
Dimitrije Radojević

Analiza Čandrasekarove granice

Ispitivani su uzroci i posledice postojanja Čandrasekarove granice. Teorijska vrednost granične mase dobijena je numeričkim metodom rešavanjem jednačine unutrašnje strukture belih patuljaka, a potom upoređena sa vrednošću dobijenom analitičkim putem. Dobijeni su odnosi centralne gustine, mase i radijusa. Predložena je korekcija korišćenog modela koja bi uključila rotaciju i prodiskutovani su dodatni efekti koji bi mogli da doprinesu drugačijoj vrednosti granične mase.

Uvod

Beli patuljci su masivni, kompaktni objekti koji predstavljaju poslednju etapu u evoluciji zvezda male do srednje mase (reda veličine nekoliko M_{\odot}). To su degenerisana jezgra matičnih zvezda preostala nakon odbacivanja zvezdanog omotača. Svoje ime beli patuljci duguju maloj veličini i svojoj boji, jer, uprkos maloj luminoznosti, većina belih patuljaka pripada „belim“ spektralnim klasama A i F. Sa prosečnom masom od oko $1 M_{\odot}$ i poluprečnikom reda veličine nekoliko hiljada kilometara, beli patuljci su sačinjeni od materije (najčešće ugljenik i kiseonik) koja je izuzetno gusta — oko 10^6 g/cm^3 . Za razliku od običnih zvezda, beli patuljci nemaju unutrašnji izvor energije, te se vremenom hlade. Jako su rasprostranjeni, ali ih je teško videti zbog malog sjaja. Zahvaljujući svojoj egzotičnoj prirodi i rasprostranjenosti, ovi su objekti vredni pažnje i predmet su velikog interesovanja moderne astrofizike.

Jedna od osobina zbog koje su beli patuljci posebno zanimljivi jeste postojanje maksimalne vrednosti mase koju ovi objekti mogu imati. Vrednost te granične mase, nešto manja od $1.4 M_{\odot}$, naziva se Čandrasekarova granica, u čast naučnika koji je prvi

pokazao njeno postojanje (Chandrasekhar 1931). Postojanje granice je kvantni fenomen, jer pri gustinama koje su milionima puta veće od prosečne gustine Sunca dolazi do makroskopskih ispoljavanja kvantnih osobina materije.

Otkriće Čandrasekarove granice je imalo veliki uticaj na modernu astrofiziku. Jedna od najznačajnijih posledica postojanja granične mase kod belih patuljaka jeste to da se supernove tipa Ia smatraju standardnim svećama. Zbog toga što sve takve supernove nastaju na isti način, od belih patuljaka čija je masa jednaka Čandrasekarovoj graničnoj masi, pretpostavlja se da je ukupna energija koju one izrače, odnosno luminoznost, uvek ista.

Postojanje Čandrasekarove granice je kvantni efekat čiji uzrok leži u sastavu i strukturi materije od koje su beli patuljci sačinjeni. Zbog toga je jako bitno razumeti strukturu ovih objekata kako bi se dokazalo postojanje Čandrasekarove granice, dobila njena približna vrednost, i na osnovu toga potvrdila opravdanost korišćenja supernova tipa Ia kao standardnih sveća.

Za razliku od standardnog izvođenja vrednosti granice, koje se zasniva na ispitivanju ultrarelativističkog slučaja, u ovom radu je teorijska vrednost Čandrasekarove granice dobijena tako što su numeričkim metodom rešene jednačine koje opisuju unutrašnju strukturu belog patuljka, a potom je posmatrano ponašanje mase i radijusa u zavisnosti od centralne gustine belog patuljka. Vrednost granice dobijene na ovaj način je potom proverena tako što je upoređena sa vrednošću granice izračunate standardnim putem.

Dimitrije Radojević (1989), Užice, Toplička 15/20, učenik 4. razreda Užičke gimnazije

MENTOR: Marko Simonović, student Fizičkog fakulteta u Beogradu

Na vrednost granice dosta utiču i početni parametri, kao što je hemijski sastav. U ovom radu je zaključeno da je izvesno da granica postoji, ali da njena vrednost može varirati u zavisnosti od osnovnih parametara i stepena realnosti korišćenog modela. Na kraju rada je predložena jedna od mogućih korekcija modela na osnovu rotacije u cilju realnijeg predstavljanja rotirajućih belih patuljaka, a samim tim i verodostojnije vrednosti dobijene granične mase.

Metod

Model korišćen u ovom radu belog patuljka opisuje kao sferno-simetrično telo, sačinjeno od fluida. Ono se nalazi u hidrostatičkoj ravnoteži, te je, preko jednačine hidrostatičke ravnoteže, moguće izjednačiti gravitacioni pritisak i pritisak materije u belom patuljku. Pritisak materije opisuje jednačina stanja. Rešavanjem pomenutih jednačina se dobija ključna jednačina koja opisuje unutrašnju strukturu belog patuljka, i povezuje bitne veličine: pritisak, gustinu i radijus.

Modeliranje belih patuljaka

Radi lakšeg računa potrebno je uvesti određene aproksimacije na osnovu kojih je beli patuljak modeliran.

Prva aproksimacija jeste da je beli patuljak nerotirajuće, odnosno sferno-simetrično telo. Ova pretpostavka se uvodi radi pojednostavljenja izvođenja. Jednačine se jako komplikuju za rotirajući slučaj, a kako cilj ovog rada nije precizno dobijanje realne vrednosti Čandrasekarove granice, sasvim je dovoljno razmatrati slučaj sferno-simetričnog patuljka da bi se pokazalo postojanje granične mase i dobila njena približna vrednost u opštem slučaju. Predlog korekcije jednačine strukture koja u obzir uzima i rotaciju nalazi se u diskusiji.

Sledeća uvedena aproksimacija je da se materija u belom patuljku nalazi u obliku fluida, mada je logično je pretpostaviti da se pri pomenutim gustinama materija u belom patuljku nalazi u čvrstom stanju. Međutim, čestice odgovorne za dinamiku sistema su praktično slobodne usled ekranizacije elektrostatičkog polja. Materija u unutrašnjosti se nalazi u jonizovanom obliku, u kome su jezgra atoma uronjena u „more“ slobodnih elektrona. Usled ogromnog broja i gustine pokretnih nosilaca naelektrisanja

moguće je zanemariti njihove međusobne interakcije, odnosno dolazi do ekraniranja ukupnog elektrostatičkog polja. Takva aproksimacija se može objasniti na sledeći način: usled velike gustine elektrona, koji su izvori elektrostatičkog polja koje ih okružuje, svaki elektron je približno izotropno okružen drugim elektronima. Elektrostatičke interakcije po svim pravcima će se stoga poništiti, pa će se stoga elektroni približno kretati kao da su slobodni. Zbog toga je ovakav gusti elektronski gas praktično slobodan, pa se može aproksimirati idealnim kvantnim (fermionskim) gasom, odnosno fluidom. Upravo pritisak ovog gasa diktira globalnu dinamiku sistema, o čemu će biti reči kasnije.

Treća pretpostavka tiče se gravitacije u sistemu. Uzeto je da je ona njutnovske prirode. Gustina, pritisak i energija u unutrašnjosti belog patuljka su takvi da bi relativistički efekti mogli da dođu u obzir, međutim, za karakteristične vrednosti mase M i radijusa R belih patuljaka dobija se da je $GM/R \ll c^2$, gde je G gravitaciona konstanta, a c brzina svetlosti u vakuumu. Ovo znači da se relativistički efekti generalno mogu zanemariti, i pored ekstremnih uslova u belim patuljcima.

Jednačina hidrostatičke ravnoteže

Pod navedenim pretpostavkama i aproksimacijama, moguće je napisati jednačinu hidrostatičke ravnoteže u unutrašnjosti patuljka, koja je diferencijalna jednačina drugog reda i povezuje gustinu, radijus i pritisak:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho(r) \quad (1)$$

gde je P pritisak, r radijus, a ρ gustina.

Da bi se dobio odnos gustine i poluprečnika, odnosno da bi se prethodna jednačina svela na diferencijalnu jednačinu po jednoj promenljivoj, neophodno je naći vezu između pritiska i gustine. Ove dve veličine povezuje jednačina stanja degenerisane materije iz koje je beli patuljak načinjen.

Poreklo degenerisanog pritiska

Pritisak odgovoran za suprotstavljanje gravitaciji u belom patuljku nije termalnog porekla, već potiče od elektrona. Radi pojašnjenja porekla ovog pritiska, zgodno je posmatrati unutrašnjost belog patuljka kao „veliki“, pojednostavljeni kvantni sistem u obliku jednodimenzionalne potencijalne jame.

U takvom sistemu čestice se nalaze u jami konačne širine na čijem je dnu potencijal jednak nuli dok se sa obe strane jame nalaze „zidovi“ beskonačno visokog potencijala. Energetski nivoi čestica su tada kvantovani, a njihova energija je obrnuto proporcionalna kvadratu širine jame. Smanjivanjem širine jame, energije svih stanja se povećavaju.

Ovakav sistem se ponaša veoma specifično ukoliko su čestice u potencijalnoj jami fermioni, jer tada one podležu Paulijevom principu isključenja. Po ovom principu, dva fermiona ne mogu okupirati isto kvantno stanje. Samim tim, postoji konačan broj fermiona koji u istom trenutku mogu okupirati jedan energetski nivo. Zbog toga čestice moraju redom popunjavati energetske nivoe, počevši od onih sa manjom energijom. Ukoliko se dužina jame smanji, energija svih fermiona koji okupiraju neko kvantno stanje mora eksponencijalno porasti.

Još jedna bitna odlika fermiona u ovakvom sistemu jeste da oni uvek imaju određenu energiju i impuls, pa ove čestice prouzrokuju određen pritisak ka spolja na svakoj, čak i nultoj, temperaturi. Ovakav otpor sredine koji se javlja i na nultoj temperaturi se naziva pritisak degenerisanog fermionskog gasa.

Pritisak degenerisanog elektronskog gasa igra ključnu ulogu u suprotstavljanju daljem gravitacionom sažimanju kod belih patuljaka (kod normalnih zvezda gravitacionom sažimanju se suprotstavljaju pritisak klasičnog gasa i radijacioni pritisak koji potiče od termonuklearnih reakcija).

Kvantni idealni gas

Da bi se pravilno opisao pritisak degenerisanog elektronskog gasa, neophodno je poslužiti se kvantnom statističkom fizikom i izvesti jednačinu stanja kvantnog idealnog gasa. Taj proces je preopširan da bi se ovde izložio u potpunom obliku, pa će se samo pomenuti bitne stavke. Polazi se od velike particione funkcije koja opisuje statistička svojstva sistema u termodinamičkoj ravnoteži koji je predstavljen u velikom kanonskom ansamblu. Za fermionski gas velika particiona funkcija ima sledeći oblik:

$$\Xi = \prod_i (1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)})$$

gde je $\beta = 1/(k_B T)$, k_B Bolcmanova konstanta, T temperatura, μ hemijski potencijal (promena sistema pri uvođenju, odnosno uništavanju jedne čestice), a ϵ_i energija i -tog energetskog nivoa.

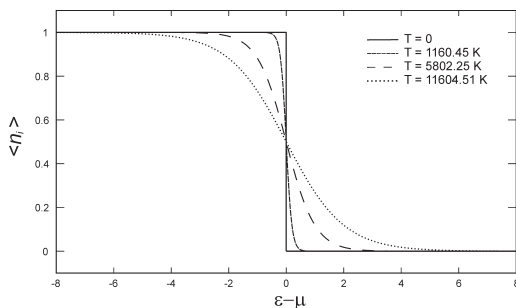
Particiona funkcija je jako korisna jer se može povezati sa određenom termodinamičkom veličinom. Tako je srednji broj čestica u sistemu:

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} = \sum_i \langle n_i \rangle$$

gde je $\langle n_i \rangle$ srednji broj popunjenosti i -tog nivoa, koji je, kada se prepíše iz prethodne jednačine:

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1}, \langle n_i \rangle \in [0, 1] \quad (2)$$

Jednačina (2) zapravo opisuje distribuciju elektrona po energetskim nivoima u belom patuljku, i naziva se Fermi-Dirakova raspodela. Ono što je karakteristično za ovu raspodelu jeste da se na nultoj temperaturi pojavljuje takozvana Fermi-Dirakova stepenica, odnosno javlja se oštra granica do koje su kvantna stanja popunjena i nakon koje nema fermiona (slika 1). Energija na kojoj se odigrava ovaj prelaz naziva se Fermijeva energija ϵ_F , i ona je jednaka μ . Takođe je moguće pokazati da na visokim temperaturama ova raspodela teži Maksvel-Bolcmanovoj raspodeli, kojom se opisuju klasični idealni gasovi.



Slika 1. Izgled Fermi-Dirakove funkcije raspodele za različite vrednosti temperature. Jasno se uočava FD stepenica (puna linija) koja se javlja na nultoj temperaturi.

Figure 1. Fermi-Dirac distribution function at different temperatures which converges to a step function at absolute zero

Jednačinu stanja idealnog fermi gasa je takođe moguće izvesti preko particione funkcije. Za fermione važi:

$$pV = -k_B T \ln \Xi = k_B T \sum_i \ln(1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}) \quad (3)$$

U ovom trenutku neophodno je razmotriti konfiguraciju energetskih nivoa u belom patuljku. S obzirom na ogroman broj elektrona koji moraju okupirati neko kvantno stanje, logičan je zaključak da postoji ogroman broj energetskih nivoa. Zapravo, nivoa je toliko mnogo da je energetska razlika između njih relativno mala, te se oni mogu posmatrati kao kontinuum. Usled toga se može izvesti sledeća zamena:

$$\sum_i \rightarrow 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k$$

gde je zapremina, početna dvojka označava broj mogućih spinova ($\pm \frac{1}{2}$), sledeći član predstavlja broj kvantnih stanja po energetskom nivou, a integrali se po trodimenzionalnom impulsnom k prostoru. Veza između kinetičkog impulsa čestice i k je:

$$p = k\hbar$$

gde je $\hbar = h/2\pi$ redukovana Plankova konstanta. Jednačina (3) nakon uvođenja pomenutih smena postaje:

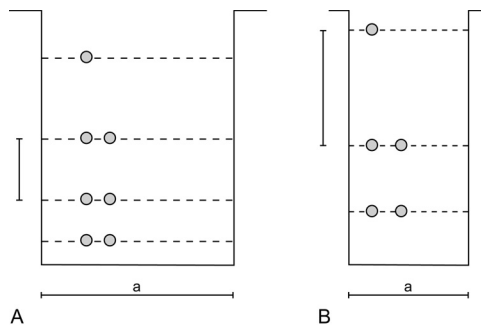
$$pV = k_B T \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d^3k \ln(1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)})$$

a nakon prelaska u sferni koordinatni sistem i parcijalne integracije, dobija se jednačina koja opisuje pritisak idealnog fermi gasa:

$$P = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^\infty dk^3 k \langle n_i \rangle \frac{d\epsilon_k}{dk} \quad (4)$$

Ovde je bitno obratiti pažnju na jednu ključnu stvar. Napomenuto je da je energija čestica u kvantnoj potencijalnoj jami obrnuto proporcionalna širini jame. Beli patuljak ima ekstremno malu zapreminu, što znači da su čestice jako zbijene, odnosno da je gustina ogromna. Gravitaciono sažimanje takođe deluje ogromnim pritiskom. Posledica svega toga jeste da je potencijalna jama ekstremno skupljena, te da su razlike susednih energetskih nivoa velike. Šta više, razlika susednih visokoenergetskih nivoa teži beskonačnosti, te su ovi nivoi nedostižni čak i za relativističke elektrone. Ako se uzme u obzir da je broj elektrona na belom patuljku ogroman, a svaki elektron okupira jedno kvantno stanje, i da postoji određena granica energije koju elektroni mogu posedovati, može se zaključiti da će svaki nivo, odnosno svako stanje, čija je energija dovoljno niska biti popunjeni. Drugim rečima, nema praznih međunivoa, nema preskakanja energetskih nivoa kao u nor-

malnim uslovima. Ovakva konfiguracija odgovara kvantnom sistemu u najnižem energetskom stanju, odnosno na nultoj temperaturi (slika 2). Iako se efektivna temperatura u unutrašnjosti belih patuljaka meri milijardama kelvina (čitav taj energetski sadržaj nalazi se u elektronima na fiksnim energetskim nivoima), usled specifične konfiguracije sistema može se pretpostaviti da se čitav beli patuljak nalazi na apsolutnoj nuli temperature.



Slika 2. Konfiguracija prostog kvantnog sistema na nultoj temperaturi. Primećuje se znatno veća razlika u energijama nivoa u užoj potencijalnoj jami (B) nego u široj (A).

Figure 2. Configuration of a simple quantum system at zero temperature. The difference between energy levels is greater in the narrower potential hole (B).

Jednačina (4) se ovde znatno pojednostavljuje, zbog toga što je sada, usled karakteristične FD stepenice na nultoj temperaturi, svako stanje do najveće, Fermijeve energije popunjeno (jer je tada $\langle n_i \rangle = 1$). Maksimalni impuls čestice k_F jeste impuls na Fermijevoj energiji. Jednačina pritiska tada konačno postaje:

$$P = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_F} k^3 dk \frac{d\epsilon_k}{dk} \quad (5)$$

Preostaje da se u prethodnu jednačinu uvede kinetička energija čestica, koja je, u opštem slučaju:

$$\epsilon_k = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{k\hbar}{mc}\right)^2} - 1 \quad (6)$$

gde je m masa elektrona. Može se pokazati da se prethodna jednačina za nerelativističke i ultrarelativističke čestice može svesti na (redom):

$$\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m, \quad k\hbar \ll mc$$

$$\varepsilon_k = \hbar ck, \quad k\hbar \gg mc$$

te se ubacivanjem ovih izraza u jednačinu (5) dobijaju jednačine koje opisuju pritisak degenerisanog gasa sačinjenog od nerelativističkih, odnosno ultra-relativističkih čestica:

$$P_{\text{nerel}} = \frac{1}{15} \frac{\hbar^2 k_F^5}{\pi^2 m} \quad (7a)$$

$$P_{\text{rel}} = \frac{1}{12} \frac{\hbar ck_F^4}{\pi^2} \quad (7b)$$

Vraćajući se na opšti slučaj (6), sledi:

$$\frac{\varepsilon_k}{k} = mc^2 \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 k \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k\hbar}{mc} \right)^2}}$$

Uvodeći prethodnu jednakost u jednačinu (5), i uvođenjem smene $x = k\hbar / mc$ dobija se opšti oblik jednačine za pritisak:

$$P = \frac{mc^2}{3\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^{3x_F} \int_0^{x_F} \frac{x^4 dx}{\sqrt{1+x^2}} = Af(x) \quad (8)$$

$$A = \frac{\pi m^4 c^5}{3\hbar^3}, \quad f(x) = x\sqrt{1+x^2}(2x^2-3) + 3\text{arsh}x$$

Gustinu je neophodno izraziti u obliku pogodnom za kasnije uvođenje u jednačinu (1). Ukupan broj fermiona u posmatranom sistemu je proporcionalan integralu FD raspodele po impulsnom prostoru od 0 do k_F :

$$N = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1} = \frac{V}{\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^2 dk}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1}$$

i na nultoj temperaturi iznosi:

$$N = \frac{V}{\pi^2} \frac{k_F^3}{3}$$

Iz poslednje jednačine se može izvući koncentracija fermiona (elektrona):

$$n_e = \frac{N}{V} = \frac{k_F^3}{3\pi^2}$$

Konačno, gustina se može definisati preko barionske mase i koncentracije elektrona:

$$\rho = \frac{n_e m_b}{Y} = \frac{k_F^3 m_b}{3\pi^2 Y} \quad (9)$$

gde je $Y = 1/\mu_e$, μ_e broj bariona po jednom elektronu, a m_b barionska masa. Kako je $x \propto k_F$, to konačan oblik prethodne jednačine postaje:

$$\rho = Bx^3, \quad B = \frac{8\pi m^3 c^3 m_b \mu}{3\hbar^3} \quad (10)$$

Jednačina strukture

U ovom trenutku je moguće uvesti parametarske jednačine pritiska (8) i gustine (10) u jednačinu hidrostatičke ravnoteže (1). Međutim, početni i granični uslovi za numeričku integraciju tako dobijene jednačine ne bi bili jasno definisani. Stoga je bilo neophodno uvesti skup posebnih smena čija je glavna svrha da jasno definišu početne uslove. Uvodi se nova funkcija ϕ i nove promenljive η , x_0 i y_0 tako da važi:

$$x = x_0 (\phi^2 y_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$y_0^2 = x_0^2 + 1$$

$$r = \left(\frac{2A}{\pi G} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{By_0} \eta$$

Parametarska jednačina gustine (10) se preko nove funkcije zapisuje na sledeći način:

$$\rho = \frac{\rho_c}{\left(1 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \rho_c = Bx_0^3$$

gde je ρ_c gustina u centru zvezde.

Nakon uvođenja pomenutih smena u jednačinu (1) i dužeg računa, dobija se jednačina strukture koja povezuje ϕ (korespondentno gustini) i η (koje odgovara radijusu):

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^2 \frac{d\phi}{d\eta} \right) = -(\phi^2 y_0^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \quad (11)$$

U ovakvom obliku, prethodna jednačina je pogodna za numeričko rešavanje jer su početni uslovi dobro definisani:

$$\phi(\eta = 0) = 1$$

$$\frac{d\phi}{d\eta}(\eta = 0) = 0$$

$$\phi(\eta_1) = \frac{1}{y_0}$$

gde η_1 označava granicu integracije. Iz ovih jednačina se vidi da su i radijus i i gustina jednoznačno određeni vrednošću y_0 , koja je u bliskoj vezi sa centralnom gustinom ρ_c .

Masa idealno sfernog tela se računa po sledećoj formuli:

$$M = 4\pi \int_0^r r^2 \rho(r) dr \quad (12a)$$

odnosno, u novom obliku:

$$M = 4\pi \left(\frac{2A}{\pi G} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{B^2} \int_0^{\eta_1} \eta^2 \left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} d\eta \quad (12b)$$

Jednačina (12b) je konačan oblik formule po kojoj se, na osnovu centralne gustine zadate sa y_0 , numeričkim putem računa vrednost mase.

Za numeričko rešavanje prethodne jednačine korišćen je Ojlerov metod numeričke integracije.

Rezultati

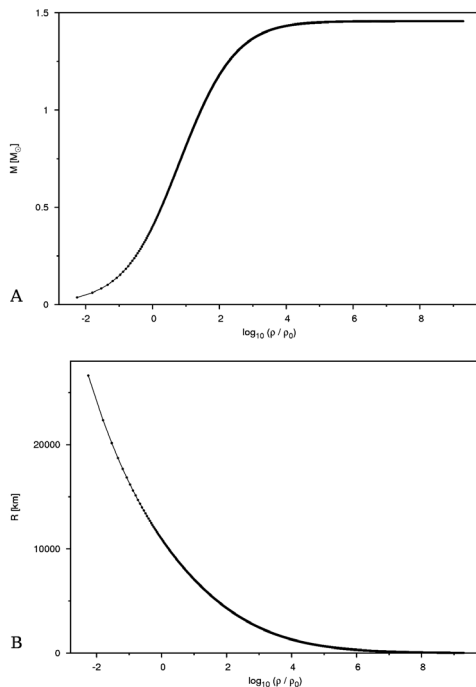
Numeričkom integracijom jednačine (12b) za različite vrednosti y_0 dobijeni su odnosi centralne gustine i radijusa, odnosno centralne gustine i mase belog patuljka (slika 3). Sa ovih grafika se jasno može videti da postoji određena tačka konvergencije mase i radijusa za velike vrednosti centralne gustine. Spajanjem prethodne dve relacije dobijen je odnos mase i radijusa (slika 4). Takođe je dat primer zavisnosti gustine i radijusa za neku fiksnu centralnu gustinu modela (slika 5).

Sa grafika se jasno vidi da postoji određena granična masa ka kojoj radijus asimptotski teži nuli. Algebarska vrednost te granice dobijena numeričkim putem iznosi:

$$M_{ch} = 1.45 M_{\odot} \quad (13)$$

što se slaže sa dokumentovanom vrednošću Čandra-sekarove granice. Preciznost korišćenog metoda numeričke integracije je slaba, u odnosu na bolje integracione šeme, ali za cilj ovog rada nije neophodna velika preciznost rezultata.

Radi provere dobijenog rezultata, Čandrasekaraova granica je izvedena i standardnim metodom, odnosno povezivanjem jednačine pritiska za ultrarelativističke fermione (7b) i opšte jednačine za gustinu (9) da bi se dobio politropski oblik jednačine za pritisak, koji u opštem slučaju ima sledeći oblik:



Slika 3. Zavisnost ukupne mase (A) i radijusa (B) od logaritma relativne centralne gustine kod belih patuljaka. Relativna gustina je izražena kao količnik centralne gustine i gustine.

Figure 3. Dependency of total mass (A) and radius (B) of relative central density logarithm. Relative central density is defined as ratio of central density and density.

$$P = C\rho^\gamma, \quad C = const., \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n}$$

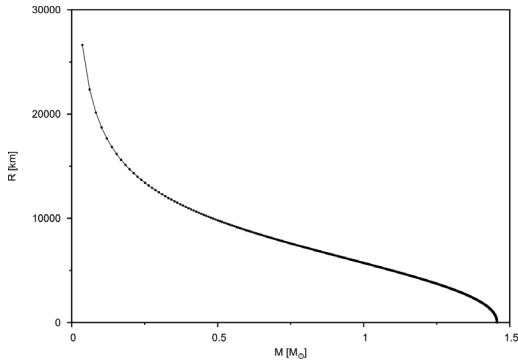
gde je n politropski indeks. U ovom slučaju ta jednačina postaje:

$$P = \frac{1}{12} \hbar c \left(\frac{3\pi^2 Y}{m_b} \right)^{\frac{4}{3}} \rho^{\frac{4}{3}}$$

Uvođenjem sledećih smena i novih funkcija (slično kao u odgovarajućem odeljku u metodu):

$$\rho = \rho_c \Theta^n, \quad r = D\xi, \quad D = \left(\frac{C(n+1)}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1}{n}-1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

jednačina (1) dobija sledeću karakterističnu formu:



Slika 4. Zavisnost radijusa od ukupne mase belog patuljaka (centralna gustina raste sa leva na desno).

Figure 4. Dependency of radius of total mass of a white dwarf

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = -\Theta^n$$

Prethodna jednačina poznata je kao Lejn-Emdenova (Lane-Emden) jednačina. Iako je ova jednačina analitički rešiva samo za $n \in \{0, 1.5\}$, postoje tablična rešenja za specifične vrednosti politropskog indeksa (Horedt 1986).

Zamenom prethodnih izraza u formulu za masu (12a) dobija se:

$$M = 4\pi\rho_c D^3 \int_0^{\xi_1} \xi^2 \Theta^n d\xi \quad (14)$$

Sa politropskim indeksom $n = 3$ za ultrarelativistički slučaj, centralna gustina je:

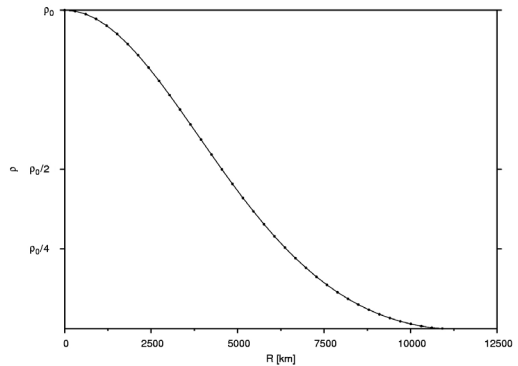
$$\rho_c = \left(\frac{D^2 \pi G}{C} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (15)$$

te jednačina (14) postaje:

$$M = -4\pi \left(\frac{\pi G}{C} \right)^{\frac{3}{2}} \Delta, \Delta = \xi_1^2 \frac{d\Theta(\xi_1)}{d\xi}$$

gde se vrednost $\Delta = 2.018236$ može naći u pomenutim tablicama. Vrednost Čandrasekarove granice izračunate na ovaj način je:

$$M_{ch} = 1.45 M_{\odot}$$



Slika 4. Zavisnost gustine od radijusa belog patuljka sa centralnom gustinom

Figure 5. Dependency of density of radius of a white dwarf with central density

što se poklapa sa rezultatom dobijenim numeričkim putem (13). Bitno je primetiti da centralna gustina ne figuriše u krajnjem izrazu.

U nerelativističkom slučaju $\gamma = 5/3$, $n = 3/2$, jednačina (15) ima drugačiji oblik:

$$\rho_c = \left(\frac{8D^2 \pi G}{5C} \right)^{-3}$$

te se njenim uvođenjem u jednačinu za masu (14) dobija:

$$M = -4\pi \left(\frac{8\pi G}{5C} \right)^{-3} D^{-3} \Delta$$

Očigledno je da u prethodnoj jednačini faktor D , u kome je sadržana centralna gustina, nije nestao kao što je to bio slučaj za relativistički politropski indeks. Ovo znači da je masa belih patuljaka, ukoliko se pretpostavi da su fermioni nerelativistički, obrnuto proporcionalna trećem stepenu centralne gustine, odnosno ne postoji nekakva maksimalna masa. Međutim, fermioni u unutrašnjostima imaju tako velike energije da se u obzir moraju uzeti relativistički efekti.

Treba naglasiti da vrednost granice u mnogome zavisi od hemijskog sastava, to jest od odnosa broja fermiona i bariona μ_e iz jednačine (9). Prilikom numeričkog rešavanja i potonjeg izvođenja, uzeta je vrednost $\mu_e = 2$, što je dobra aproksimacija za sastav evoluiranog zvezdanog jezgra.

Diskusija i zaključak

Prilikom modeliranja belog patuljka napravljeno je mnogo pretpostavki radi pojednostavljenja računa. Zanimarene su elektrostatičke interakcije, ali pod pretpostavkom da su naelektrisanja uniformno raspoređena po zapremini. To u belom patuljku svakako nije slučaj. Celokupno pozitivno naelektrisanje u belom patuljku je grupisano u jezgru (protoni). Zatim, na većim centralnim gustinama se u obzir moraju uzeti inverzni beta raspad i blizu jezgra, a ukoliko se centralna gustina i dalje povećava relativistički efekti postaju sve izraženiji, te treba uzeti u obzir opštu teoriju relativnosti. Sve ove popravke mogu uticati na vrednost Čandrasekarove granice.

Jedan od bitnijih faktora koji su zanemareni jeste rotacija. Rotirajuća tela nisu sferno simetrična, već su spljoštena na polovima i izdužena u ravni ekvatora. Relaksacija gravitacionog pritiska u unutrašnjosti usled rotacije mogla bi imati uticaj na vrednost Čandrasekarove granične mase, koja bi tada bila nešto veća. Ovaj efekat očigledno zavisi od brzine rotacije. Čandrasekar je izveo jednačinu ravnoteže za rotirajuće konfiguracije (Chandrasekar 1933), koja koristi polarne koordinate, i , za razliku od jednačine (3), sadrži brzinu rotacije:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1-\mu^2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \mu} \right) = -4\pi G \rho + 2\omega^2$$

gde je $\mu = \cos \Theta$, a ω ugaona brzina rotacije. Ova jednačina se takođe, nakon uvođenja odgovarajućih smena i politropskog oblika jednačine pritiska:

$$\rho = \lambda \Theta^n, P = \lambda^\gamma K \Theta^{n+1},$$

$$r = F \zeta F = \left(\frac{(n+1)K}{4\pi G} \lambda^{\frac{1}{n}-1} \right)^{\frac{1}{2}}, v = \frac{\omega^2}{2\pi G \lambda}$$

može svesti na:

$$\frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} \right) + \frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial \Theta}{\partial \mu} \right) = -\Theta^n + v \quad (16)$$

Ova jednačina je nehomogena, nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda i nije rešiva analitički. Ona opisuje opštiji slučaj od jednačine unutrašnje strukture bez rotacije (11), međutim, numeričko rešavanje jednačine (16) je dosta kompli-

kovanije. Autor smatra da bi se uvođenjem njenog rešenja u jednačinu (12a) dobila realnija, nešto veća vrednost Čandrasekarove granice, i da bi ta razlika dobila na značaju za jako velike brzine rotacije.

Bitno je naglasiti da je vrednost granice koja je u ovom radu izvedena čisto teorijska i da, kao takva, nikako ne predstavlja realnu graničnu masu, pre svega zbog toga što je korišćeni model jako simplifikovan.

Zahvalnost. Autor duguje ogromnu zahvalnost mentoru rada, Marku Simonoviću, kome pripisuje veliku zaslugu za pomoć i motivaciju i bez čijih saveta, uputstava i recenzija ovaj rad gotovo sigurno ne bi postojao. Autor bi takođe izrazio zahvalnost mladom kolegi Mateji Boškoviću, vrsnom matematičaru i fizičaru, koji je pomogao pri analitičkom izvođenju vrednosti Čandrasekarove granice.

Literatura

- Chandrasekar S. 1931. The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs. *ApJ*, **74**: 81.
- Chandrasekar S. 1933. The equilibrium of distorted polytropes I. The rotational problem, *MNRAS*, **93**: 390.
- Chandrasekar S. 1934. Stellar configurations with degenerate cores. *The Observatory*, **57**: 373.
- Chandrasekar S. 1984. *On stars, their evolution, and their stability* (Nobel lecture). Stockholm: The Nobel Foundation
- Horedt G. P. 1986. Seven-digit tables of Lane-Emden functions. *Astrophysics and Space Science*, **126** (2): 357.
- Cohen-Tannoudji C., Diu, B., Laloe, F. 1973. *Quantum mechanics*. Wiley-Interscience
- Huang, K. 1987. *Statistical mechanics* (second edition). Wiley

Dimitrije Radojević

Study of Chandrasekhar's Limit

Chandrasekhar's limiting mass of white dwarves is an interesting phenomenon, arising from quantum properties of dense, degenerate matter that these exotic objects are made of. Since its discovery, the limit has had repercussions throughout modern astrophysics – the method of using supernovae type Ia as standard candles is entirely based upon its exis-

tence. A detailed study of causes and implications of Chandrasekhar's limiting mass has been performed in this paper. Value of the limit is first computed using a numerical method for solving inner structure equation, and then calculated again, with a more classical approach, by derivation. This way, the existence of Chandrasekhar's limit has been proven in both a numerical and an analytical manner. Correlations between central density, radius and mass of white dwarves are presented, as well as a suggested improvement to the model used in this paper, which takes rotation into account. 