

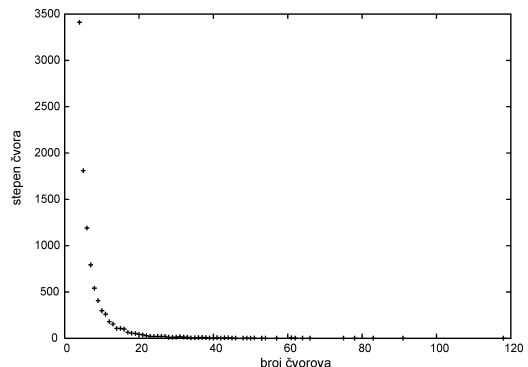
Strukturne razlike među *scale-free* modelima

Veliki broj fenomena iz svakodnevnog života se može opisati primenom modela mreža. Prvobitno je smatrano da su realne mreže najbolje opisane random mrežama, ali proverom njihovih karakteristika uočene su bitne razlike. Ispostavilo se da se najveći broj realnih mreža ponaša kao *scale-free* mreže. U ovom radu smo ispitivali osobine *scale-free* mreža generisanih po različitim modelima. Za svaki model smo prebrojavali šest povezanih podstruktura (formiranih od četiri čvora) i upoređivali ih sa ostalim modelima. Takođe, upoređivali smo i mreže istog modela, ali za različite parametre. Pokušali smo da utvrdimo kako se i na koji način menja broj podstruktura u zavisnosti od modela po kojem je generisana mreža i samih parametara modela.

Uvod

Mreža predstavlja skup čvorova i veza koje postoje između njih. Neke značajne strukture u svakodnevnom životu se mogu okarakterisati kao mreže. Kao najtipičniji primer možemo uzeti WWW, gde svaka stranica predstavlja čvor, a linkovi ka drugim stranicama veze između njih. Mrežom je moguće predstaviti i saradnju među glumcima, gde glumci predstavljaju čvorove, a veza između njih postoji ako su glumili u istom filmu. Ovakvih primera ima mnogo, mrežama se mogu modelirati kontakti među ljudima, interakcije među proteinima, koautorstva u naučnim radovima itd. Da bi se lakše opisale i objasnile pojave kod ovakvih mreža u svakodnevici, započeta su njihova detaljnija istraživanja. Prvobitno je smatrano da su realne mreže najbolje opisane modelom random mreža. To su mreže u kojima je veza između svaka dva čvora podjednako verovatna

i svi čvorovi imaju (u proseku) približno isti broj veza. Raznim istraživanjima i proverom karakteristika, uočene su bitne razlike između realnih i random mreža. Ispostavilo se da se najveći broj realnih mreža može bolje opisati modelom *scale-free* mreže (Albert, Barabasi 2002). Specifičnost ovih mreža je postojanje preferencijalnih čvorova. To su čvorovi koji imaju mnogo više veza sa ostatkom mreže nego ostali. Njih ima malo, pa se veći deo mreže sastoji od čvorova koji su povezani tek sa nekoliko veza i to najčešće sa nekim preferencijalnim čvorom. Pri analizi mreža posmatra se i zavisnost broja čvorova od stepena čvora, koja se još naziva i raspodela povezanosti. Stepent čvora predstavlja broj veza kojima je on povezan sa drugim čvorovima u mreži. Za *scale-free* mreže karakteristično je da raspodela povezanosti opada po stepenom zakonu. Ova zavisnost prikazana je na slici 1. Radi preglednosti ova distribucija se uglavnom predstavlja na log-log



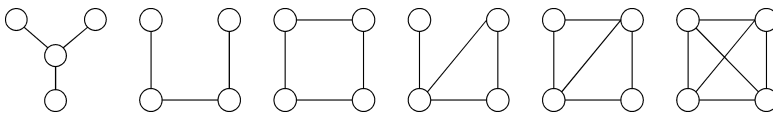
Slika 1. Distribucija povezanosti za *scale-free* mreže

Figure 1. Connectivity distribution for *scale-free* networks

Miloš Srečković (1987), Šabac, Drinska 10, učenik 4. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

Nikola Veličković (1987), Beograd, Bulevar AVNOJ-a 48/15, učenik 4. razreda ETŠ "Nikola Tesla" u Beogradu

MENTOR: Marina Radulaški, student Fizičkog fakulteta u Beogradu



Slika 2. Podstrukture

Figure 2. Substructures

grafiku, na kojoj je linearna. U ovom radu smo generisali scale-free mreže koristeći tri različita modela: Barabasi-Albert (Albert, Barabasi 2002), *random walk* (Evans, Saramaki 2005) i model kopiranja (<http://en.wikipedia.org/>). Za svaku generisanu mrežu prebrojavali smo broj povezanih podstrukture formiranih od četiri čvora. Podstrukture predstavljaju bilo koja četiri čvora u mreži međusobno povezana na jedan od šest načina prikazanih na slici 2. Sve ostale strukture koje se mogu formirati od četiri čvora mogu se svesti na neku od ovih šest struktura. Radi prikazivanja odnosa među pojedinih podstrukture uvodimo spektar mreže, koji predstavlja zavisnost broja podstrukture od njihovog rednog broja. U daljem radu će svaka podstruktura biti obeležena brojem kao na slici 2.

Barabaši-Albert model

Prvi model za generisanje scale-free mreža koji smo koristili je Barabasi-Albert (BA) model (Albert, Barabasi 2002). Prema ovom modelu, scale-free mreža se generiše na sledeći način: krećući od malog broja slučajno povezanih čvorova n_0 sa verovatnoćom povezanosti p_0 , u svakom koraku dodajemo čvor sa $m(\leq n_0)$ novih veza (koje će biti povezane sa

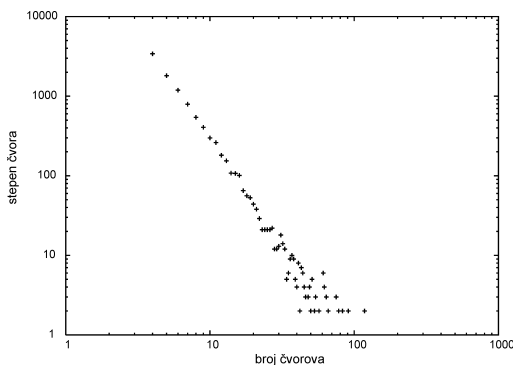
čvorovima koji su već prisutni u sistemu). Prilikom biranja sa kojim od postojećih čvorova u mreži će se povezati novi čvor, podrazumevamo da verovatnoća vezivanja $P(k_i)$ za čvor i zavisi od stepena tog čvora k_i kao u formuli (1).

$$P(k_i) = k_i / \sum_j k_j \quad (1)$$

Posle t koraka dobijamo mrežu sa $N = tm + n_0$ čvorova. Tokom vremena, početna random mreža evoluiru u scale-free mrežu. Kod ovako generisanih mreža raspodela povezanosti se ponaša kao stepeno opadajuća funkcija sa koeficijentom $\gamma = 3$ (Albert *et al.* 1999). Ovako generisana mreža ima distribuciju povezanosti kao na slici 3.

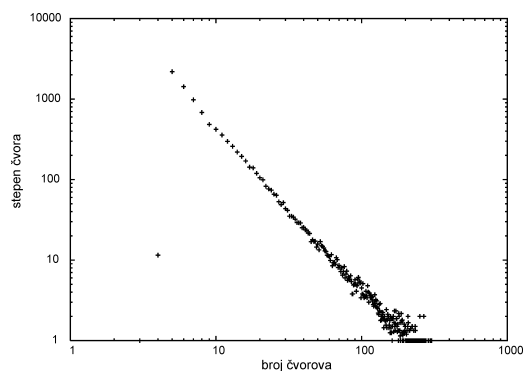
Random walk model

Drugi model koji smo koristili za generisanje scale-free mreža je model random walk (Evans, Saramaki 2005). Generisanje mreže po ovom modelu kreće od random mreže proizvoljne veličine. Potom se slučajno (po uniformnoj raspodeli) izabere m čvorova iz mreže. Nakon toga se, polazeći od izabranog čvora, slučajno bira neki njegov sused, za-



Slika 3. Distribucija povezanosti za scale-free mreže generisanu po Barabaši-Albert modelu

Figure 3. Connectivity distribution for a scale-free network generated according to the Barabasi-Albert model



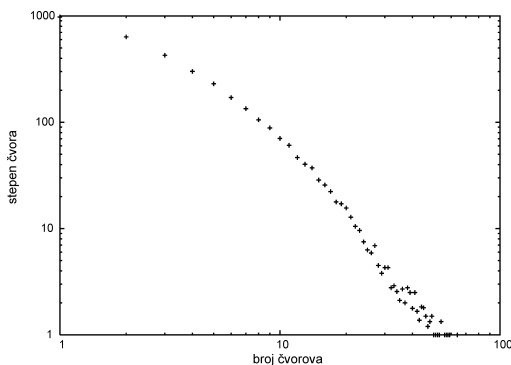
Slika 4. Distribucija povezanosti za scale-free mreže generisane po random-walk modelu

Figure 4. Connectivity distribution for scale-free networks generated according to the random-walk model

tim se ovaj postupak ponovi za izabranog suseda i ova procedura izvrši l puta pri čemu je l unapred zadani prirodan broj. Ovaj postupak se zove *random walk*. Ponavljajući postupak za sve izabrane čvorove, dobijamo m novih čvorova iz mreže, koji se nalaze na kraju svakog *random walk*-a. Neophodno je izabrati još jedan čvor koji će biti povezan sa krajnjim čvorovima dobijenih *random walk*-om (njih m). Taj se čvor ili bira iz mreže, slučajno (po uniformnoj raspodeli) ili se dodaje kao novi čvor. Parametar e predstavlja verovatnoću da se uvede novi čvor u mrežu dok je $(1 - e)$ verovatnoća da se izabere postojeći čvor iz mreže. Distribucija povezanosti mreže generisane po ovom modelu data je na slici 4.

Model kopiranja

Treći model koji smo koristili nije opisan ni jednim radom. Ideja je pronađena na Internetu (<http://en.wikipedia.org/>). Ovaj model takođe podrazumeva početnu random mrežu gde se zatim u svakoj iteraciji dodaje novi čvor. Sa kojim će čvorovima u mreži biti povezan novi čvor se određuje tako što se slučajno (uniformnom raspodelom) izabere postojeći čvor i određeni procenat njegovih veza preslika na njega. Koliki će se procenat veza preslikati je parametar samog modela i zadaje se na početku, a predstavljen je verovatnoćom p da se neka veza izabere. Što je veći parametar p , veći je procenat veza koje će se iskopirati i obrnuto. Ovako



Slika 5. Distribucija povezanosti za *scale-free* mreže generisane modelom kopiranja

Figure 5. Connectivity distribution for scale-free networks generated according to the copy model

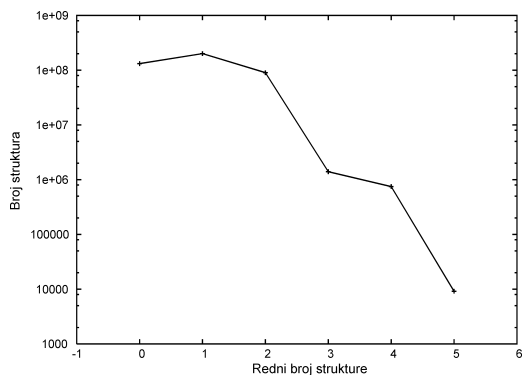
generisana mreža ima distribuciju povezanosti kao na slici 5.

Simulacija

U simulaciji je svaki čvor u mreži numerisan rednim brojem. Mreža je predstavljena kao niz dužine N , gde je N broj čvorova. Svaki element tog niza pokazuje na novi niz u kojem su zapisani svi čvorovi sa kojima je on povezan. Pošto veze nisu usmerene, svaka veza će biti dvaput zapisana, prvi put će čvor X imati na spisku čvor Y , a drugi put će čvor Y imati na spisku čvor X . U samoj simulaciji je moguće odrediti po kom modelu će se generisati mreža i za koje parametre. Na kraju svake simulacije se dobijaju dva izlazna fajla. U jednom se nalazi distribucija povezanosti, a u drugom spektar mreže.

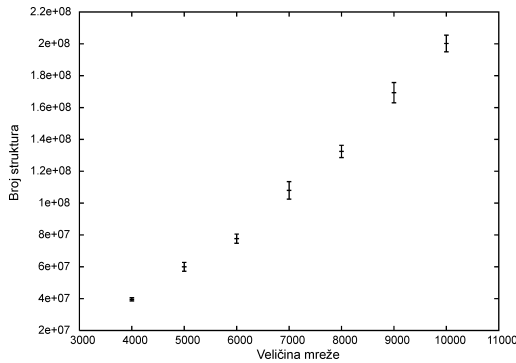
Rezultati

Prvi model koji smo koristili je Barabaši-Albert. Na slici 6 se može videti spektar za mrežu generisanu po ovom modelu. Posmatrali smo kako se menja broj svake podstrukture u zavisnosti od veličine mreže, odnosno na koji način evolucija mreže utiče na broj podstrukture. Svi ostali parametri u simulaciji su bili konstantni. Na slici 7 je prikazana zavisnost za podstrukturu 1. Primetili smo da je ova zavisnost linearna. Proverom za ostale strukture utvrdili smo da i za njih važi linearna zavisnost, što znači da se broj



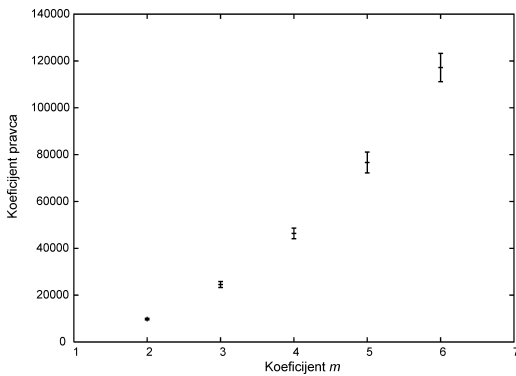
Slika 6. Spektar *scale-free* mreže generisane po Barabaši-Albert modelu

Figure 6. Spectrum distribution for a scale-free network generated according to the Barabasi-Albert model



Slika 7. Zavisnost broja podstrukture 1 od veličine mreže

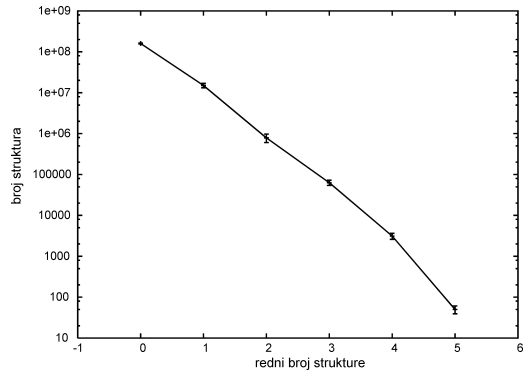
Figure 7. Dependence of substructure 1 number on network size



Slika 8. Zavisnost koefficienta pravca od parametra m

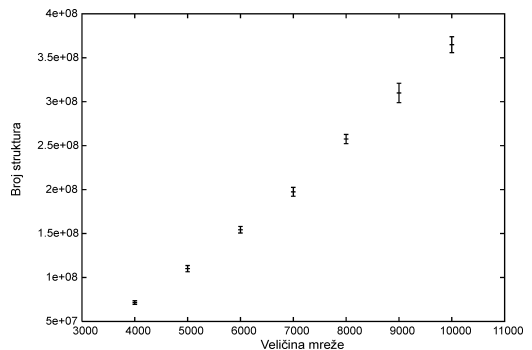
Figure 8. Dependence of the direction coefficient on m parameter

svake podstrukture linearno povećava tokom evolucije mreže. Zatim smo proverili da li je ova zavisnost linearna za druge parametre. Menjali smo ranije opisani parametar m , koji predstavlja broj veza koje se dodaju svakom novom čvoru. Ispostavlja se da se prilikom promene parametra m linearna zavisnost održava. Zatim smo je fitovali funkcijom $f(x) = a + bx$. Posmatrali smo zavisnost koefficienta pravca ovog fita od parametra m . Ta zavisnost se može videti na slici 8 za podstrukturu 1. Sa ovog grafika se može zaključiti da prilikom povećanja parametra m raste i koefficient pravca. To je i logična posledica, znajući da parametar m direktno utiče na prosečan broj veza



Slika 9. Zavisnost broja podstrukture od njihovog rednog broj za mrežu generisanu po *random walk* modelu

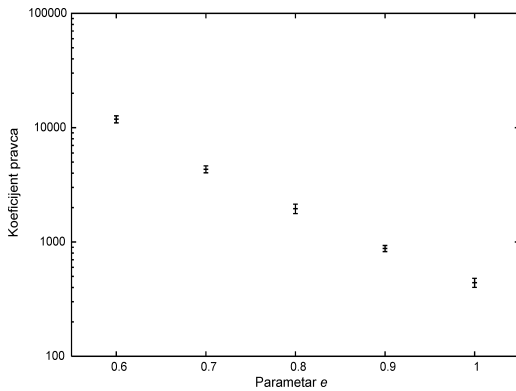
Figure 9. Dependence of the number of substructures on their ordinal number, for a network generated according to the *random-walk* model



Slika 10. Zavisnost broja podstrukture 0 od veličine mreže

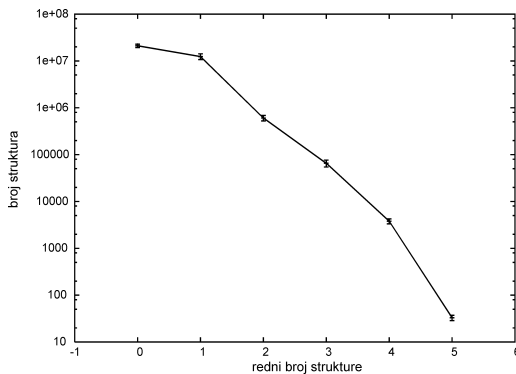
Figure 10. Dependence of substructure 0 number on network size

u mreži. Zatim smo za generisanje mreža čiji smo spektar određivali koristili *random walk* model. Na slici 9 se može videti spektar za mrežu generisanu po ovom modelu. Posmatrali smo kako se menja broj svake podstrukture u zavisnosti od veličine mreže, tj. njihovu promenu tokom evolucije mreže. Svi ostali parametri simulacije su bili konstantni. Na slici 10 je prikazana zavisnost za podstrukturu 0. Primetili smo takođe da je i ova zavisnost linearna, kao i kod prethodnog modela. Daljom proverom za



Slika 11. Zavisnost koeficijenta pravca od parametra e

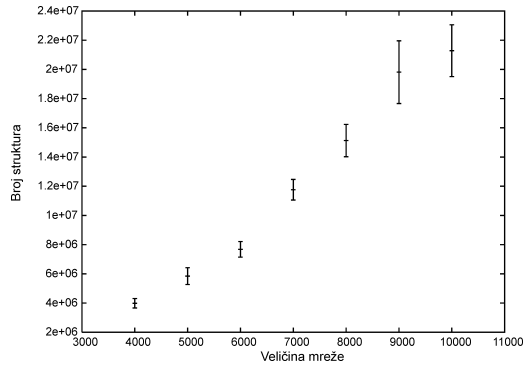
Figure 11. Dependence of the direction coefficient on e parameter



Slika 12. Zavisnost broja podstrukture od njihovog rednog broja za mrežu generisanu po modelu kopiranja

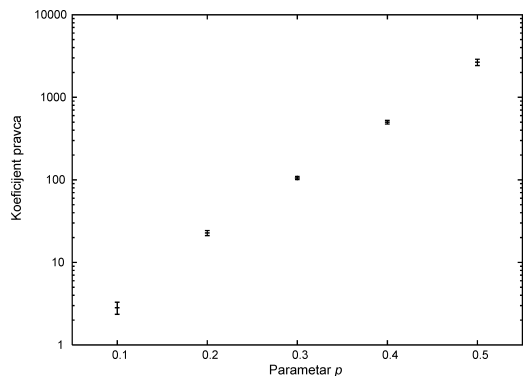
Figure 12. Dependence of the number of substructures on their ordinal number, for a network generated according to the copy model

ostale strukture utvrdili smo da i za njih važi linearna zavisnost. To znači da se broj svake podstrukture linearno povećava tokom evolucije mreže. Zatim smo proverili kako se menja broj podstrukture u zavisnosti od veličine mreže, ali za izmenjene parametre. Menjali smo ranije opisani parametar e koji predstavlja verovatnoću da se izabere novi čvor koji će se povezati sa čvorovima izabranim *random walk*-om. Ispostavlja se da se prilikom njegove promene linearna zavisnost održava. Zatim smo je fitovali funkcijom $f(x) = a + b \cdot x$. Posmatrali smo zavisnost koeficijenta pravca od parametra e . Ta



Slika 13. Zavisnost broja podstrukture 0 od veličine mreže

Figure 13. Dependence of substructure 0 number on network size



Slika 14. Zavisnost koeficijenta pravca od parametra p

Figure 14. Dependence of the direction coefficient on p parameter

zavisnost se može videti na slici 11 za podstrukтуру 0. Sa ovog grafika se može zaključiti da prilikom povećanja parametra e opada koeficijent pravca. To je i logična posledica, znajući da parametar e predstavlja odnos dodavanja novih i korišćenja starih čvorova, i njegovim povećanjem se smanjuje ukupan broj veza u mreži. Nakon ispitivanja osobina mreža generisanih po prethodna dva modela, iste smo proveravali i na mrežama generisanim modelom kopiranja. Na slici 12 je prikazan spektar za mrežu generisanu po ovom modelu. Kao i u prethodnim modelima, posmatrali smo kako se menja broj svake podstrukture u zavisnosti od veličine mreže i na taj način posmatrali kako na njihov broj utiče njena

evolucija. Svi ostali parametri simulacije su bili konstantni. Na slici 13 se može videti ta zavisnost za podstrukturu 0. Kao i u prethodnim slučajevima, primetili smo da je ova zavisnost linearna, zbog čega smo je fitovali funkcijom $f(x) = a + bx$. Proverom za ostale strukture i ovde smo ustanovili da za svaku od njih važi linearna zavisnost, iz čega sledi da broj podstruktura linearno raste tokom evolucije mreže. Nakon toga smo proverili da li je ta zavisnost linearna i za druge parametre. Menjali smo parametar p koji predstavlja procenat veza koje će se kopirati na novi čvor. Utvrdili smo da se i pri promeni p linearna zavisnost održava, ali se koeficijent pravca takode menja kao i kod ostalih modela. Zavisnost koeficijenta pravca od parametra p može se videti na slici 14 za podstrukturu 0. Sa ovog grafika se može zaključiti da prilikom povećanja parametra p koeficijent pravca raste. Znajući da p u ovom modelu predstavlja procenat veza koje će novi čvor dobiti, ovakav zaključak je logičan.

Zaključak

Pokušali smo da nađemo razlike i sličnosti u broju podstruktura sa četiri tačke. Kada samo vizuelno posmatramo spektre, možemo primetiti razliku između dva generisana različitim modelom. Ali, nismo uspeli da na neki način kvantifikujemo tu razliku i napravimo neku vrstu algoritma koji će nam odgovoriti na pitanje kojem modelu naša realna mreža najviše odgovara. Ustanovili smo da se broj svih struktura linearno povećava sa porastom mreže. Početni parametri utiču samo na koeficijent pravca te linearne zavisnosti, odnosno brzinu povećanja.

Zahvalnost. Zahvaljujemo se našem mentoru Marini Radulaški koja nam je pomogla oko ideje za projekat i usmeravala naše istraživanje na pravi put. Takođe, zahvaljujemo se Istraživačkoj stanici Petnica što nam već dugi niz godina omogućava i pomaže u izradi projekata.

Literatura

Albert R. and Barabasi A. L. 2002. Statistical Mechanics of Complex Networks. *Reviews of Modern Physics*, **74**: 47

Albert R., Jeong H. and Barabasi A. L. 1999. The diameter of the world wide web. *Nature*, **401**: 130

Evans T. S. and Saramaki J. P. 2005. Free Networks from Self-Organisation. *Physical Review E*, **74**: 26138

http://en.wikipedia.org/wiki/Scale-free_networks

Miloš Srećković and Nikola Veličković

Structural Differences between Scale-free Models

A large number of phenomena from everyday life can be described using models of networks. It used to be considered that real networks are best described using random networks, however major differences were noticed when their characteristics were compared. It turned out that most real networks behave similarly to Scale-free networks. In this paper the properties of Scale-free networks generated according to various models were examined. For each model six connected substructures (formed from four nodes) were counted and then compared between models. Also, the number of these substructures were compared for different parameters of the same model. The purpose of this work was to investigate the number of each substructure depends on the model used for generating the network and on the parameters of the model itself.

