

Parametri i podstrukture scale-free mreža

U ovom radu ispitivane su globalne i strukturne osobine scale-free mreža generisanih prema Barabaši-Albert modelu. Zavisnosti small world koeficijenta i klastering koeficijenta od veličine mreže su proširene na zavisnosti po parametru m . Pronađena je zavisnost broja pojavljivanja podstrukture veličine tri od veličine mreže i parametra m . Ispitana je uspešnost brojanja pojavljivanja podstrukture veličine tri po random i preferencijalno biranom podskupu čvorova kao heuristike za ocenu istih vrednosti na nivou cele mreže. Random odabir se pokazao kao jednostavniji, ali manje precizan metod. Za preferencijalni odabir uvedene su formule i koeficijenti pomoću kojih se može oceniti broj podstrukture veličine tri za $1 \leq m \leq 8$.

Uvod

Proučavanje kompleksnih mreža počelo je 50-ih godina prošlog veka, uporedo sa razvojem teorije grafova. Tokom druge polovine XX veka korišćena je najjednostavnija realizacija mreže, random mreža – Erdoš-Renji (ER) model. Random mreža predstavlja skup čvorova, kod kojih veza između svaka dva čvora postoji sa određenom verovatnoćom.

Ako posmatramo broj veza koje čvor poseduje – k (stepen čvora) i broj čvorova stepena k , možemo odrediti raspodelu povezanosti. Raspodela povezanosti predstavlja verovatnoću $P(k)$ da proizvoljan čvor u mreži bude stepena k , odnosno da ima k veza. Kod ER modela raspodela povezanosti $P(k)$ je Poasonova.

Pred sam kraj XX veka, od 1999. godine, istraživanja su pokazala da raspodele povezanosti realnih mreža, kao što su World Wide Web, Internet, metaboličke mreže itd. (Reka i Barabasi 2000), prate stepeni zakon,

$$P(k) \sim k^{-\gamma}.$$

Ovakve mreže su nazvane scale-free (SF) mreže. Njihova karakteristika je veliki broj čvorova malog stepena i mali broj čvorova velikog

*Marina Radulaški
(1986), Ljube
Stojanovića 38A,
učenica 4. razreda
Matematičke gimnazije
u Beogradu*

*MENTOR:
Dr Aleksandar Belić,
Laboratorija za
primenu računara u
nauci, Institut za fiziku,
Beograd*

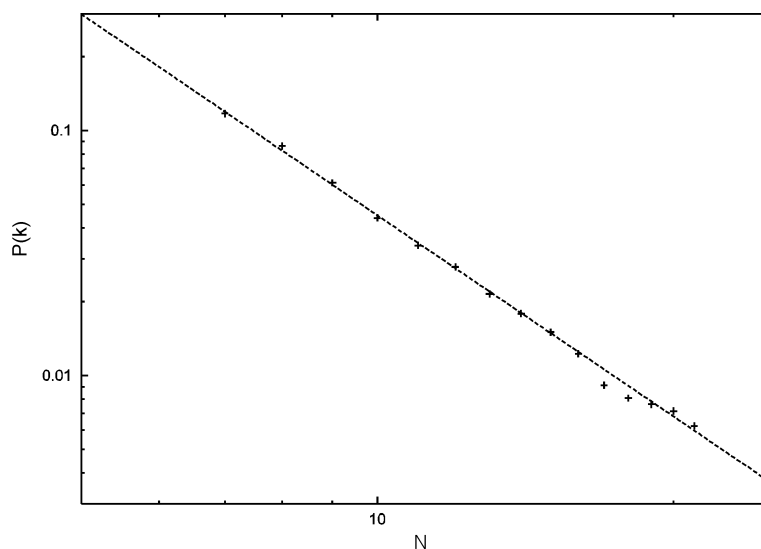
stepena. Scale-free mreže se pokazuju kao vrlo uspešne u modeliranju društvenih, bioloških, infrastrukturnih i mnogih drugih mreža.

U ovom radu ispitivali smo globalne i strukturne osobine scale-free mreža.

Generisanje scale-free mreže i njeni parametri

Rad na scale-free mrežama počeli smo generisanjem mreže sa stepenom raspodelom povezanosti koristeći Barabaši-Albert (BA) model (Reka i Barabasi 2000). Prema ovom modelu generisanje SF mreže počinje sa malom random mrežom, na koju se preferencijalno dodaju novi čvorovi.

Random mrežu generišemo tako što n_0 čvorova povežemo međusobno sa verovatnoćom p , odnosno verovatnoća povezivanja svaka dva od datih n_0 čvorova je jednaka p . Zatim u svakom sledećem trenutku u mrežu uvodimo po jedan novi čvor, tako da je u trenutku t veličina mreže jednaka $n_0 + t$. Svaki novi čvor se povezuje sa tačno m već postojećih čvorova, dakle, broj veza se u svakom trenutku povećava za m . Povezivanje se vrši preferencijalno, što znači da je verovatnoća povezivanja sa k -tim čvorom proporcionalna njegovom stepenu s_k (tj. broju veza sa drugim čvorovima) i iznosi $s_k / \sum_i s_i$, gde je $\sum_i s_i$ zbir stepeni svih čvorova u trenutnoj mreži. Preferencijalnim povezivanjem novih čvorova mreža dobija scale-free raspodelu povezanosti $P(k) \sim k^{-\gamma}$. (slika 1). Vrednosti koeficijenta γ koje smo dobili u generisanim mrežama pripadaju intervalu (2.50, 2.85). Inače, većina realnih scale-free mreža ima vrednost koeficijenta γ u intervalu (2, 3].



Slika 1.

Log-log grafik raspodele povezanosti $P(k)$ na generisanoj scale-free mreži veličine $n = 5.010$, ostali parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 5$. Prikazana je i fitovana funkcija $y = c x^{-\gamma}$, $c = 24.6(6)$, $\gamma = 2.74(2)$.

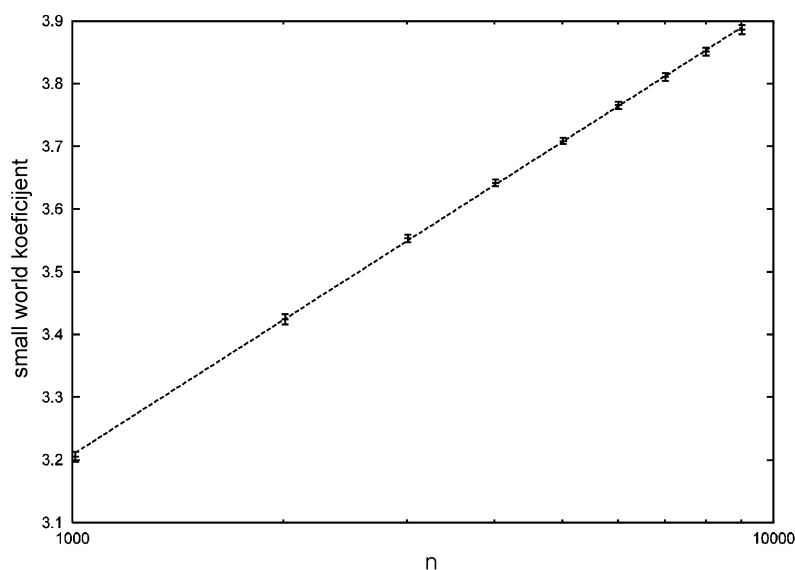
Figure 1.

Scale-free degree distribution $P(k)$ fitted to the function $y = c x^{-\gamma}$ is shown on log-log plot, $c = 24.6(6)$, $\gamma = 2.74(2)$. The network size is $n = 5.010$, other parameters are $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 5$.

Rastojanje između dva čvora u mreži predstavlja najmanji broj koraka (prelazaka sa čvora na čvor) potrebnih da bi se stiglo od jednog do drugog čvora. Čvorovi čije je međusobno rastojanje jedan, nazivaju se susjedni čvorovi.

Srednje rastojanje između dva čvora u mreži nazivamo poluprečnik mreže ili small world koeficijent. Zavisnost small world koeficijenta od veličine mreže je logaritamska (Reka i Barabasi 2000) (slika 2) i može se fitovati na funkciju $y = a_r + b_r \ln x$.

Sve dobro povezane mreže se odlikuju malom vrednošću small-world koeficijenta. Primer takvih mreža je mreža ljudskih poznanstava (Manna



Slika 2.
Zavisnost small world koeficijenta od veličine mreže, fitovana na funkciju $y = a_r + b_r \ln x$, $a_r = 1.07(2)$, $b_r = 0.310(2)$. Parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 4$, a vrednosti su dobijene usrednjavanjem rezultata sa četiri različite mreže.

Figure 2.
Small world coefficient dependence on the network size fitted to the function $y = a_r + b_r \ln x$, $a_r = 1.07(2)$, $b_r = 0.310(2)$. Network parameters are $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 4$. Data on the plot are mean values obtained on four different networks.

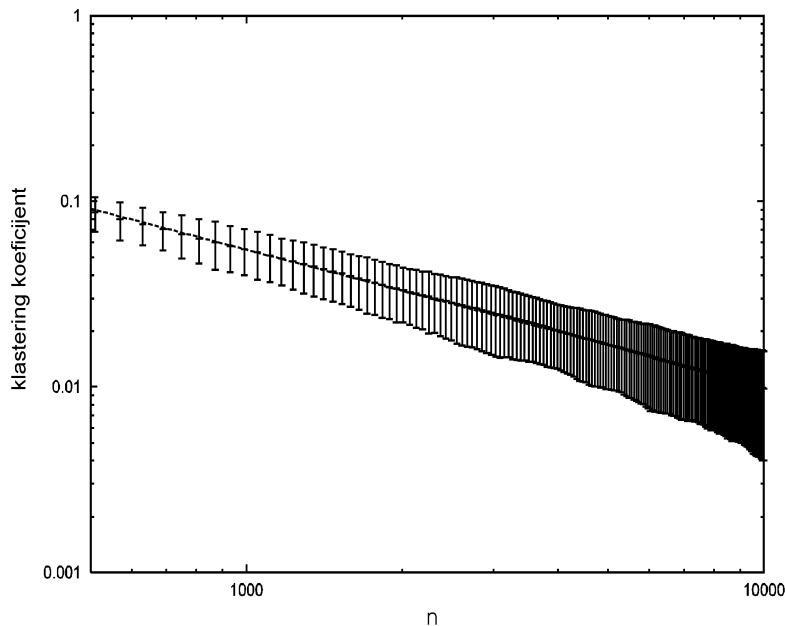
2003), u kojoj su ljudi predstavljeni čvorovima, a njihova poznanstva veza-ma između čvorova. Poluprečnik ove mreže (grubo) iznosi šest, odnosno, u proseku, bilo koja dva čoveka na svetu su 'šest poznanika daleko'.

Još jedan od značajnih globalnih parametara mreže je klastering koeficijent i , kao što ime nagoveštava, govori o klasterisanosti, odnosno, stepenu grupisanosti mreže. Klastering koeficijent se računa kao srednji odnos broja postojećih i broja mogućih veza među prvim susedima svakog

čvora, a računa se pomoću izraza $\frac{1}{n} \frac{t_i}{s_i (s_i - 1)}$, gde je n broj čvorova

u mreži, s_i stepen i -tog čvora, a t_i broj veza među susedima i -tog čvora, odnosno broj 'trouglova'* u kojima je sadržan i -ti čvor. Vrednost klastering koeficijenta stepeno opada sa povećanjem broja čvorova u mreži (Reka i Barabasi 2000) i stoga smo je fitovali na funkciju $y = a_c x^{b_c}$ (slika 3).

* Preciznije o pojmu "trougao" u sledećem poglavlju



Slika 3.
Log-log grafik zavisnosti klastering koeficijenta od veličine mreže, fitovane na $y = a_c x^{-b_c}$, $a_c = 8.87(2)$, $b_c = 0.7362(2)$. Parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 8$, a vrednosti su dobijene usrednjavanjem rezultata sa deset različitih mreža.

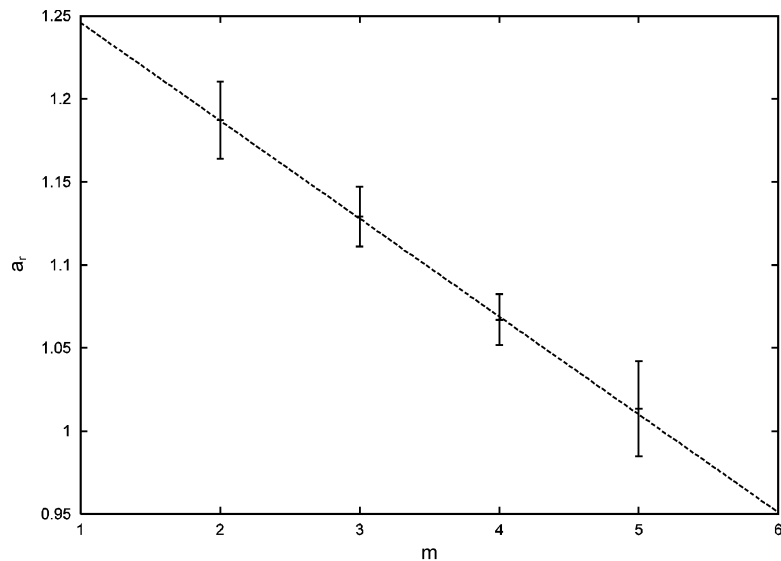
Figure 3.
Clustering coefficient dependence on the network size fitted to the function $y = a_c x^{-b_c}$ is shown on log-log plot, $a_c = 8.87(2)$, $b_c = 0.7362(2)$. Network parameters are $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 8$. Data on the plot are mean values obtained on ten different networks.

Broj veza m koje se dodeljuju novom čvoru pri uvođenju u mrežu utiče na povezanost čvorova u vezi, a samim tim i na njihovo srednje rastojanje – poluprečnik, kao i na klastering koeficijent. Zato su koeficijenti a_r , b_r , a_c i b_c iz prethodnih funkcija zavisni od broja veza m novog čvora pri uvođenju u mrežu.

Pri razmatranju zavisnosti koeficijenata od m isključujemo slučaj $m = 1$, zbog njene osobine da se pri dodavanju novih čvorova u mrežu, za razliku od slučajeva kada je $m \geq 2$, ne mogu napraviti zatvorene putanje, odnosno konture, što dalje ima specifičan uticaj na vrednosti poluprečnika i klastering koeficijenta.

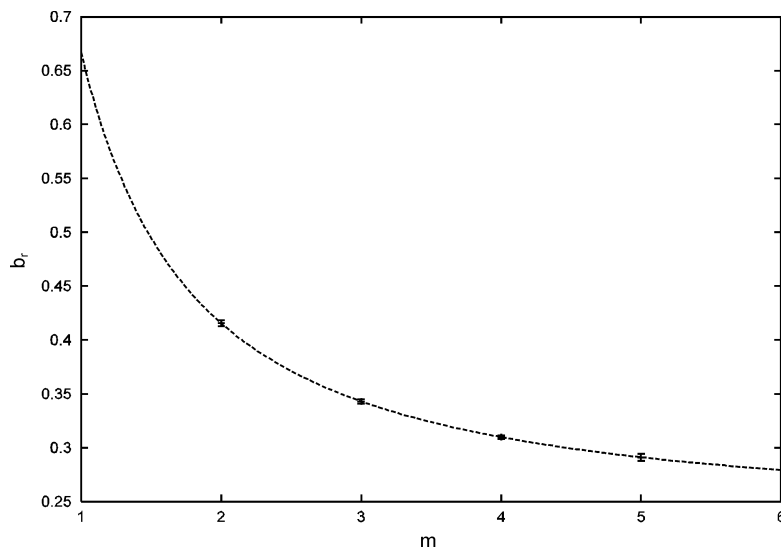
Kada, pri istoj veličini mreže, povećavamo m , mreža postaje povezanija, stoga postaje lakše stići od jednog čvora do drugog, pa se poluprečnik mreže smanjuje. To nam pokazuju i koeficijenti zavisnosti poluprečnika od veličine mreže, čije vrednosti monotono opadaju sa povećanjem vrednosti m . Zavisnost koeficijenta $a_r(m)$ najbolje fituje na linearnu funkciju $y = a_{r1} - a_{r2}x$ (slika 4), a $b_r(m)$ na stepenu funkciju $y = b_{r1} + b_{r2}x^{-b_{r3}}$ (slika 5).

Vrednost klastering koeficijenta za istu veličinu mreže raste sa povećanjem vrednosti m . Ipak, nagib grafika zavisnosti klastering koeficijenta od vrednosti mreže se može smatrati istim za sve m . Zato vrednost koeficijenta a_c raste sa povećanjem vrednosti m , pa smo zavisnost $a_c(m)$ fitovali na eksponencijalnu funkciju $y = a_{c1} e^{a_{c2}x}$ (slika 6), dok se vrednost koeficijenta b_c može aproksimirati konstantom u odnosu na m (slika 7).



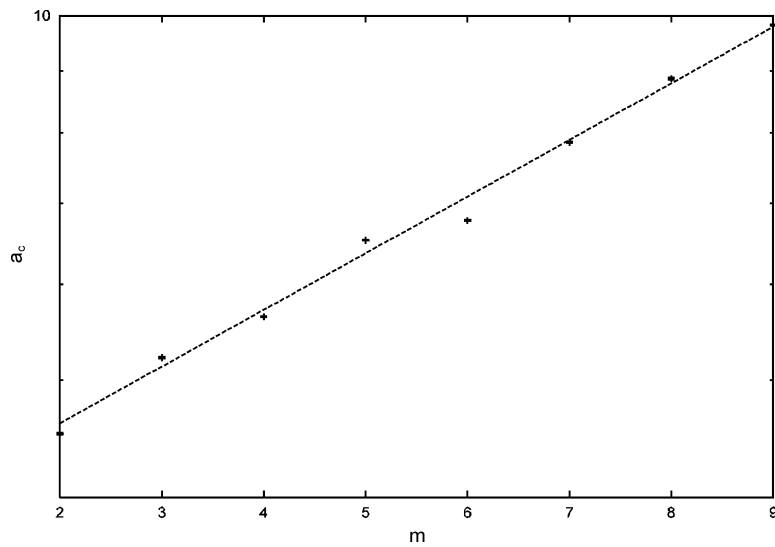
Slika 4. Zavisnost koeficijenta a_r od broja veza m novog čvora, fitovana na linearnu funkciju $y = a_{r1} - a_{r2}x$, $a_{r1} = 1.305(5)$, $a_{r2} = 0.059(2)$.

Figure 4. m -dependence of a_r coefficient fitted to the function $y = a_{r1} - a_{r2}x$, $a_{r1} = 1.305(5)$, $a_{r2} = 0.059(2)$.



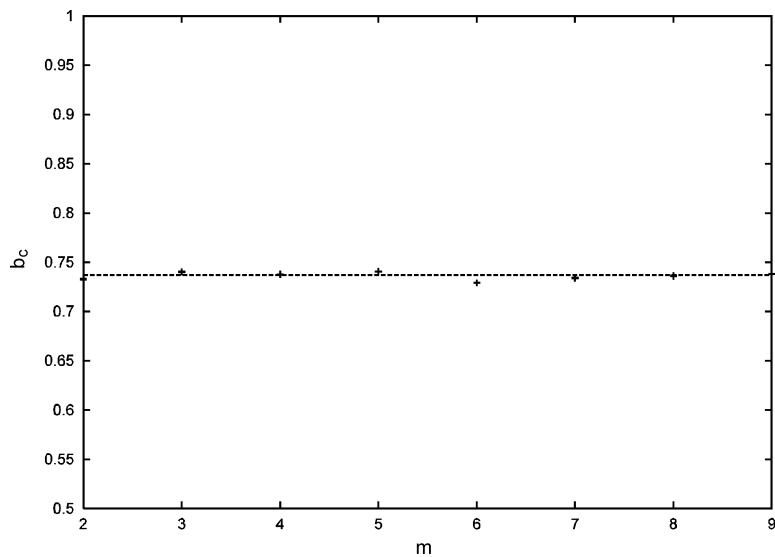
Slika 5. Zavisnost koeficijenta b_r od broja veza m novog čvora, fitovana na funkciju $y = b_{r1} + b_{r2}x^{-b_{r3}}$, $b_{r1} = 0.233(2)$, $b_{r2} = 0.434(3)$, $b_{r3} = 1.25(2)$.

Figure 5. m -dependence of b_r coefficient fitted to the function $y = b_{r1} + b_{r2}x^{-b_{r3}}$, $b_{r1} = 0.233(2)$, $b_{r2} = 0.434(3)$, $b_{r3} = 1.25(2)$.



Slika 6. Semilog grafik zavisnosti koeficijenta a_c od broja veza m novog čvora, fitovane na funkciju $y = a_{c1} e^{a_{c2}x}$, $a_{c1} = 3.7(1)$, $a_{c2} = 0.108(5)$.

Figure 6. m -dependence of a_c coefficient fitted to the function $y = a_{c1} e^{a_{c2}x}$ is shown on semilog plot, $a_{c1} = 3.7(1)$, $a_{c2} = 0.108(5)$.



Slika 7. Zavisnost koeficijenta b_c od broja veza m novog čvora, fitovana na konstantnu funkciju – dobijena vrednost je $b_c = 0.737(2)$.

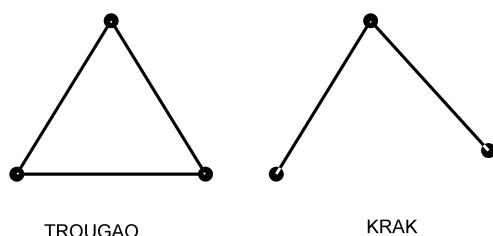
Figure 7. m -dependence of b_c fitted to the constant function – obtained value is $b_c = 0.737(2)$.

Podstrukture scale-free mreže

U prethodnom poglavlju smo ispitivali globalne karakteristike mreža, a sada ćemo se okrenuti ka strukturnom sastavu. Povezane podskupove čvorova* mreže nazivamo podstrukturama i one karakterišu mrežu na lokalnom nivou.

U ispitivanju strukturnog sastava scale-free mreža ograničili smo se na podstrukture sastavljene od tri čvora. S obzirom da svi čvorovi u podstrukтури moraju biti povezani (direktno ili indirektno) – postoje dva oblika podstrukture veličine tri. Zvaćemo ih 'trougao' i 'krak' (slika 8).

* Za svaka dva čvora iz podskupa postoji direktan ili indirektan put koji ih povezuje



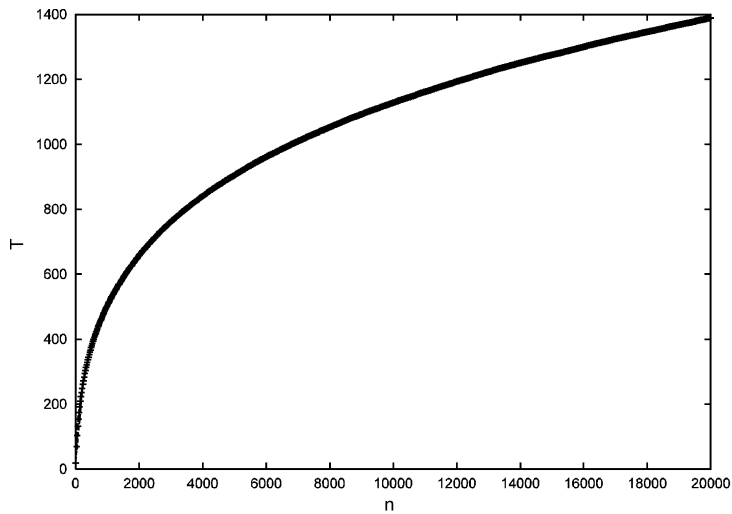
Slika 8.
Vrste podstrukture veličine tri.

Figure 8.
Types of three-sized substructures – triangle and arc.

Zavisnost broja pojavljivanja trouglova T od veličine mreže n smo fitovali na funkciju $y = a_t (\ln x)^{b_t}$ (slika 9), a zavisnost broja pojavljivanja krakova K od veličine mreže n na funkciju $y = a_k x \ln x$ (slika 10). Intuiciju za oblike ovih funkcija stekli smo pomoću rada Danila Sergija koji se bavi problematikom podstrukture na mrežama, koje za razliku od naših imaju usmerene (jednosmerne) veze (Sergi 2005).

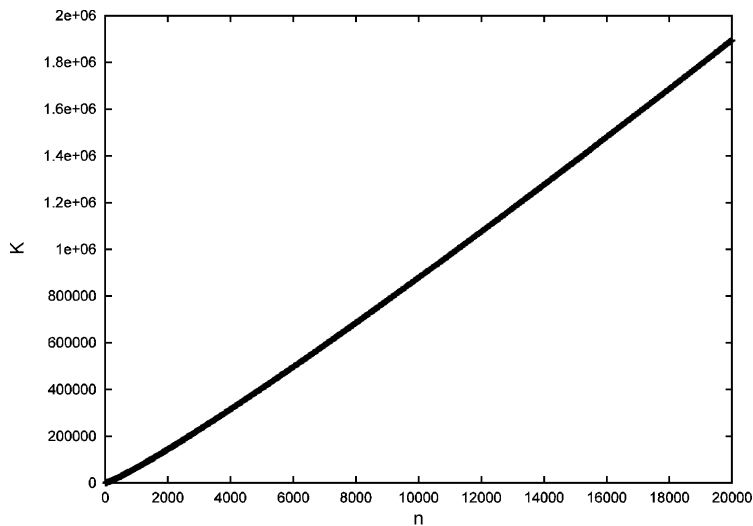
U slučaju $m = 1$, pri rastu mreže se ne dobijaju novi trouglovi, zato je vrednost broja trouglova T konstantna za svaku veličinu mreže i jednaka je broju trouglova u početnoj random mreži. Stoga je za slučaj $m = 1$ vrednost koeficijenta b_t jednaka nuli, a vrednost a_t nema svrhe određivati, jer potiče od random osobina početne mreže i nema nikakvog dodira sa preferencijalnim povezivanjem novih čvorova u mreži, odnosno scale-free konceptom.

Kada povećavamo broj veza m koje se dodeljuju novom čvoru, povećava se ukupan broj veza u mreži, a stoga i broj trouglova i krakova, pa zato postoji zavisnost koeficijenata iz prethodnih funkcija od broja veza m novog čvora. Zavisnost vrednosti koeficijenta $a_t(m)$ je fitovana na stepenu funkciju $y = a_{k1} + a_{t2} x^{a_{t3}}$ (slika 11), zavisnost $b_t(m)$ konvergira ka nekoj vrednosti, pa smo je zato fitovali na funkciju $y = b_{t1} (1 - x^{-b_{t2}})^{b_{t3}}$ (slika 12), dok smo zavisnost $a_k(m)$ fitovali na stepenu funkciju $y = a_{k1} + a_{k2} x^{a_{k3}}$ (slika 13).



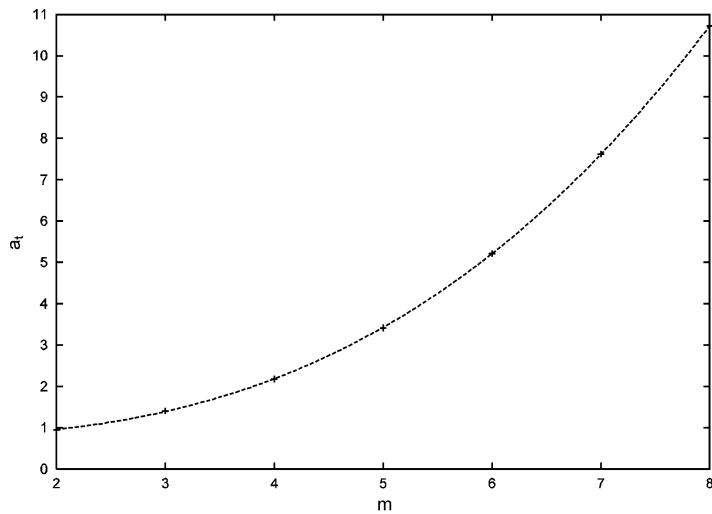
Slika 9. Zavisnost broja trouglova od veličine mreže, fitovana na funkciju $y = a_t (\ln x)^{b_t}$, $a_t = 2.1788(6)$, $b_t = 2.8152(2)$. Parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 4$; vrednosti su dobijene usrednjavanjem rezultata sa 100 različitih mreža.

Figure 9. Dependence of the number of triangles on the network size fitted to the function $y = a_t (\ln x)^{b_t}$, $a_t = 2.1788(6)$, $b_t = 2.8152(2)$. Network parameters are $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 4$. Data on the plot are mean values obtained on 100 different networks.



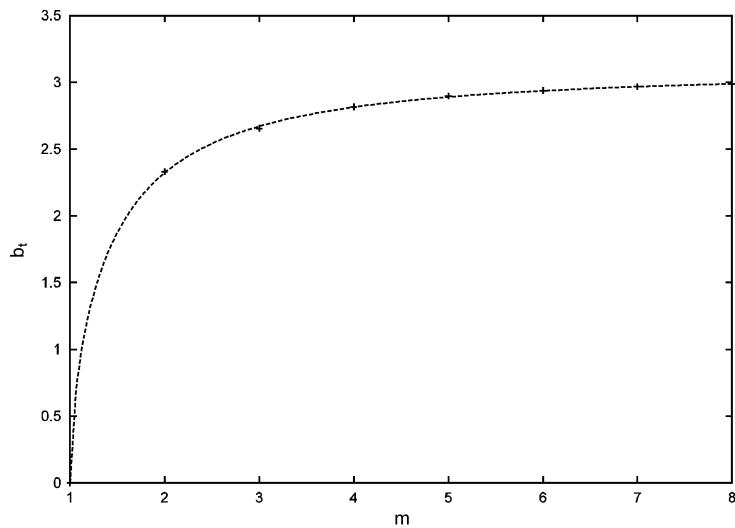
Slika 10. Zavisnost broja krakova od veličine mreže, fitovana na funkciju $y = a_k \ln x$, $a_k = 9.5289(3)$. Parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 4$, a vrednosti su dobijene usrednjavanjem rezultata sa 100 različitih mreža.

Figure 10. Dependence of the number of arcs on the network size fitted to the function $y = a_k \ln x$, $a_k = 9.5289(3)$. Network parameters are $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 4$. Data on the plot are mean values obtained on 100 different networks.



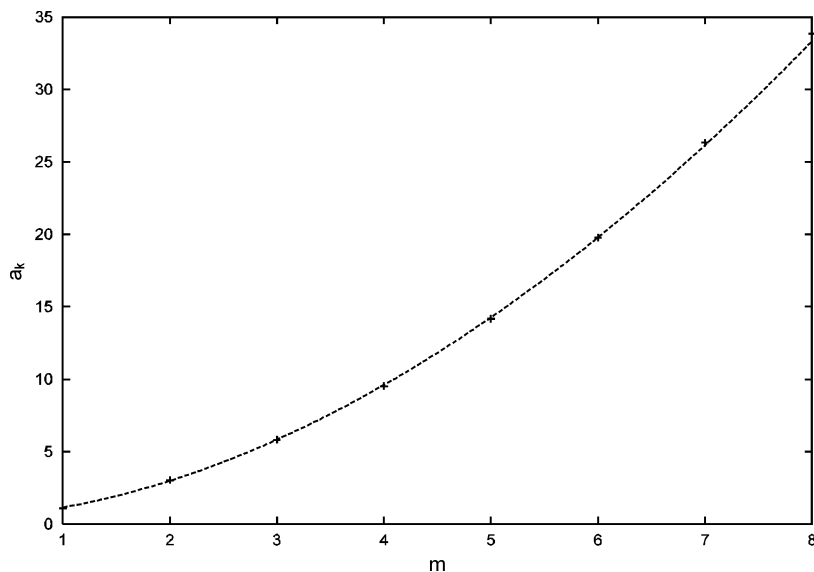
Slika 11. Zavisnost koeficijenta a_t od broja veza m novog čvora, fitovana na funkciju $y = a_{t1} + a_{t2} x^{a_{t3}}$, $a_{t1} = 0.75(1)$, $a_{t2} = 0.0295(8)$, $a_{t3} = 2.80(2)$.

Figure 11. m -dependence of a_t coefficient fitted to the function $y = a_{t1} + a_{t2} x^{a_{t3}}$, $a_{t1} = 0.75(1)$, $a_{t2} = 0.0295(8)$, $a_{t3} = 2.80(2)$.



Slika 12. Zavisnost koeficijenta b_t od broja veza m novog čvora, fitovana na funkciju $y = b_{t1} (1 - x^{-b_{t2}})^{b_{t3}}$, $b_{t1} = 3,10(2)$, $b_{t2} = 1.4(1)$, $b_{t3} = 0.59(5)$.

Figure 12. m -dependence of b_t coefficient fitted to the function $y = b_{t1} (1 - x^{-b_{t2}})^{b_{t3}}$, $b_{t1} = 3,10(2)$, $b_{t2} = 1.4(1)$, $b_{t3} = 0.59(5)$.



Slika 13.
Zavisnost koeficijenta a_k od broja veza m novog čvora, fitovana na funkciju
 $y = a_{k1} + a_{k2} x^{a_{k3}}$,
 $a_{k1} = 0.44(5)$,
 $a_{k2} = 0.71(2)$,
 $a_{k3} = 1.84(2)$.

Figure 13. m -dependence of a_k coefficient fitted to the function
 $y = a_{k1} + a_{k2} x^{a_{k3}}$,
 $a_{k1} = 0.44(5)$,
 $a_{k2} = 0.71(2)$,
 $a_{k3} = 1.84(2)$.

Heuristička ocena broja podstruktura u mreži

U prethodnom poglavlju smo određivali tačan broj pojavljivanja podstruktura veličine tri, u zavisnosti od parametara scale-free mreže: veličine mreže i broja veza koji se dodaju novom čvoru. Za to je bilo potrebno za svaki čvor i mreže prebrojati broj trouglova t_i i krakova k_i koje pravi sa drugim čvorovima, a zatim uračunati u ukupan zbir trouglova T , odnosno krakova K , po formulama:

$$T = \sum_{i=1} t_i / 3, \quad K = \sum_{i=1} k_i / 3.$$

Doprinosi $\frac{t_i}{3}$ i $\frac{k_i}{3}$ zbirovima T i K su trećine broja trouglova, odnosno krakova, koje formira čvor, jer se isti trougao, odnosno krak, uračunava tri puta – kod tri čvora koji ga čine.

Pitanje koje se postavlja (i na koje ćemo pokušati da damo odgovor) je: Da li možemo oceniti broj trouglova i krakova u scale-free mreži brojanjem i samo po određenim čvorovima? Time bismo uštedeli vreme, jer ne bismo pretraživali trouglove i krakove za sve, već samo za određeni procenat čvorova, što je značajna ušteda, pogotovo za mreže koje broje stotine hiljada čvorova, kao što su Internet ili World Wide Web.

Kada na mreži veličine n izaberemo određeni podskup S čvorova tako da je $\frac{|S|}{n} = q$ i za svaki od tih qn čvorova prebrojimo trouglove t_i i krakove

k_i koje prave sa drugim čvorovima možemo da izračunamo sledeće vrednosti:

$$T_q = \sum_{t \in S} \frac{t_i}{3}, \quad K_q = \sum_{k \in S} \frac{k_i}{3}.$$

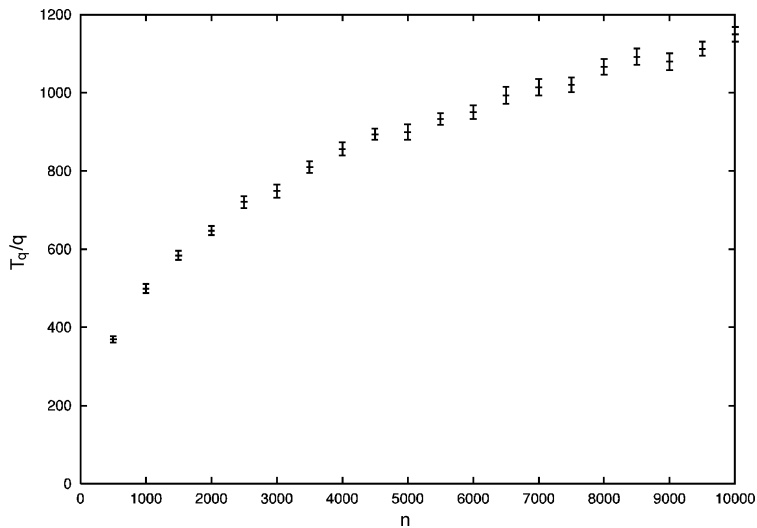
Po definiciji važi i $T = T_{100\%}$, $K = K_{100\%}$. Ono što nas interesuje jeste kako izgledaju odnosi $t_q = \frac{T_q}{T}$, $k_q = \frac{K_q}{K}$ i za razne mreže i različito izabrane podskupove S . S obzirom da su čvorovi u mreži različitog stepena, a samim tim imaju i različite vrednosti t_i i k_i , pomenuti odnosi zavise od načina odabira podskupa S .

Kada se podskup S bira slučajno (na random, sa verovatnoćom $1/n$ za svaki čvor) intuitivno važi $t_q = k_q = q$, što potvrđuju dobijeni rezultati. Na slikama 14 i 15 je jedan od primera koji pokazuje da se vrednost T_q/q , odnosno K_q/q , može koristiti kao ocena vrednosti T , odnosno K . Iako u većini slučajeva procena broja trouglova, odnosno krakova, odstupa od prave vrednosti za svega par procenata, postoje i slučajevi u kojima je odstupanje veće. U tabeli 1 dati su maksimalni procenti odstupanja T_q/q od T , odnosno K_q/q od K , za različite vrednosti q . Procene su rađene za mreže veličine do 10^4 čvorova sa vrednostima parametara mreže $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 1, 2, \dots, 8$. Vrednosti su dobijene usrednjavanjem 25 različitih rezultata, a njihove greške su zadate standardnom devijacijom.

Tabela 1. Maksimalno odstupanje ocena broja trouglova i krakova od prave vrednosti pri random odabiru dela čvorova, za razne procenat mreže q .

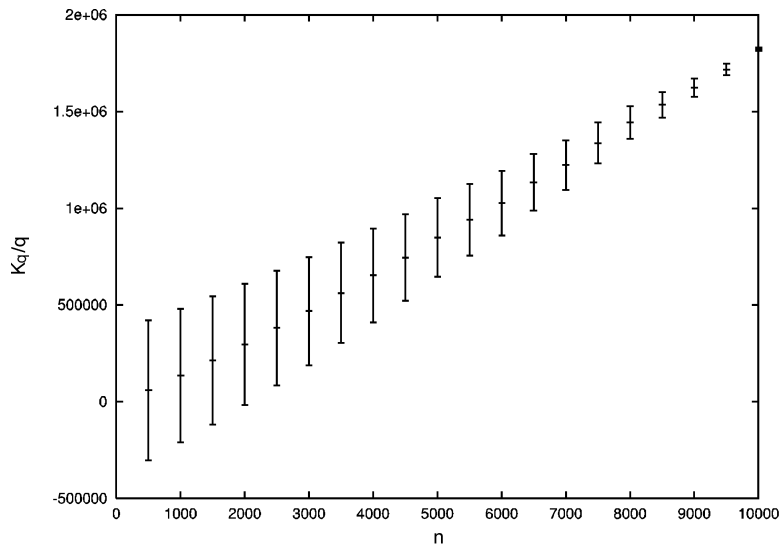
q	Odstupanje broja trouglova	Odstupanje broja krakova
20%	15%	10%
40%	10%	6%
60%	5%	5%
80%	4%	4%

Bolji pristup odabiru čvorova možemo da napravimo uzimajući u obzir scale-free raspodelu povezanosti čvorova. Podskup čvorova možemo da biramo preferencijalno, tj. verovatnoća da čvor bude uključen u podskup nije više $1/n$, kao u random slučaju, nego proporcionalna stepenu čvora s_i . Pri preferencijalnom odabiru nije više očigledno kolike su vrednosti t_q i k_q , stoga smo pokušali da ih odredimo.



Slika 14. Zavisnost vrednosti T_q / q za random izabranih $q = 80\%$ mreže od veličine mreže. Prikazana je i egzaktna zavisnost $T(n)$. Parametri mreže: $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 4$; vrednosti T_q su dobijene usrednjavanjem rezultata sa 25 različitih mreža.

Figure 14. T_q / q dependence on network size, for $q = 80\%$ randomly chosen nodes, is shown on the plot, as well as exact dependence $T(n)$. Network parameters are $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 4$. T_q values are mean values obtained on 25 different networks.



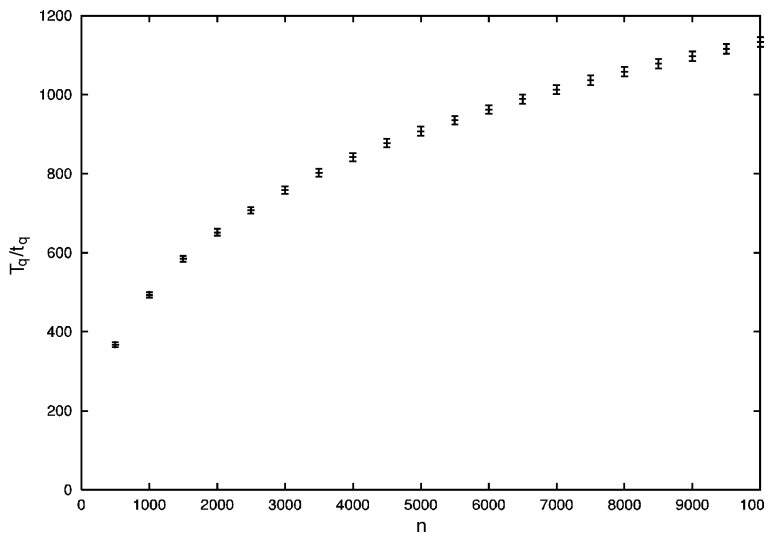
Slika 15. Zavisnost vrednosti K_q / q za random izabranih $q = 60\%$ mreže od veličine mreže. Prikazana je i egzaktna zavisnost $K(n)$. Parametri mreže: $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 6$; vrednosti K_q su dobijene usrednjavanjem rezultata sa 25 različitih mreža.

Figure 15. K_q / q dependence on network size, for $q = 60\%$ randomly chosen nodes, is shown on the plot, as well as exact dependence $K(n)$. Network parameters are $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 6$. K_q values are mean values obtained on 25 different networks.

Rezultati iz prethodnog poglavlja govore da zavisnosti broja trouglova $T(n)$, odnosno krakova $K(n)$, od veličine mreže, fituju na funkcije $y = a_t (\ln x)^{b_t}$, odnosno $y = a_k x \ln x$, odakle dobijamo vrednosti a_t , b_t i a_k . Za scale-free mreže određenih parametara i dalje ćemo vrednosti tih koeficijenata smatrati fiksnim. Da bismo odredili t_q i k_q , za slučaj preferencijalnog odabira, fitovaćemo zavisnost $T_q(n)$, odnosno $K_q(n)$, na $y = t_q a_t (\ln x)^{b_t}$, odnosno $y = k_q a_k x \ln x$, koristeći promenljive a_t , b_t i a_k kao konstante koje smo fiksirali uz pomoć rezultata prethodnog poglavlja.

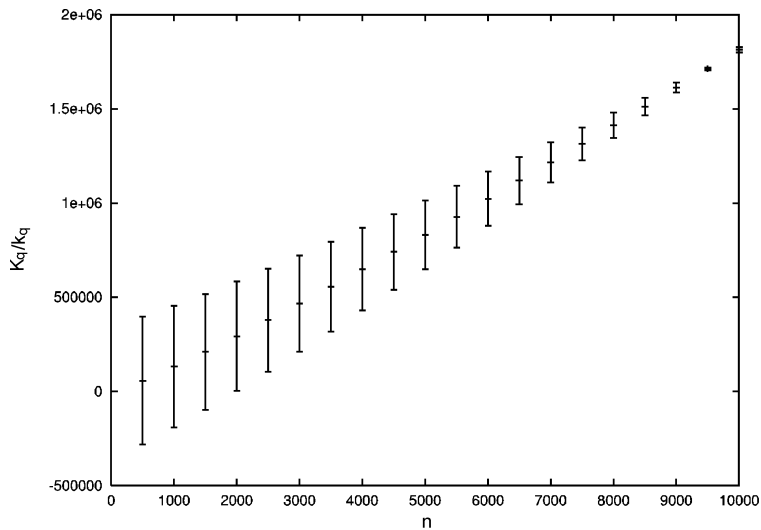
Da bismo ilustrovali prednost ocenjivanja broja trouglova i krakova preferencijalnim odabirom u odnosu na random odabir, na slikama 16 i 17 pokazujemo primere zavisnosti T_q/t_q i K_q/k_q od veličine mreže, sa istim parametrima mreža kao na slikama 14 i 15.

Zavisnosti koeficijenata t_q i k_q od vrednosti q , za mrežu fiksniranih parametara su linearne na log-log skali, pa se mogu fitovati na funkcije $y = \alpha_t x^{\beta_t}$ i $y = \alpha_k x^{\beta_k}$ (slike 18 i 19). Vrednosti koeficijenata α_t , β_t , α_k i β_k za različite parametre m dati su u tabeli 2.



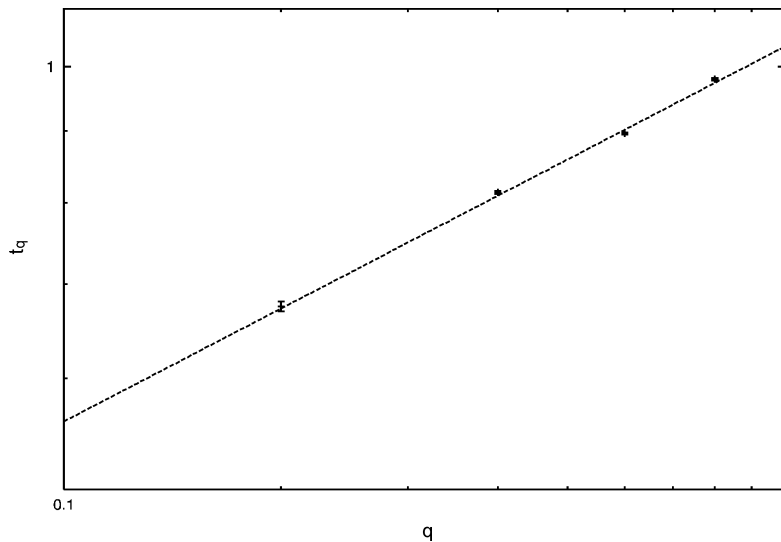
Slika 16. Zavisnost vrednosti T_q/t_q za random izabраних $q = 80\%$ mreže od veličine mreže, $t_q = 0.958(2)$. Prikazana je i egzaktna zavisnost $T(n)$. Parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 4$, a vrednosti T_q su dobijene usrednjavanjem rezultata sa 25 različitih mreža.

Figure 16. T_q/t_q dependence on network size, for $q = 80\%$ randomly chosen nodes, is shown on the plot, as well as exact dependence $T(n)$, $t_q = 0.958(2)$. Network parameters are $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 4$. T_q values are mean values obtained on 25 different networks.



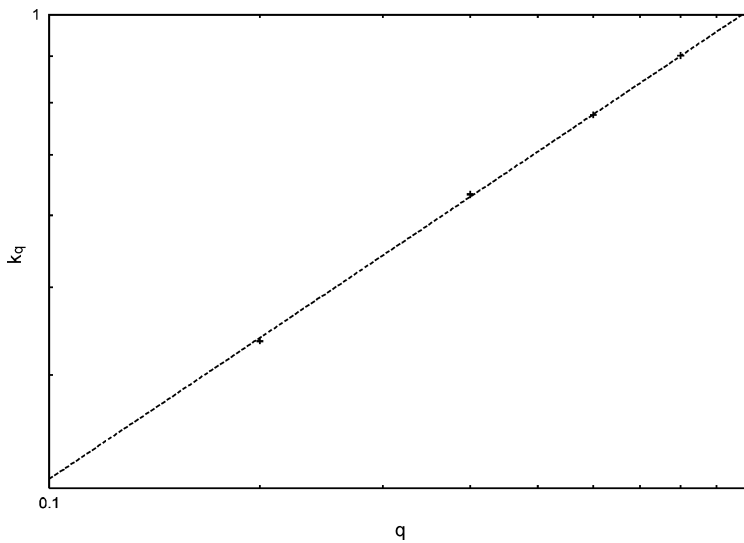
Slika 17. Zavisnost vrednosti K_q/k_q za random izabranih $q = 60\%$ mreže od veličine mreže, $k_q = 0.7855(1)$. Prikazana je i egzaktna zavisnost $K(n)$. Parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 6$, a vrednosti K_q su dobijene usrednjavanjem rezultata sa 25 različitih mreža.

Figure 17. K_q/k_q dependence on network size, for $q = 60\%$ randomly chosen nodes, is shown on the plot, as well as exact dependence $K(n)$, $k_q = 0.7855(1)$. Network parameters are $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 6$. K_q values are mean values obtained on 25 different networks.



Slika 18. Zavisnost koeficijenta t_q od vrednosti q fitovana na funkciju $y = \alpha_t x^{\beta_t}$, $\alpha_t = 1.03(1)$, $\beta_t = 0.27(2)$. Parametri mreže su $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 3$.

Figure 18. q -dependence of t_q coefficient fitted to the function $y = \alpha_t x^{\beta_t}$, $\alpha_t = 1.03(1)$, $\beta_t = 0.27(2)$. Network parameters are $n_0 = 10$, $p = 0.5$, $m = 3$.



Slika 19.
Zavisnost koeficijenta k_q od vrednosti q fitovana na funkciju $y = \alpha_k x^{\beta_k}$, $\alpha_k = 1.010(3)$, $\beta_k = 0.517(7)$. Parametri mreže su $n_o = 10$, $p = 0.5$, $m = 7$.

Figure 19.
q-dependence of k_q coefficient fitted to the function $y = \alpha_k x^{\beta_k}$, $\alpha_k = 1.010(3)$, $\beta_k = 0.517(7)$. Network parameters are $n_o = 10$, $p = 0.5$, $m = 7$.

Tabela 2. Vrednosti koeficijenta α_t , β_t , α_k i β_k za različite parametre mreže m .

m	α_t	β_t	α_k	β_k
1	–	–	1.01(2)	0.47(2)
2	1.004(6)	0.224(7)	0.992(3)	0.469(3)
3	1.03(1)	0.27(3)	1.012(2)	0.489(6)
4	1.017(7)	0.28(2)	0.999(5)	0.49(1)
5	1.025(6)	0.27(2)	1.015(2)	0.506(3)
6	1.022(6)	0.28(2)	1.012(2)	0.514(2)
7	1.010(6)	0.28(2)	1.010(3)	0.517(7)
8	1.007(6)	0.27(2)	1.001(3)	0.49(2)

Zaključak

U ovom radu ispitivali smo globalne i strukturne osobine scale-free mreža. Korištili smo Barabaši-Albert model za generisanje mreže sa stepenom (scale-free) raspodelom povezanosti dodavanjem novih čvorova stepena m . Poznate zavisnosti small world koeficijenta i klastering koeficijenta od veličine mreže, proširili smo na zavisnost po parametru m .

Pronašli smo zavisnosti podstruktura veličine tri (trouglova i krakova) od veličine mreže i parametra m . Ispitali smo uspešnost brojanja trouglova i krakova po random i preferencijalno biranom podskupu S čvorova kao heuristike za ocenu broja trouglova i krakova na nivou cele mreže. Random odabir se pokazao kao jednostavniji, ali manje precizan metod. Za preferencijalni odabir smo odredili formule i izračunali potrebne koefici-

jente za $m = 1, 2, \dots, 8$ pomoću kojih se može oceniti broj pojavljivanja podstruktura veličine tri u zavisnosti od veličine podskupa S .

Ove heurističke metode posebno mogu naći primenu kod karakterisanje lokalnih svojstava mreža sa velikim brojem čvorova, zbog velike uštede vremena pri prebrojavanju podstrukture.

Zahvalnost. Zahvaljujem se Istraživačkoj stanici Petnica, a posebno Jeleni Grujić, šefu seminara fizike – u okviru kojih sam radila ovaj projekat. Zahvaljujem se svom mentoru Dr Aleksandru Beliću za korisne savete, kao i celoj Laboratoriji za primenu računara u nauci Instituta za fiziku u Beogradu što su mi omogućili da za potrebe svojih istraživanja koristim najnapredniju računarsku opremu. Zahvaljujem se i Milošu Srečkoviću i Milošu Saviću za korisne komentare i diskusije koje smo vodili na temu scale-free mreža.

Literatura

- Reka A., Barabasi A.-L. 2000. *Statistical Mechanics of Complex Networks*. School of Mathematics, 127 Vincent Hall, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota 55455, ²Department of Physics, College of Science, 225 Nieuwland Science Hall, University of Notre-Dame, Notre-Dame, Indiana 46556
- Manna S. S. 2003. *Diffusion limited friendship network: A model for six degrees of separation*. Satyendra Nath Bose National Centre for Basic Sciences Block-JD, Sector-III, Salt Lake, Kolkata-700098, India
- Sergi D. 2005. *Random graph model with power-law distributed triangle subgraphs*. Departement de Physique Theorique, Universite de Geneve, 1211 Geneve 4, Switzerland

Marina Radulaški

Parameters and Substructures of Scale-free Networks

This paper investigates global and local properties of scale-free networks generated by the Barabasi-Albert model. Small world coefficient and clustering coefficient dependences on network size have been expanded to dependences on parameter m . Dependence of size three network substructure occurrences on network size and parameter m has been discovered. Counting of size three substructures occurrences for random and preferentially chosen subset of nodes was investigated as a heuristic for grading same values on the level of the whole network. Random pick is found to be simpler, but less precise method. Formulas and coefficients for preferential pick are introduced and can be used for estimating the number of size three network substructures for $1 \leq m \leq 8$.

