

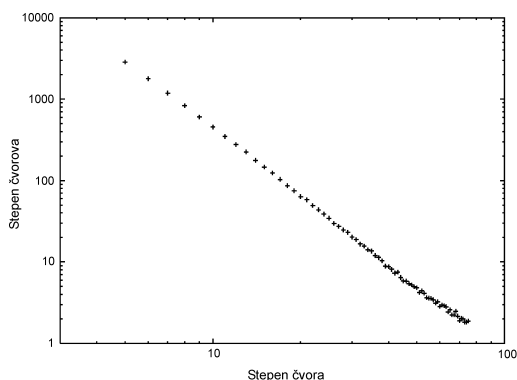
Ispitivanje osobina scale-free mreža generisanih po Barabaši-Albert modelu

Veliki broj fenomena iz svakodnevnog života može se opisati primenom modela mreža. Prvobitno je smatrano da su realne mreže najbolje opisane random mrežama, ali proverom njihovih karakteristika uočene su bitne razlike. Ispostavilo se da se najveći broj realnih mreža ponaša kao scale-free mreže. U ovom radu su ispitivane osobine scale-free mreža generisanih Barabaši-Albert (BA) modelom. Proverili smo zavisnost vrednosti clustering i small-world koeficijenta od početnih parametara vezanih za BA model, i primetili da oni značajno utiču na grafik zavisnosti broja čvorova od njihovog stepena. Stoga smo detaljno ispitali vremenski interval potreban da se njihovo dejstvo izgubi.

Uvod

Mreža predstavlja skup čvorova i veza koje postoje između njih. Neke značajne veze u svakodnevnom životu mogu se okarakterisati kao mreže. Kao najtipičniji primer možemo uzeti internet, gde svaka stranica predstavlja čvor, a linkovi ka drugim stranicama veze između njih. Kao mrežu je moguće predstaviti i saradnju među glumcima, gde glumci predstavljaju čvorove, a veza između njih postoji ako su glumili u istom filmu. Na isti ili sličan način je moguće opisati još mnogo stvari iz svakodnevnog života. Da bi lakše opisale i objasnile pojave kod ovakvih mreža u svakodnevici, započeta su njihova detaljnija istraživanja. Prvobitno je smatrano da su realne mreže najbolje opisane random mrežama. To su mreže u kojima je svaka veza između dva čvora podjednako verovatna i svi čvorovi imaju (u srednjem) približno isti broj veza. Raznim istraživanjima

i proverom karakteristika realnih mreža uočene su bitne razlike između njih i random mreža. Ispostavilo se da je najveći broj realnih mreža u stvari scale-free (Albert i Barabasi 2002). Odlika prepoznavanja ovih mreža su preferencijalni čvorovi. To su čvorovi koji su najpopularniji, tj imaju najviše veza sa ostatkom mreže. Njih ima malo, pa se većina mreže sastoji od čvorova koji su povezani tek sa nekoliko veza i to najverovatnije sa nekim preferencijalnim čvorom. Pokazano je da zavisnost broja čvorova od njihovog broja veza, tj stepena čvora, stepeno opada, što se može videti na slici 1. Ovaj grafik je dobijen u našoj simulaciji.



Slika 1. Zavisnost broja čvorova od njihovog stepena (broj linkova tog čvora) za scale-free mreže.

Figure 1. Number of nodes dependence on their degrees (number of links of the node) for scale-free networks

U ovom radu smo generisali i ispitivali osobine Scale-free mreža za razne parametre i posmatrali kako se ponašaju pri njihovom rastu i evoluciji. Neki od posmatranih parametara su i clustering koeficijent, broj čija je vrednost između nula i jedan i opisuje povezanost čvorova u okolini jednog čvora, i

Miloš Srećković (1987), Šabac, Vojvode Mišića 1/4, učenik 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

MENTOR:
dr Aleksandar Belić, Institut za fiziku, Beograd

small-world koeficijent koji predstavlja koliko je najmanje koraka potrebno da se dođe od jednog do bilo kog drugog čvora.

Jedan od načina za generisanje, a koji smo i mi koristili, je Barabaši-Albert (BA) model (Albert *et al.* 1999). Ovaj model se definiše na sledeći način: krećući se od malog broja random povezanih čvorova n_0 sa verovatnoćom povezanosti p_0 , u svakom koraku dodajemo čvor sa $m(\leq n_0)$ novih veza (koje će biti povezane sa čvorovima koji su već prisutni u sistemu).

Prilikom biranja sa kojim starim čvorom će da se poveže novi čvor, podrazumevamo da će verovatnoća vezivanja $P(k_i)$ za taj čvor i zavisiti od koeficijenta povezanosti k_i kao u formuli (1).

$$P(k_i) = k_i / \sum_j k_j \quad (1)$$

Posle t koraka dobijamo mrežu sa $N = tm + n_0$ čvorova. Tokom vremena, početna random mreža evoluira u Scale-free mrežu. Kod ovako generisanih mreža distribucija broja čvorova od njihovog stepena se ponaša kao stepeno opadajuća funkcija sa koeficijentom $\gamma = 3$ (Albert *et al.* 1999).

Simulacija

U simulaciji je svaki čvor u mreži numerisan rednim brojem. Mreža je predstavljena kao matrica veličine $N \cdot N$ gde je N broj čvorova. Svako polje sadrži informaciju da li su čvorovi, pod rednim brojem koordinata tog polja, povezani ili ne. Pošto veze nisu usmerene, informacije u poljima $P[i][j]$ i $P[j][i]$ su identične. Zbog toga je korišćena trougaona matrica koja zauzima duplo manje memorije.

Prilikom startovanja simulacije generiše se random mreže, po uzoru na BA model, veličine i verovatnoće povezanosti prema ulaznim podacima. Naredni korak je dodavanje čvorova, takođe po uzoru na BA model. U toku simulacije moguće je izračunati sledeće karakteristike mreže:

1. **clustering koeficijent:** za jedan čvor, koeficijent se računa tako što se zapišu svi njegovi susedi, ne računajući sam čvor. Zatim se prebroje sve veze među njima i to se podeli sa brojem veza potpuno povezane mreže. Postupak se ponovi za sve čvorove i rezultat se usrednji. Dobijeni broj se smatra clustering koeficijentom;

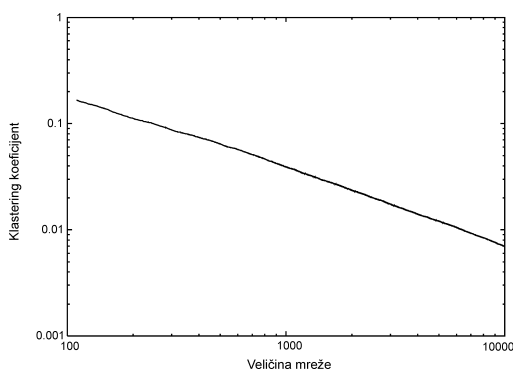
2. **srednje rastojanje između dva čvora,** poluprečnik mreže, ili small-world koeficijent: za jedan čvor odredimo najkraće puteve do svih ostalih čvorova. Zatim ta rastojanja usrednjimo. Isto postupimo sa svim čvorovima. Srednje udaljenosti računane za sve čvorove ponovo usrednjimo. Dobijeno rastojanje predstavlja small world koeficijent mreže. Način na koji je on računat u ovoj simulaciji je sledeći:

- izbere se bilo koji čvor i njegova vrednost se postavi na 0
- svi njegovi susedi se postave na 1
- rekurzivno se na dalje čvorovi obeležavaju sa 2, 3, 4... , dok se ne dođe do kraja
- prilikom upisivanja indeksa svakog čvora broji se koliko ih ima brojačima k_1, k_2, k_3, \dots
- zatim se izračuna srednje rastojanje za taj čvor formulom $(k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 + \dots) / (k_1 + k_2 + k_3 + \dots)$
- ceo postupak se ponovi za sve čvorove i usrednji se.

Takođe je moguće se u toku simulacije u fajl ispiše trenutna distribucija broja čvorova po njihovom stepenu.

Rezultati

Prva ispitivana osobina je bila clustering koeficijent. Ispitali smo zavisnost od veličine mreže, odnosno kako se clustering koeficijent menja tokom rasta i evolucije mreže. Slika 2 prikazuje tu zavisnost za početne vrednosti $m = 5$, $n_0 = 10$ i $p_0 = 0.5$.



Slika 2. Zavisnost clustering koeficijenta od veličine mreže

Figure 2. Clustering coefficient dependence on the network scale

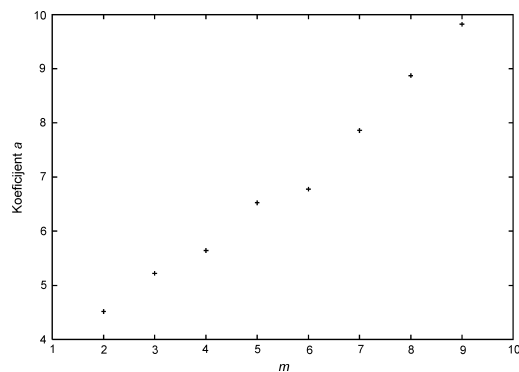
Primećuje se da je ova zavisnost linearna na log-log grafiku iz čega zaključujemo da je zavisnost stepena. Iz tog razloga smo fitovali na funkciju (Albert i Barabasi 2002):

$$f(x) = a + b x^{-c} \quad (2)$$

Vrednost koeficijenta a koja se dobija fitovanjem je približna nuli sa greškom nekoliko puta većom od same vrednosti. Iz toga smo zaključili da ova zavisnost teži nuli kada veličina mreže teži beskonačnosti. Modifikovali smo funkciju na koju se fituje dati grafik u

$$f(x) = a x^{-b} \quad (3)$$

Menjali smo broj linkova koji se dodaju pri svakom dodavanju noda i posmatrali kako se menjaju koeficijenti a i b . To se može videti na slikama 3 i 4.



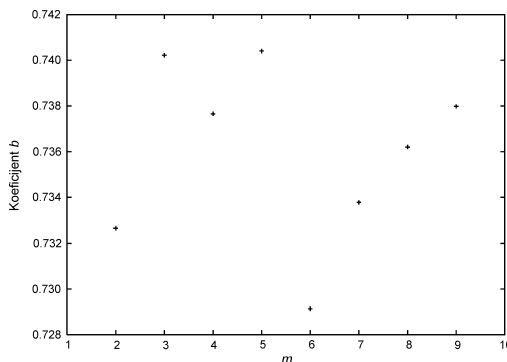
Slika 3.
Zavisnost koeficijenta a iz formule (3) od m za $n_0 = 10$ i $p_0 = 0.5$

Figure 3.
Coefficient a in formule (3) dependence on m for $n_0 = 10$ and $p_0 = 0.5$

Na slici 3 se primećuje da koeficijent a linearno raste. On je skalar, pa njegovim povećavanjem dobijamo samo uvećane brojeke na grafiku datom na slici 2 bez značajnijih promena oblika same funkcije. To znači da povećavanjem vrednosti ulaznog parametara m , možemo linearno povećavati i sam clustering koeficijent.

Objašnjenje ove osobine sastoji se u tome što povećavanjem parametra m , koji predstavlja broj veza kojim se vezuju novi čvorovi za stare, povećava-

vamo i srednji broj veza po čvoru. Koeficijent b nema uočljivu zavisnost, pa pretpostavljamo da je on konstantan za svako ispitano m . Ovaj koeficijent predstavlja stepen opadanja, tj. od njega zavisi kojom brzinom će se smanjivati vrednost clustering koeficijenta. Zaključujemo da parametar m ne utiče na sam oblik opadajuće zavisnosti prikazane na slici 2.



Slika 4.
Zavisnost koeficijenta b iz formule (3) od m za $n_0 = 10$ i $p_0 = 0.5$

Figure 4.
Coefficient b in Equation (3) dependence on m , for $n_0 = 10$ and $p_0 = 0.5$

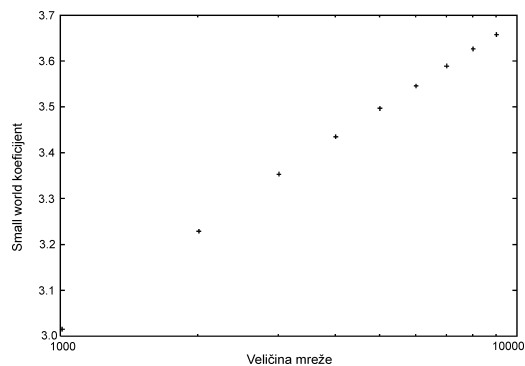
Druga ispitivana osobina je small-world koeficijent. Posmatrali smo njegovu vrednost takođe u zavisnosti od veličine mreže. Slikom 5 je predstavljena ta zavisnost za sledeće početne parametre: $m = 5$, $n_0 = 10$ i $p_0 = 0.5$.

Na log-lin grafiku se primećuje linearna zavisnost iz čega zaključujemo da je zavisnost logaritamski rastuća. Fitovali smo je na funkciju (Albert i Barabasi 2002):

$$f(x) = a + b \log x \quad (4)$$

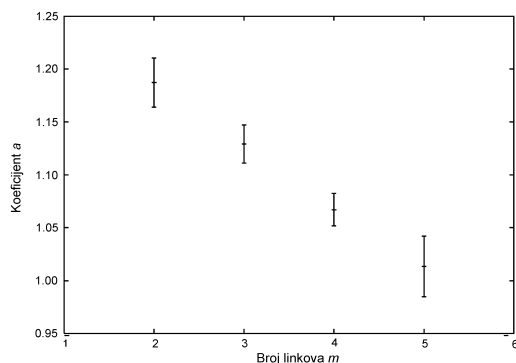
I u ovom slučaju nas je takođe interesovala zavisnost koeficijenata a i b od parametra m . Te zavisnosti su prikazane na graficima 6 i 7.

Koeficijent a u ovom slučaju predstavlja kolika je teorijska vrednost small-world koeficijenta kada bi veličina mreže bila nula. Ta veličina naravno nema realni smisao, ali je zanimljivo primetiti da se i ona ponaša prilično pravilno i da linearno opada sa povećanjem vrednosti parametra m .



Slika 5.
Zavisnost small-world koeficijenta od veličine mreže.

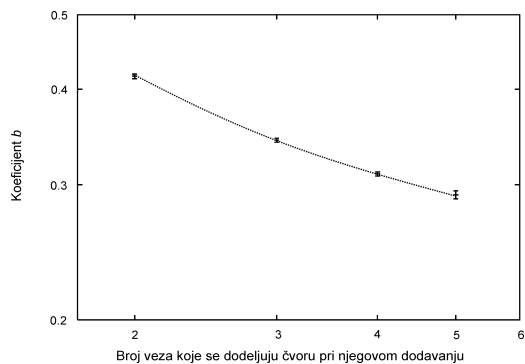
Figure 5.
Small-world coefficient dependence on the network scale



Slika 6.
Zavisnost koeficijenta a iz funkcije (4) od broja m za $n_0 = 10$ i $p_0 = 0.5$

Figure 6.
Coefficient in Formula (4) dependence on m , for $n_0 = 10$ i $p_0 = 0.5$

Koeficijent b je skalar grafika na slici 5. To znači da su vrednosti linearno zavisne od njega, ali da sam oblik tog grafika nije. Kao i koeficijent a tako i koeficijent b opadajuća, ali stepena funkcija. Objašnjenje ovakvog ponašanja ove funkcije se svodi na isto kao i kod clustering koeficijenta. Povećavanjem parametra m se povećava sama koncentracija veza među čvorovima, pa se put između dva čvora smanjuje.



Slika 7.
Zavisnost koeficijenta b iz funkcije (4) od broja m za $n_0 = 10$ i $p_0 = 0.5$

Figure 7.
Coefficient b in function (4) dependence on m , for $n_0 = 10$ and $p_0 = 0.5$

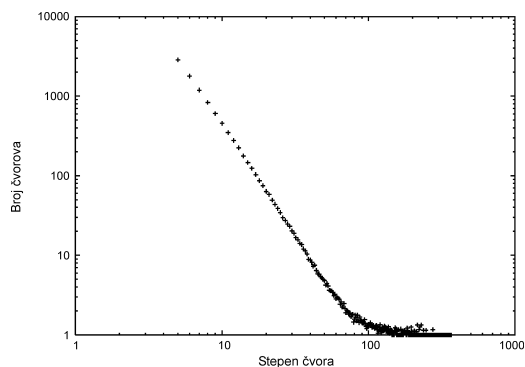


Figure 8.
Distribucija broja čvorova po njihovom stepenu

Figure 8.
Distribution of the number of nodes by their degree

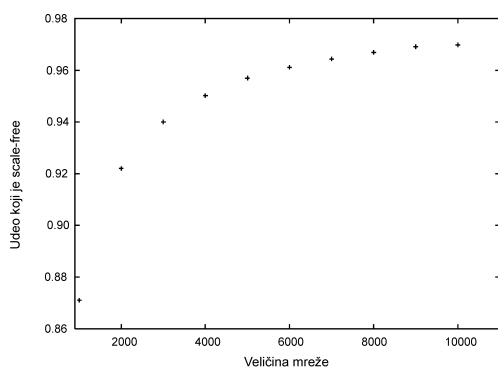
Jedna od glavnih osobina scale-free mreža je stepeno opadajuća zavisnost distribucije broja čvorova od njihovog stepena. Slika 8 predstavlja upravo tu distribuciju za parametre $m = 5$, $n_0 = 10$ i $p_0 = 0.5$ i $n = 10000$.

Na grafiku se primećuje odstupanje od predviđene stepene zavisnosti za velike stepene čvora. To se može objasniti ostacima početnih uslova. Prilikom generisanja početne random mreže mi postavljamo

određeni broj veza između početnih čvorova. Prilikom dodavanja novih čvorova, ovi početni imaju veliku šansu da budu izabrani da se na njih prikači novi čvor. Što dalje ponovo povećava šansu kod novo dolazećih čvorova, i tako u krug. Čvorovi koji dolaze se ponašaju kao scale-free, ali početni ne. Zato smo ispitali koliko novih čvorova je potrebno da se doda da bi početni uslovi izgubili značaj.

Da bi smo to odredili posmatrali smo koliki se udeo čvorova može smatrati scale-free u zavisnosti od veličine mreže. To direktno znači prebrojavanje broja čvorova koji imaju stepen određene vrednosti ili veći. Zbog preciznosti simulaciju smo puštali sa istim parametrima 100 puta i pamtili distribucije broja čvorova od njihovog stepena na svakih 1000 dodavanja.

Posle smo izračunali srednju vrednost za sto ponavljanja za svaku veličinu mreže do 10000. Vizuelno smo odredili gde je granica scale-free dela i podelili sa ukupnim brojem čvorova u tom delu. Postupak smo ponovili za sve grafike od 1000 do 10000. Dobljena zavisnost je data na slici 9 za parametre $m = 5$, $n_0 = 10$ i $p_0 = 0.5$.



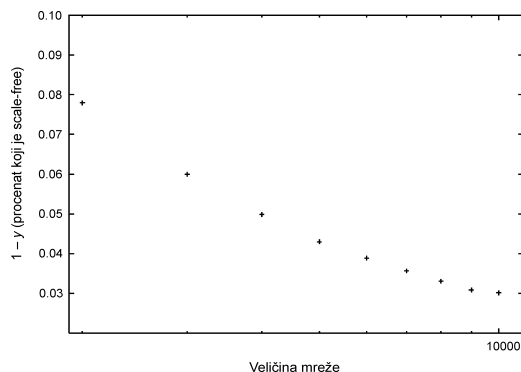
Slika 9. Zavisnost udela scale-free dela mreže od njene veličine

Figure 9. Portion of the scale-free part of the network dependence on its size

Ova zavisnost za $n = 8$ teži jedinici. Kada iste ove rezultate prikažemo tako što y oduzmemo od 1, i stavimo log-log skalu, dobijamo linearanu zavisnost. To je prikazano na slici 10.

Ovu zavisnost smo fitovali na

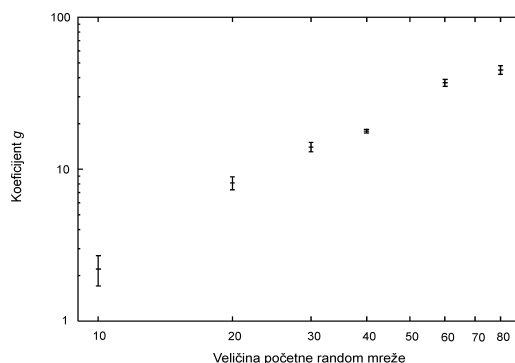
$$f(x) = 1 - (x/a)^{-b} \quad (5)$$



Slika 10. Zavisnost udela "ne scale-free" dela mreže od njene veličine

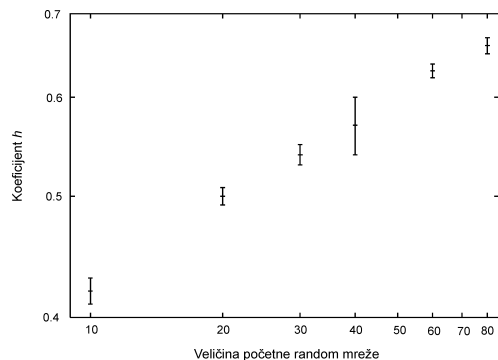
Figure 10. Portion of the "non-scale-free" part of the network, dependence on its size

Koeficijent a je skalar grafika, a koeficijent b predstavlja brzinu kojom grafik teži nuli. Na slikama 10 i 11 se može primetiti da broj čvorova koji nisu u "scale-free" delu, tokom povećavanja iteracija teži nuli. To je znak da ako dovoljno dugo budemo povećavali našu mrežu, taj deo će postati beznačajan, ali će uvek postojati. Da bi smo videli kako se ponašaju koeficijenti fita pri raznim vrednostima ulaznih parametara menjali smo veličinu početne random mreže i dobili zavisnost parametara a i b od veličine početne random mreže n_0 (slike 11 i 12).



Slika 11. Zavisnost koeficijenta a iz formule (5) od veličine početne random mreže.

Figure 11. Coefficient a in formula (5) dependence on the size of the starting random network



Slika 12. Zavisnost koeficijenta b iz formule (5) od veličine početne random mreže

Figure 12. Coefficient b in formula (5) dependence on the size of the starting random network

Sa slika 11 i 12 se može uočiti da i skalar i stepen grafika na slici 10 stepeno rastu sa povećanjem početne random mreže. Iz ovoga zaključujemo da ako želimo da sa što manje iteracija dobijemo scale-free mrežu, potrebno je staviti kao početni parametar što manju random mrežu. To takođe sledi iz činjenice da prilikom generisanja velikih random mreža, svaki njihov čvor ima u proseku duplo manje veza nego što je sama veličina mreže, za $p_0 = 0.5$, tako da prilikom dodavanja sledećih čvorova svi će se vezivati za njih, a ne za one koji su tek dodati. Što je mreža veća, efekat je izraženiji.

Zaključak

U radu je opisan i ispitivan uticaj početnih uslova na mrežu. Iz priloženih rezultata možemo zaključiti da ako napravimo dovoljno veliku mrežu, početnih par tačaka se može zanemariti uz veoma malu grešku, ali će njihov trag uvek ostati. Takođe je pokazano da sa što manjim početnim random mrežama dobijamo manji trag početnih uslova.

Takođe je ispitano ponašanje smallworld i clustering koeficijenta od početnih uslova. Dobijeno je da oba koeficijenta zavise od broja veza koji se dodaju prilikom svakog dodavanja novog čvora.

Ovaj rad ima puno mesta za proširivanje. Moguće je ispitati i zavisnost memorijskog efekta od parametra m , kao i clustering i small-world koeficijenta

od veličine početne random mreže. Takođe je moguće varirati parametar p_0 koji je bio konstantan. U ceo sistem je moguće dodati mogućnost da parametar m ne bude konstantan nego da varira po određenom pravilu, kao i da nova veza ne mora da bude samo između novog i starog čvora, nego i između dva stara.

Zahvalnost. Zahvaljujem se svom mentoru Dr Aleksandru Beliću koji mi je predložio temu za rad i usmeravao istraživanje na pravi put. Takođe se zahvaljujem Istraživačkoj stanici Petnica što mi već drugi put omogućava i pomaže u izradi projekta.

Literatura

Albert and R., Barabasi A.-L. 2002. Statistical Mechanics of Complex Networks. *Reviews of Modern Physics*, **74**: 47.

Albert R., Jeong H., and Barabasi A.-L. 1999. The diameter of the world wide web, *Nature*, **401**: 130.

Miloš Srećković

The Characteristics of Scale-free Networks Generated According to the Barabaši-Albert Model

A large number of phenomena from everyday life can be described using models of networks. It used to be considered that real networks are best described using random networks, however, major differences were noticed when their characteristics were compared. It turned out that most real networks behave similarly to scale-free networks.

In this paper the properties of scale-free networks generated according to the Barabasi-Albert (BA) model (Albert and Barabasi 2002) were examined. The dependence of the values of the clustering coefficient and the small-world coefficient from the initial parameters connected to the BA model was checked, and it was noticed that the initial parameters influence the graph of the number of nodes in respect of their number of links. Because of that, the time interval after which the initial parameters lose all significance was examined afterwards.

