci imaju širok spektar primene, koriste se u statistici, pa čak i u književnosti. Neka od područja primene su: modeliranje različitih procesa u teoriji redova i statistici, aritmetičko kodiranje, populacijski procesi, upotreba u bioinformatici za genetičko kodiranje, prepoznavanje osoba na slikama, predviđanje vremenske prognoze, generisanje teksta itd. Neki od tih procesa, odnosno problema mogu biti predstavljeni grafovima kojima se ovaj rad bavi. Naravno, ove specijalne vrste grafova pokrivaju samo neke, specijalne slučajeve tih problema. Međutim, izračunavanjem njihovog spektra možemo dobiti tražene i njima definisane osobine.

# Zaključak

Spektralna teorija grafova povezuje teoriju grafova sa matricama, a time i diskretnu matematiku sa linearnom algebrom. Problem određivanja osobina grafova svodi se na matrice. Na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma, možemo lako izračunati broj grana, trouglova, pa i $n$-touglova u grafu. Spektri $r$-regularnih, kompletnih, bipartitnih, $p$-partitnih grafova determinisani su nekim od njihovih karakteristika. Ako neki proces predstavimo Markovljevim lancem, koji je pri tome i $r$-regularan graf, onda je odmah poznat i njegov spektar. Pomoću sopstvenih vrednosti moguće je odrediti interval kome hromatski broj grafa pripada. Time je problem nalaženja hromatskog broja znatno umanjen.

**Zahvalnost**. Zahvaljujemo se Andreji Iliću i Marku Đikiću, mlađim saradnicima IS Petnica, na ukazanoj pomoći pri izboru literature, savetima, sugestijama i smernicama pri izradi ovog rada.

## Literatura

Brouwer A. E., Haemers W. H. Spectra of graphs. Dostupno na: http://homepages.cwi.nl/~aeb/math/ipm.pdf

Cvetković D. M. 1981. *Teorija grafova i njene primene*. Beograd: Naučna knjiga

Cvetković D. M., Simić S. K. 2002. *Odabrana poglavlja iz diskretne matematike*. Beograd: Akademska misao

Cvetković D., Simić S. 2006. *Kombinatorika i grafovi*. Beograd: Računarski fakultet

Lin K. Y. 1977. An elementary proof of the Perron-Frobenius theorem for non-negative symetric matrices. *Chinese Journal of Physics*, **15** (4): 263. Dostupno na: http://www.uvm.edu/~pdodds/research/papers/others/1977/lin1977a.pdf

Mitrinović D. S., Đoković D. Ž. 1975. *Polinomi i matrice*. Beograd: Izdavačko-informativni centar za studente

Milovanović G. V., Đorđević R. Ž. 2004. *Linearna algebra*. Niš: Elektronski fakultet

Oklapi E., Numanović S. 2008. Određivanje i primena sopstvenih vrednosti. *Petničke sveske*, 64: .117.

Stevanović D., Milošević M., Baltić V. 2004. *Diskretna matematika*. Beograd: Društvo matematičara Srbije

*Sanela Numanović and Jovana Perović*

## Characteristics of Graph Spectra

In this paper some characteristics of the eigenvalues of undirected simple graphs are presented. Relations between certain coefficients of the characteristic polynomial and number of loops, edges or triangles are presented. Numbers of polygons and k-walks are calculated. The interval which contains the graph's chrome number is determined and it is proved that the bichromated graph has a zero-symmetric spectrum. Spectrums of cycles, complete, p-partite graphs are represented. Regular graphs are connected with Markov chains and its maximal eigenvalue is determined.