Pavle Papuga

Karakteristike DLA modela fraktala

Diffusion-Limited Aggregation (DLA) je jedan od najčešće korišćenih modela koji opisuje rast realnih struktura koje nalikuju fraktalima. U ovom radu su analizirane neke karakteristike ovog modela. Ispitivane su osobine dobijenih fraktala za različite početne gustine. Ispitana je distribucija veličina dobijenih klastera, verovatnoća perkolacija DLA struktura, kao i zavisnost njihovih fraktalnih dimenzija od početne gustine.

Uvod

DLA model (Diffusion-Limited Aggregation) predstavlja jedan od modela rasta fraktala. Ovaj model daje osnovu za razumevanje velikog opsega prirodnih modela rasta. Na taj način može biti opisan rast kristala, rast koralnih grebena, kondenzacija itd. Predstavili su ga 1981. godine L.M. Sandler i T.A. Witten. DLA opisuje agregaciju (sjedinjavanje) identičnih delića u klaster kod Braunovog kretanja (Vandewalle, Ausloos 1995).

Ako se u kvadratnoj rešetki spojenoj u torus (spojene su joj naspramne stranice), zadajući unapred gustinu (verovatnoću da se u određenom čvoru nađe ćelija), slučajno raspodele ćelije, dobijaju se: usamljene ćelije, koje nemaju zajedničkih stranica sa nekom drugom ćelijom, i strukture koje se sastoje od ćelija koje imaju zajedničke stranice. Te strukture, sastavljene od više spojenih ćelija, "zamrzavaju" se, dok se preostale usamljene ćelije slobodno pomeraju po rešetki sve dok ne dođu u dodir sa nekom drugom usamljenom ćelijom ili sa nekom već zamrznutom strukturom, kada se i one zamrzavaju. Taj proces se ponavlja sve dok se sve ćelije u kvadratnoj rešetki ne zamrznu. Takav način rasta predstavlja jedan od modela DLA rasta.

Ako se kvadratna rešetka popuni samo slučajno razbacanim ćelijama, onda se za različite početne gustine ćelija u njoj menja i broj klastera nakon relaksiranja sistema. Naime, postoji kritična vrednost početne gustine takva da do nje broj klastera u sistemu raste, a od nje usled prenaseljenosti opada (Bollobas 1985).

Pavle Papuga (1985), Vrbas, Milivoja Čobanskog 79, učenik 3. razreda Gimnazije "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu

Ukoliko je torus obavijen jednim klasterom, kaže se da kvadratna rešetka perkolira. Da bi rešetka prvi put perkolirala ona mora dostići određenu vrednost početne gustine. Tu vrednost početne gustine zovemo kritičnom (Meester, Roy 1996).

Strukture dobijene DLA rastom imaju određene fraktalne osobine. Fraktalna dimenzija D dobijenih fraktala je takozvana masena dimenzija i računa se po formuli:

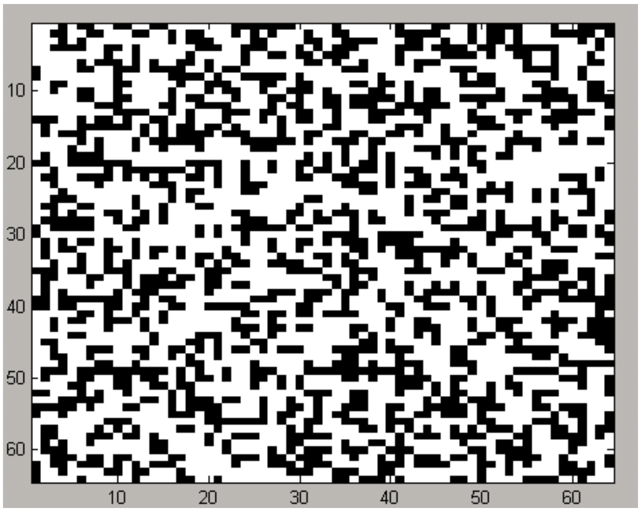
$$D = \left(\frac{\log N(a)}{\log a} \right)_{a \to \infty} \qquad (1)$$

gde je $N(a)$ broj ćelija u rešetki, a a dužina stranice rešetke (Witten, Sandler 1981).

Cilj rada je da se simulacijom ovog tipa DLA rasta prouče karakteristike formiranih struktura. Ispitivana je distribucija klastera po veličini, zavisnost broja klastera u rešetki od početne gustine, zavisnosti broja rešetki koje perkoliraju od početne gustine, kao i zavisnost fraktalnih dimenzija struktura od početne gustine.

Metod

DLA rast simuliran je po algoritmu koji je izložen u uvodu. Za simulaciju je korišćen programski jezik Borland Pascal 7.0. Slobodno kretanje ćelija u rešetki simulirano je pomoću random generatora. Kvadratna rešetka spojena je u torus. Spajanjem u torus ostvareno je da ćelije pri nailasku na ivicu ne izlaze iz rešetke već na suprotnu stranu rešetke. Na slici 1 prikazana je struktura formirana DLA rastom veličine 64×64 i početne gustine od 40%:



Slika 1.
Početna gustina 40%
(crna temena-ćelije)

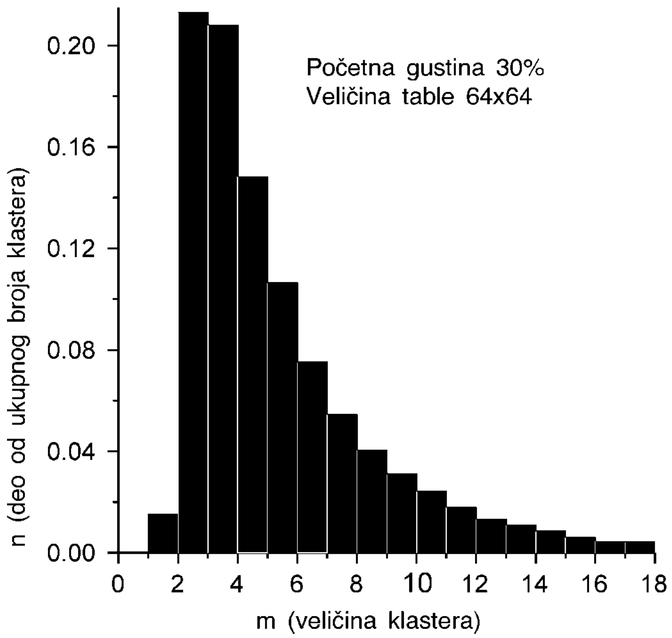
Figure 1.
Initial density of
40%(black spots-cells)

Za ispitivanje osobina dobijenih fraktala korišćene su rešetke veličine 64×64, a njihov broj menjan je u zavisnosti od potrebe za što temeljnije utvrđivanje neke od osobina. Za obradu rezultata korišćen je programski paket Microcal Origin 5.0.

Rezultati i diskusija

Distribucija klastera po veličini

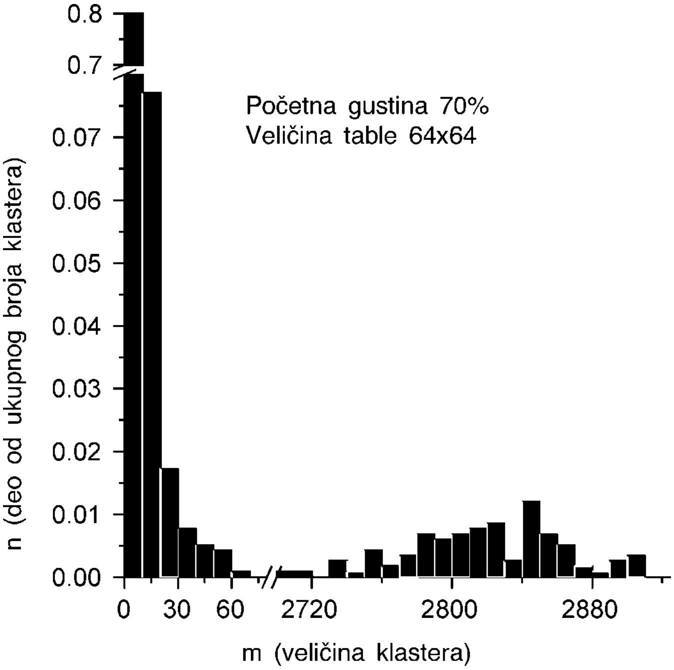
Korišćeno je po 100 kvadratnih rešetki u kojima se vršio DLA rast. Dimenzija svake rešetke bila je 64×64. Početna gustina ćelija u rešetki iznosila je 10-90%. Za svaku od gustina, merena je veličina svakog klastera u rešetki metodom *Backtracking* i nakon toga je ispitivana distribucija klastera po veličini. U zavisnosti od gustine, dobijene su različite raspodele. Za gustine do 50% rešetku su činili "mali" klasteri. Distribucija klastera po veličini za jednu od tih gustina prikazana je na slici 2.



Slika 2. Distribusija klastera po veličini za početnu gustinu 30%

Figure 2. Distribution of clusters by size for initial density of 30%

U rešetkama u kojima je početna gustina veća od kritične dolazi do prenaseljenosti pa u rešetki dolazi do stvaranja jednog velikog klastera čija veličina sa gustinom raste i više malih klastera čiji se broj sa gustinom smanjuje. Na slici 3 je prikazana distribucija klastera po veličini za jednu od tih gustina.

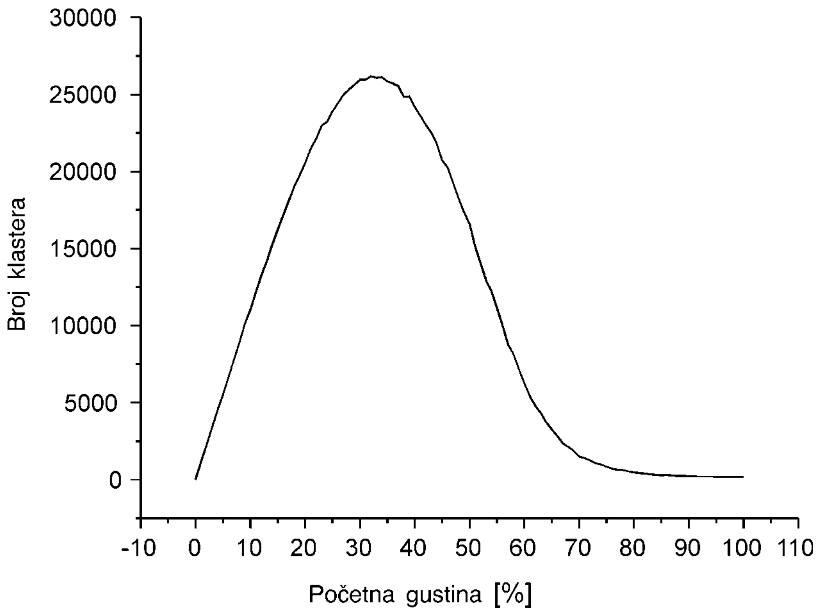


Slika 3. Distribucija klastera po veličini za početnu gustinu 70%

Figure 3. Distribution of clusters by size for initial density of 70%

Broj klastera u rešetki u zavisnosti od početne gustine

Da bi se ispitala zavisnost broja klastera u rešetki od početne gustine korišćeno je po sto rešetki veličine 64×64 u kojima je početna gustina bila 1%, 2%, 3%, ... 100%. Na grafiku (slika 4) prikazana je ta zavisnost.



Slika 4. Zavisnost broja klastera u rešetki od početne gustine

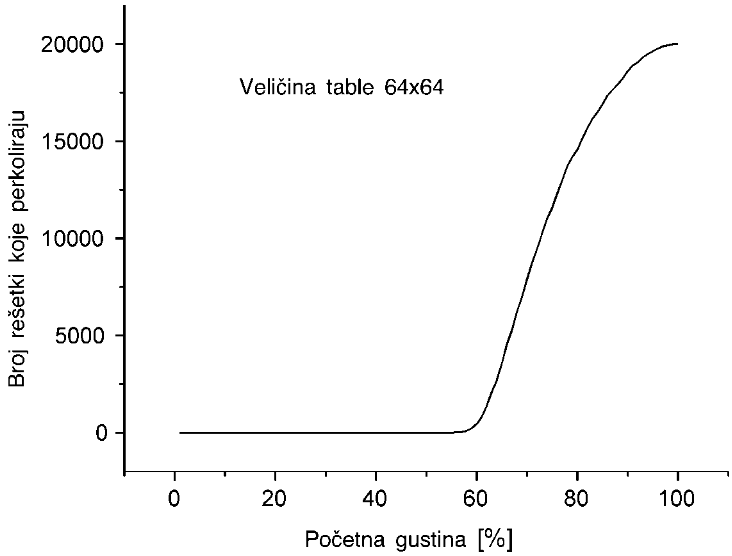
Figure 4. Number of clusters in a matrix depending on initial density

Sa slike 4 može se videti da i rešetke nastale DLA rastom imaju kritičnu vrednost početne gustine do koje broj klastera u rešetki raste, a od koje usled prenaseljenosti opada. Da bi se ta gustina odredila deo vrednosti sa grafika je fitovan Gaussian-om u programskom paketu TableCurve 2D. Taj deo činile su početne gustine od 4% do 62%. Dobijeno je da ta kritična vrednost početne gustine iznosi 32.72±0.04%. Na grafiku se vide određene fluktuacije što je rezultat relativno malog broja merenja.

Zavisnost broja rešetki koje perkoliraju od početne gustine

Ispitivana je zavisnost broja rešetki koje perkoliraju od početne gustine. Za to je korišćeno po 20000 rešetki dimenzija 64×64 za početne gustine 1%, 2%, ... 100%. Na slici 5 prikazana je ta zavisnost.

Sa slike 5 se vidi da kritična vrednost početne gustine koju rešetka treba da dostigne da bi prvi put perkolirala iznosi približno 57%. Takođe se vide određene fluktuacije što je rezultat nedovoljnog broja merenja.



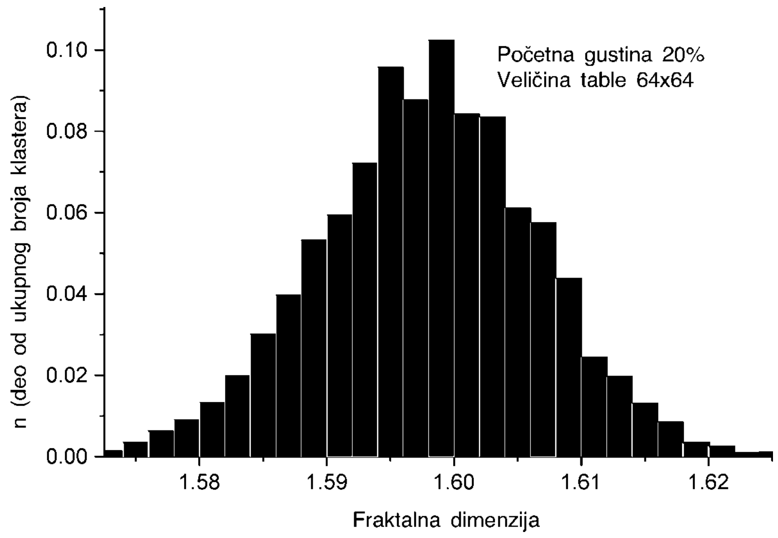
Slika 5. Zavisnost broja rešetki koje perkoliraju od početne gustine

Figure 5. Number of percolating matrices depending on initial density

Određivanje fraktalne dimenzije

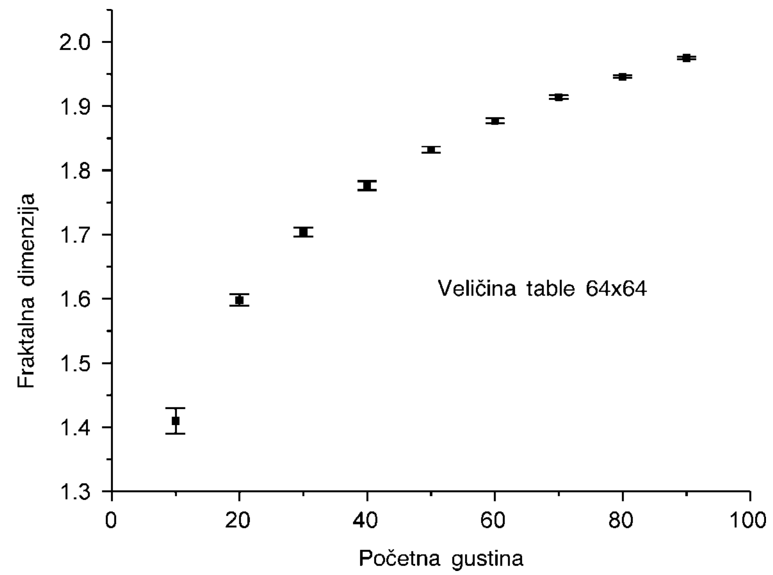
Za svaku od gustina nađena je fraktalna dimenzija pomoću formule (1). Pošto je Pascal memorijski ograničen nije se mogla formirati rešetka sa jako velikom dužinom stranice. Stoga je (da bi se postigao isti efekat) za određivanje fraktalne dimenzije rešetke sa određenom početnom gustinom korišćen velik broj rešetki veličine 64×64. Rezultati rada statistički su obrađeni. Na slici 6 prikazana je distribucija fraktalnih dimenzija rešetki za jednu od gustina.

Na slici 7 prikazana je zavisnost fraktalne dimenzije od početne gustine.



Slika 6.
Distribucija fraktalnih dimenzija rešetki za početnu gustinu 20%

Figure 6.
Distribution of fractal dimensions of matrices for initial density of 20%



Slika 7.
Zavisnost fraktalne dimenzije rešetke od početne gustine

Figure 7.
Fractal dimensions of a matrix depending on initial density

Zaključak

Simulacijom razmatranog tipa DLA rasta došlo se do struktura koje nam pomažu da što bolje shvatimo osobine proučavanog rasta. Usled nedovoljnog broja merenja dolazi do neočekivanih fluktuacija broja rešetki koje perkoliraju i broja klastera u rešetkama u zavisnosti od gustine. Da bi se greške smanjile potrebno je uraditi merenja sa većim brojem rešetki.

Zahvalnost. Zahvaljujem se mlađim saradnicima sa seminara fizike (Zlatku, Milji, Vanetu, Jeli, Danici, Stevi), bivšem (Verbiću), kao i sadašnjem vođi seminara fizike (Lazi), koji su mi u velikoj meri pomogli oko ideje za temu rada, pratili me i davali sugestije tokom obrade rezultata kao i ukazivali na sve greške u tekstu rada i u predstavljanju rezultata. Takođe im se zahvaljujem što su mi pomogli da savladam prve korake u svetu programiranja time što su me motivisali da naučim da "programiram" u Pascal-u. Zahvalio bih se i prijatelju Peđi koji mi je u potpunosti pomogao u pisanju rezimea na engleskom jeziku.

Literatura

Bollobas B. 1985. *Random Graphs*. Academic Press

Meester R., Roy R. 1996. *Continuum Percolation*. Cambridge University Press

Schroeder M. 1991. *Fractals, Chaos, Power Laws Minutes from an Infinite Paradise*. New York: Freeman

Vandewalle N., Ausloos M. 1995. Magnetic Diffusion-Limited Aggregation. *Physical Review E,* **51**: 597

Witten T., Sandler L. 1981. Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon. *Physical Review Letters,* **47**: 1400

Witten T., Sander L. 1983. Diffusion-limited aggregation. *Physical Review B*, **27**: 5686

Pavle Papuga

Characteristics of DLA Fractal Growth

If we put random cells into a torus shaped matrix, provided we know the density, we get: lone cells, i.e. cells that do not have a link (horizontal or vertical) with other cells, and groups of cells that have a link (horizontal or vertical) with other cells. Structures consisting of groups of cells become blocked, while the remaining lone cells move freely until they connect with other cells or groups of cells when they become blocked as well. That growth pattern is one of the models of Diffusion-Limited Aggregation (DLA) growth.

If a matrix is formed only by randomly positioned cells, then, depending on initial density, a different number of clusters is formed in the matrix in a characteristic way. Number of clusters in a matrix grows until a certain critical density is reached, and after that density the number of clusters in a matrix decreases due to overpopulation.

One of the characteristics of a matrix is percolation. If a torus is surrounded with a single cluster then the matrix is percolated. When the matrix

reaches a certain value of initial density it will percolate for the first time. That initial density is called critical density.

Structures created by DLA growth have certain fractal characteristics. Fractal dimension of the created fractals is calculated by the formulae (1), where *N(a)* is the number of cells in the matrix and *a* is the length of the edge of the matrix.

Borland Pascal 7.0 was used for the simulation of DLA. The matrix is shaped into a torus. For examination of the characteristics of created fractals, 64×64 matrices were used, their number varied in order to achieve a more thorough examination of a characteristic. Microcal Origin 5.0 was used to process the results, which were:

1. *The distribution of clusters by size*. 100 matrices sized 64x64 were used for DLA growth. Initial density varied from 10% to 90%. We used Backtracking method to measure the size of every cluster in the matrix, and after that the distribution of clusters by size was checked. Depending on the density different distributions were acquired. For densities up to 50% the matrix consisted of small clusters. The distribution of clusters by size for one of the densities is shown in Figure 2. Matrix where the initial densitie is higher than critical consisted of one big cluster and many small clusters. The distribution of clusters by size for one of the densities is shown in Figure 3.

2. *The number of clusters in the matrix depending on the initial density*. 100 matrices sized 64×64 were used to examine the dependency of the number of clusters in a matrix and the initial density. Initial densities were 1%, 2%, 3%, ... 100%. Figure 4 displays that dependency. We can conclude that in the matrices formed using DLA growth the number of clusters grows until the critical density is reached, and after that density the number of clusters decreases due to overpopulation. That critical density is 32.72±0.04%.

3. *The number of percolating matrices depending on the initial density*. 20000 matrices sized 64×64 with initial density 1%, 2%, 3%, … 100% were used for that purpose. Figure 5 displays that dependency. We can conclude that when the matrix reaches the critical value of initial density it percolates. For matrices formed using that model of DLA growth this critical initial density is approximately 57%.

4. *Fractal dimension for different initial densities*. For every density (1%, 2%, … 100%) a fractal dimension was found using formulae (1). Large numbers of 64×64 matrixes were used to gain a similar effect to the one gained by one matrix with a very high edge. The distribution of fractal dimensions of matrices for one of the densities is shown in Figure 6.

The dependency of fractal dimension from initial density is shown in Figure 7.