

## Određivanje profila kapljice na ravnoj podlozi

---

*Analiziran je profil kapljice na ravnoj podlozi kada na nju, osim gravitacije, ne deluje ni jedna druga sila. Polazeći od Laplasove formule za razliku pritisaka i relacije za srednju krivinu krive, dobijena je diferencijalna jednačina drugog reda koja opisuje kapljicu. Napravljen je program za numeričko rešavanje ove jednačine. Dobijeni rezultati odgovaraju iskustvenim predstavama o izgledu kapljice.*

---

### Uvod

Oblik tečnosti pri dodiru sa čvrstim telom zavisi od osobina i tečnosti i čvrstog tela. Kada se mala zapremina tečnosti (kapljica) nađe u dodiru sa ravnim horizontalnom čvrstom podlogom, u slučaju da na nju ne deluju druge sile osim gravitacije i atmosferskog pritiska, moguća su dva slučaja (Friš, Timorjeva 1969):

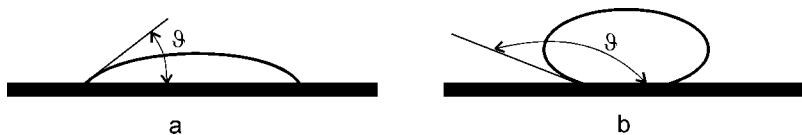
- 1) Sile uzajamnog dejstva između molekula tečnosti i čvrstog tela su veće od sila uzajamnog dejstva između molekula tečnosti. Tada tečnost kvasi podlogu, tj. zauzima oblik kao na slici 1a.
- 2) Sile uzajamnog dejstva između molekula tečnosti i čvrstog tela su manje od sila uzajamnog dejstva između molekula tečnosti. Tečnost zauzima oblik kao na slici 1b i tada kažemo da ona ne kvasi čvrsto telo. U ovom slučaju rezultatna sila na deo tečnosti koji dodiruje čvrsto telo usmerena je ka tečnosti.

Ugao između graničnih površina tečnosti i čvrstog tela na mestu gde se ove dve površine dodiruju naziva se ugao kvašenja (Vučić, Ivanović 1970; Friš, Timorjeva 1969). Ako je ovaj ugao oštar ( $\vartheta < 90^\circ$ , slika 1a) onda tečnost kvasi podlogu a ako je tup ( $\vartheta > 90^\circ$ , slika 1b) onda tečnost ne kvasi podlogu. Ovaj ugao zavisi samo od vrste tečnosti i čvrstog tela.

U ovom radu proučavali smo oblik kapljice tečnosti koji ona ima kada se nalazi na ravnoj podlozi i kada na nju ne deluju nikakve spoljašnje sile, osim gravitacije. Smatrali smo da kapljica ima cilindričnu simetriju,

---

*Marko Petković  
(1984), Niš,  
Majakovskog 34/12,  
učenik 2. razreda  
Gimnazije "Svetozar  
Marković" u Nišu*



Slika 1.  
Izgled kapljice  
tečnosti na ravnoj  
podlozi kada tečnost  
kvasi podlogu (a) i  
kada je ne kvasi (b)

tako da je linija po kojoj ona dodiruje podlogu kružnica. Razmatrali smo zavisnost oblika kapljice od ugla kvašenja, od vrste tečnosti i od zapremine kapljice. Rešavanjem problema došli smo do diferencijalne jednačine drugog reda koja ne može da se reši analitički, pa smo zato jednačinu rešavali numerički. U tu svrhu napravljen je program MarKap koji za određenu tečnost date zapremine i datog ugla kvašenja računa profil kapljice. Korišćenjem ovog programa proračunavan je profil kapljice za zapremine različitih zapremina od  $10 \text{ mm}^3$  do  $500 \text{ mm}^3$  i uglove kvašenja od  $1^\circ$  do  $179^\circ$ . U radu su prikazane i analizirane proračunate zavisnosti profila kapljica vode na sobnoj temperaturi za uglove kvašenja u granicama  $15\text{--}165^\circ$  i zapremine od  $10 \text{ mm}^3$  do  $500 \text{ mm}^3$ .

## Teorijsko razmatranje problema

Analiza osobina tečnosti, uzimajući u obzir njen molekularni sastav, predstavlja veoma složen problem, ali ima pojava koje se drugačije ne mogu objasniti. Na bilo koji molekul unutar tečnosti deluju molekuli sa svih strana. Molekuli unutar tečnosti se nalaze u stanju ravnoteže. Na molekule koji se nalaze na površini tečnosti deluju molekuli iz unutrašnjosti tečnosti što znači da je rezultujuća sila koja na njih deluje različita od nule. Pravac ove sile je normalan na površinu tečnosti, a usmerena je ka njenoj unutrašnjosti. To znači da tečnost teži da smanji svoju slobodnu površinu. Ova pojava se naziva površinski napon (Vučić, Ivanović 1970). U slučaju kapljice, kad nema dejstva drugih sila (uključujući i gravitaciju), slobodna površina ima oblik sfere (sfera ima najmanju slobodnu površinu od svih tela iste zapremine). Težnja tečnosti da smanji svoju graničnu površinu povezana je sa smanjenjem njene potencijalne energije. Drugim rečima, da bi se povećala slobodna površina tečnosti neophodno je izvršiti određeni rad. Rad potreban da bi se slobodna površina tečnosti povećala za jediničnu vrednost je konstantan za datu tečnost pri datoj temperaturi i naziva se koeficijent površinskog napona (Vučić, Ivanović 1970). To znači da je koeficijent površinskog napona jednak količniku elementarnog rada  $\Delta A$  potrebnog da se slobodna površina tečnosti poveća za elementarnu vrednost  $\Delta S$  i te elementarne promene slobodne površine tečnosti, i može se izraziti relacijom:

$$\gamma = \frac{\Delta A}{\Delta S} \quad (1)$$

S obzirom da granična površina tečnosti teži minimumu, može se zaključiti da ona može biti konveksna kriva površina samo ako postoji nenulta razlika pritiska  $\Delta p$  sa jedne i druge strane te površine. Kad se granična površina poveća za malu vrednost  $\Delta S$ , pri čemu se za svaki delić površine glavni poluprečnici krivina tog delića povećaju za  $\Delta l$ , ovaj pritisak izvrši rad:

$$\Delta A = \int \Delta p \cdot \Delta l \cdot dS \quad (2)$$

gde se integral uzima po celoj graničnoj površini. Prema (1) promena energije granične površine pri ovom procesu je:

$$\delta E = \gamma \cdot \Delta S \quad (3)$$

gde je  $\Delta S$  ukupna promena granične površine. Na osnovu zakona održanja energije rad određen relacijom (2) mora biti jednak promeni energije određene relacijom (3), tj.:

$$\int \Delta p \cdot \Delta l \cdot dS = \gamma \cdot \Delta S \quad (4)$$

Uočimo na krivoj površini dva glavna preseka čiji su poluprečnici krivina  $R_1$  i  $R_2$ . Tada su elementi dužine  $dl_1$  i  $dl_2$  na površini, koji su u ravnima njenih glavnih preseka, posle beskonačno malog pomeranja površine jednaki (Mihailović 1969):

$$d l_1^{(1)} = \left( \frac{\Delta l}{R_1} + 1 \right) \text{ i } d l_2^{(1)} = \frac{\Delta l}{R_2} \cdot d l_2 \quad (5)$$

Ovde treba  $dl_1$  i  $dl_2$  posmatrati kao elemente kružnica sa poluprečnicima  $R_1$  i  $R_2$ . Zbog toga je element površine posle pomeranja jednak:

$$\begin{aligned} d S^{(1)} &= d l_1 \cdot \left( \frac{\Delta l}{R_1} + 1 \right) \cdot d l_2 \cdot \left( \frac{\Delta l}{R_1} + 1 \right) \approx \\ &\approx d l_1 \cdot d l_2 \cdot \left( \frac{\Delta l}{R_1} + \frac{\Delta l}{R_1} + 1 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Sabirak  $\frac{\Delta l^2}{R_1 \cdot R_2}$  je zanemaren jer je mnogo manji od ostalih sabiraka.

Promena elementa površine je:

$$d S^{(1)} - d S = \Delta l \cdot d S \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (7)$$

Prema tome ukupna promena granične površine je (Landau, Lifšic 1965; (Landau, Lifšic 1965; Mihailović 1969):

$$\Delta S = \int \Delta l \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot dS \quad (8)$$

gde se integral uzima po celoj graničnoj površini. Zamenjujući  $\Delta S$  prema (8) u relaciji (4) dobija se:

$$\begin{aligned} \int \Delta p \cdot \Delta l \cdot dS &= \gamma \cdot \int \Delta l \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot dS \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int \Delta l \cdot \left[ \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot (-\gamma) + \Delta p \right] &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Ovaj uslov mora biti ispunjen pri beskonačno malom pomeranju površine, tj. pri proizvoljnom  $\Delta l$ . Zbog toga izraz pod integralom mora biti identički jednak nuli, tj.:

$$\Delta p = \gamma \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (10)$$

Prethodna relacija predstavlja poznatu Laplasovu formulu koja određuje površinski pritisak.

Ako na kapljicu tečnosti ne deluju nikakve spoljašnje sile uslov za ravnotežu je  $\Delta p = \text{const}$ , što se prema (11) može napisati u obliku (Landau, Lifšic 1965):

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const} \quad (11)$$

To znači da zbir recipročnih vrednosti poluprečnika krivina mora biti konstantan duž cele slobodne granične površine.

Neka se kapljica nalazi u gravitacionom polju na ravnoj podlozi, pri čemu je spoljašnja sredina atmosfera.

Razlika pritisaka sa jedne i druge strane granične površine kapljice je  $\Delta p = p_1 - p_2$ . Tada je  $p_2 = \text{const}$  atmosferski pritisak, a pritisak u tečnosti iznosi:

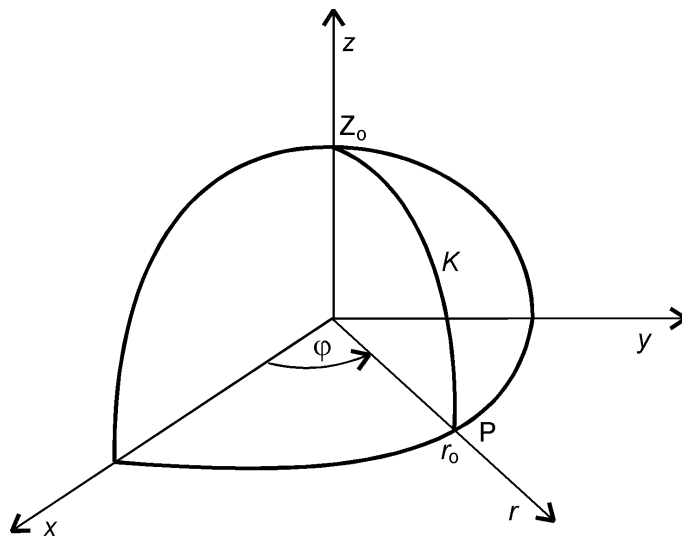
$$p_1 = \text{const} - \rho \cdot g \cdot z \quad (12)$$

gde je  $\rho$  gustina tečnosti,  $g$  ubrzanje zemljine teže, a koordinata  $z$  je usmerena vertikalno na više (slika 2). Na taj način uslov ravnoteže dobija oblik (Landau, Lifšic 1965):

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{\rho \cdot g}{\gamma} \cdot z = \text{const} \quad (13)$$

Prethodna relacija može da se napiše i u obliku:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\rho \cdot g}{\gamma} \cdot (z_c - z) \quad (14)$$



Slika 2.  
Kapljica tečnosti koja se nalazi na ravnoj podlozi u pravouglom i cilindričnom koordinatnom sistemu.

Figure 2.  
The drop in the orthogonal and cylindrical coordinate system

gde je  $z_c$  konstanta koja, kako ćemo pokazati, zavisi od ugla kvašenja i zapremine kapljice. Kapljica tečnosti koja se nalazi na ravnoj podlozi u gravitacionom polju i na koju ne deluju spoljašnje sile ima cilindričnu simetriju. Ako postavimo pravougli koordinatni sistem kao na slici 2 površina kapljice se dobija rotacijom krive  $K$  oko  $z$  ose, pri čemu tačka koja se nalazi na podlozi (u ravni) opisuje po njoj krug. U cilindričnom koordinatnom sistemu  $r\varphi z$ , kriva  $K$  je određena kao geometrijsko mesto tačaka  $r = r(z)$ . Srednja krivina krive rotacione površine koja predstavlja površinu kapljice je (Mihailović 1969):

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1 + r'^2 - r \cdot r''}{r(1 + r'^2)^{3/2}} \quad (15)$$

Iz relacija (14) i (15) dobija se:

$$\frac{1 + r'^2 - r \cdot r''}{r(1 + r'^2)^{3/2}} = \frac{\rho \cdot g}{\gamma} \cdot (z_c - z) \quad (16)$$

odnosno,

$$r'' = \frac{1 + r'^2}{r} - (1 + r'^2)^{3/2} \cdot \frac{\rho \cdot g}{\gamma} \cdot (z_c - z) \quad (17)$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu drugog reda. Njenim rešavanjem dobija se zavisnost  $r = r(z)$ , odnosno kriva  $K$  čijom rotacijom oko  $z$  ose nastaje površina koja odgovara slobodnoj površini kapljice. Pri rešavanju diferencijalne jednačine (17) treba voditi računa o graničnim uslovima prema kojima je

$$r'(0) = \text{ctg } \vartheta \quad (18)$$

gde je  $\vartheta$  ugao kvašenja kako je prikazan na slici 1, i

$$\lim_{z \rightarrow \infty} r'(z) \rightarrow -\infty \text{ and } \lim_{z \rightarrow \infty} r(z) \rightarrow 0 \quad (19)$$

jer je tangencijalna ravan u tački  $r=0$  na površinu kapljice paralelna ravni odnosno podlozi.

## Postupak numeričkog izračunavanja i program MarKap

Diferencijalnu jednačinu (17) nije moguće rešiti analitički. Takođe, u njoj figurise parametar  $z_c$  koji ne znamo, kao ni  $r'(0)$  što je jedan od graničnih uslova. Zato postupak rešavanja diferencijalne jednačine delimo u tri faze:

- Numeričko rešavanje jednačine (17) za date vrednosti  $z_c$  i  $r_0$
- Određivanje konstante  $\gamma$  za koju rešenje jednačine (17) zadovoljava granične uslove (18) i (19) za dato
- Određivanje vrednosti  $r_0$  koja odgovara zadatoj zapremini kapljice

Numeričko rešavanje jednačine (17) omogućava smena

$$\xi = r' \quad (20)$$

kojom se (17) transformiše u sistem od dve diferencijalne jednačine prvog reda:

$$\xi' = \frac{1 - \xi^2}{r} - \frac{(1 + \xi^2)^{3/2}}{r} \cdot \frac{\rho \cdot g}{\gamma} \cdot (z_c - z) = G(z, r, \xi) \quad (21)$$

$$r' = \xi = F(z, r, \xi)$$

Prema metodi Runge-Kutta numeričko rešenje sistema diferencijalnih jednačina (21) dobija se sukcesivnim aproksimacijama (Mihailović 1969):

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n + \frac{1}{6} \cdot h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ \xi_{n+1} &= \xi_n + \frac{1}{6} \cdot h \cdot (q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4) \end{aligned} \quad (22)$$

gde su:

$$k_1 = F(z_n, r_n, \xi_n)$$

$$q_1 = G(z_n, r_n, \xi_n)$$

$$k_2 = F\left(z_n + \frac{1}{2} \cdot h, r_n + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_1, \xi_n + \frac{1}{2} \cdot h \cdot q_1\right)$$

$$q_2 = G\left(z_n + \frac{1}{2} \cdot h, r_n + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_1, \xi_n + \frac{1}{2} \cdot h \cdot q_1\right)$$

$$k_3 = F\left(z_n + \frac{1}{2} \cdot h, r_n + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_2, \xi_n + \frac{1}{2} \cdot h \cdot q_2\right)$$

$$\begin{aligned}
q_3 &= G\left(z_n + \frac{1}{2} \cdot h, r_n + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_2, \xi_n + \frac{1}{2} \cdot h \cdot q_2\right) \\
k_4 &= F\left(z_n + h, r_n + h \cdot k_3, \xi_n + h \cdot q_3\right) \\
q_4 &= G\left(z_n + h, r_n + h \cdot k_3, \xi_n + h \cdot q_3\right)
\end{aligned} \tag{23}$$

a korak izračunavanja  $h$  je:

$$h = z_{n+1} - z_n \tag{24}$$

Na taj način moguće je odrediti zavisnost  $r = r(z)$ , ako se zada početna vrednost  $r = r(0)$  jer je na osnovu graničnog uslova (18)  $\xi(0) = r'(0) = -\text{ctg } \vartheta$ . Pri tome treba pretpostaviti vrednost  $z_c$ . Naravno, za proizvoljnu vrednost  $z_c$  zavisnost  $\xi(z) = r'(z)$  neće uvek dostizati vrednost određenu drugim graničnim uslovom (19). Na taj način je moguće postaviti iterativni postupak koji omogućuje da se odredi takva vrednost  $z_c$  koja obezbeđuje ispunjenje graničnog uslova (19).

Kada je određena zavisnost  $r = r(z)$  moguće je odrediti zapreminu kapljice po relaciji:

$$v = \pi \cdot \int_0^{z_0} r^2 \cdot dz \tag{25}$$

Pošto zavisnost  $r(z)$  nije određena analitički, to se i integral (25) računa numerički. U tu svrhu se može koristiti Simpsonova formula (Kalitkin 1969), prema kojoj je:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \frac{h}{3} \cdot [r^2(0) + 4 \cdot r^2(h) + 2 \cdot r^2(2h) + \dots \\
&\dots + 2 \cdot r^2(nh - 2h) + 4 \cdot r^2(nh - h) + r^2(n \cdot h)]
\end{aligned} \tag{26}$$

Na taj način je za dati ugao kvašenja, odnosno granični uslov (18) i početnu vrednost  $r_0$ , moguće odrediti oblik krive  $K$ , odnosno zavisnost  $r = r(z)$ , čijom se rotacijom oko  $z$  ose dobija površina i zapremina kapljice. Pri tome se dobija i najveća visina kapljice  $z_0$  i konstanta  $z_c$  u relaciji (14). Ako je data zapremina kapljice, onda se za nju može odrediti oblik krive iterativnim postupkom u kome se povećava početna vrednost  $r_0$  dok se ne dostigne tražena vrednost  $V$ .

Za numeričko računanje zavisnosti  $r(z)$  napravljen je u programskom jeziku C++ program MarKap. Ulazni parametri programa su:

- karakteristike tečnosti: gustinu  $\rho$  i koeficijent površinskog napona  $\gamma$
- ugao kvašenja tečnosti i podloge  $\vartheta$
- zapreminu kapljice

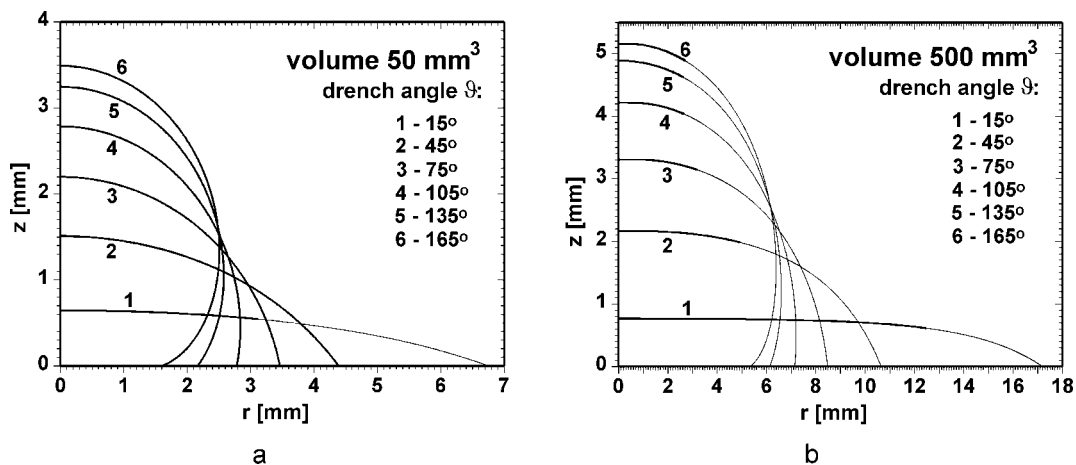
Pri tome se iterativnim postupkom u kome se za početnu vrednost  $r_0$  menja vrednost konstante  $z_c$  i tabelira zavisnost  $r=r(z)$  prema relacijama (22) i (23) dok se ne ispune granični uslovi (19). Pri tome se za korak  $h$  uzima  $10^{-2}$  mm ako je  $\xi=r'>-4$ , a  $10^{-3}$  mm ako je  $\xi=r'<-4$ , čime se obezbeđuje gušće tabeliranje zavisnosti  $r=r(z)$  kada je ta zavisnost strma. Kriterijum za ispunjenje graničnog uslova (19) podrazumeva da je on ispunjen kada je  $\xi=r'<-10^6$  i  $r\geq 0$ . Izračunavanje zapremine za vrednost  $r_0$  se vrši prema relaciji (26), primenjenoj posebno za slučaj većeg, a posebno za slučaj manjeg koraka. Ceo ovaj postupak se iterativno ponavlja, menjajući vrednost  $r_0$  dok izračunata zapremina ne bude jednaka ulaznoj vrednosti  $V$ , sa tačnošću od  $10^{-3}\cdot V$ . U oba iterativna postupka početne vrednosti su  $r_0 = 1$  mm i  $z_c = 1$  mm se povećavaju za jedan dok se ne odredi njihov red veličine a zatim se primenjuje metoda deljenja na pola.

## Rezultati i diskusija

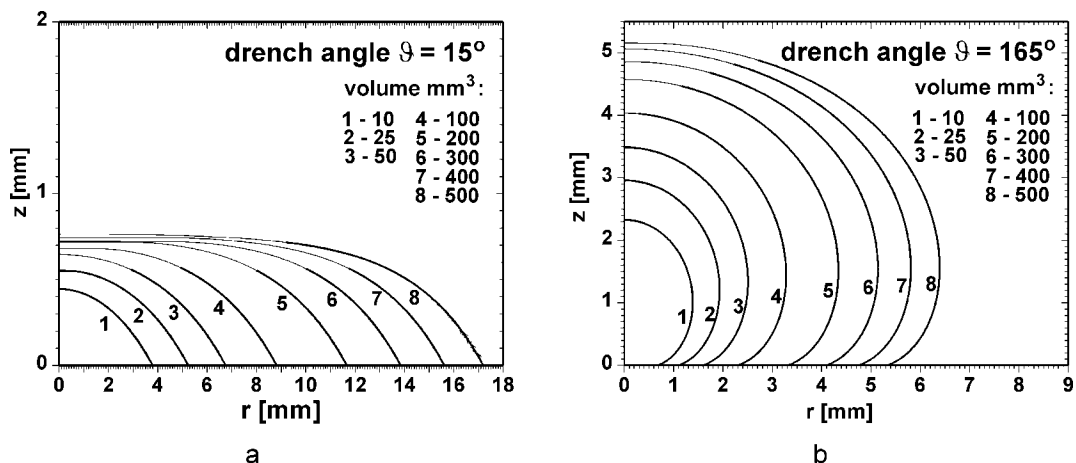
Zavisnost  $r(z)$ , odnosno krive  $K$  čijim se rotiranjem oko  $z$  ose dobija površina kapljice za slučaj vode na sobnoj temperaturi (gustina  $1000\text{ kg/m}^3$ , konstanta površinskog napona  $0.0725\text{ N/m}$ ) data je na slikama 3 i 4. Pri tome je ugao kvašenja menjan od  $15^\circ$  do  $165^\circ$  a zapremina od  $10\text{ mm}^3$  do  $500\text{ mm}^3$ . Sa ovih grafikona se vidi da je za kapljice manje zapremine površina više zakrivljena. Povećanjem zapremine površina u sredini kapljice postaje skoro ravna, i samo su krajevi zakrivljeni. Naravno, ovo je izraženo ako su uglovi kvašenja mali i manji od  $90^\circ$ . Ako su uglovi kvašenja veći od  $90^\circ$  ova pojava nije toliko izražena, mada se za veće za-

Slika 3. Oblik kapljice vode na ravnoj podlozi za različite uglove kvašenja, sa zapreminom kao parametrom.

Figure 3. The profiles of the drop on the ground vs. volume, with the drench angle as parameter



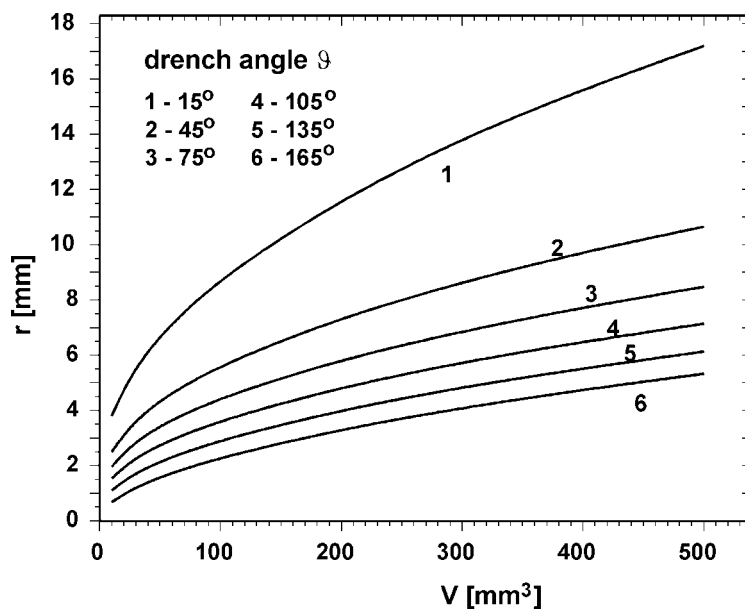




premine takođe dobija spljoštena kapljica. Svi proračunati oblici su očekivani i odgovaraju iskustvenim predstavama o obliku kapljice tečnosti na ravnoj površini, kao i zavisnosti tog oblika od zapremine i ugla kvašenja.

Na slici 5. data je proračunata zavisnost poluprečnika  $r_0$  kruga po kome kapljica dodiruje površinu od zapremine kapljice i ugla kvašenja, a na slici 6 proračunata zavisnost visine kapljice  $z_0$  takođe od njene zapremine i ugla kvašenja. Ove zavisnosti se mogu relativno lako proveriti eksperimentalno.

Na slici 7 prikazana je proračunata zavisnost konstante  $z_c$  od zapremine kapljice i ugla kvašenja. Te zavisnosti pokazuju da pri malim zapreminama  $z_c$  naglo opada i to intenzivnije ukoliko je ugao kvašenja veći,

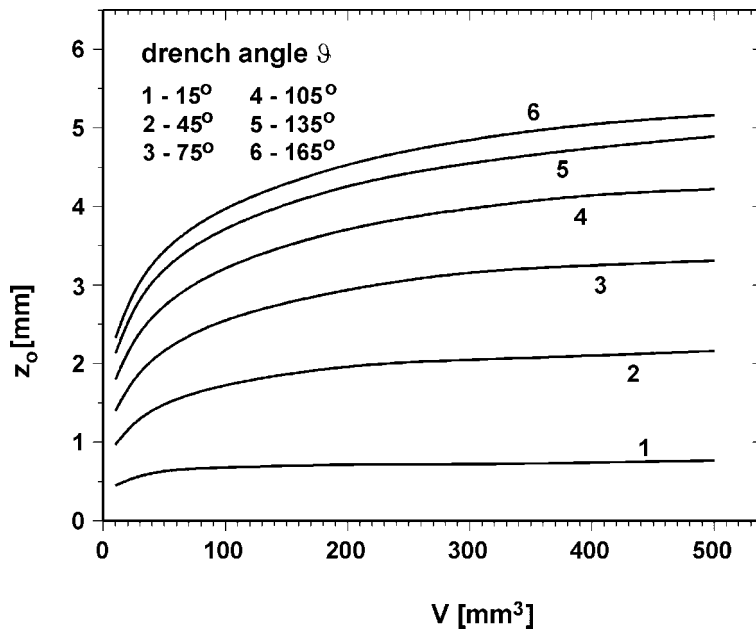


Slika 4. Oblik kapljice vode na ravnoj podlozi za različite uglove kvašenja, sa zapreminom kao parametrom

Figure 4. The profiles of the drop on the ground vs. drench angle, with the drop volume as parameter

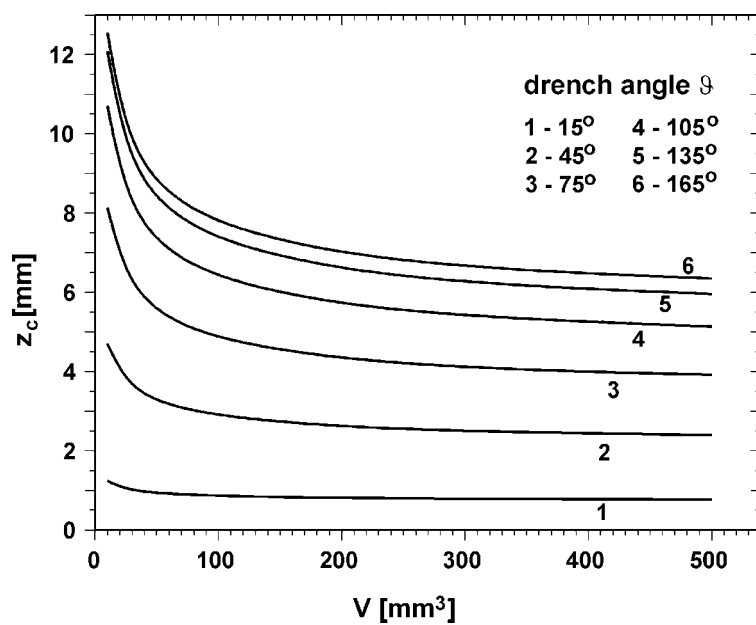
Slika 5. Proračunate zavisnosti poluprečnika kruga  $r_0$  po kome kapljica dodiruje podlogu od zapremine

Figure 5. The calculated dependences of radius  $r_0$  vs. volume of drop as drench angle



Slika 6.  
Proračunate zavisnosti visine kapljice od zapremine

Figure 6.  
The computed dependencies of drop height vs. volume of drop and drench angle



Slika 7.  
Proračunate zavisnosti konstante  $z_c$  od zapremine

Figure 7.  
The calculated dependencies of  $z_c$  vs. volume

dok za kapljice veće zapremine  $z_c$  ima praktično konstantnu vrednost, ali uvek veću kada je ugao kvašenja veći. U svakom slučaju  $z_c$  ima veću vrednost za kapljice manje zapremine i u slučaju da je ugao kvašenja veći. Veličini  $z_c$  možemo dati fizičku interpretaciju. Pritisak kojim kapljica tečnosti deluje na ravnu podlogu je upravo  $\rho \cdot g \cdot z_c$ . Prema proračunatim zavisnostima (slika 7) možemo zaključiti da je taj pritisak u toliko veći u koliko je ugao kvašenja veći i kad je zapremina manja. U stvari ovaj pritisak je

uvek veći od hidrostatičkog pritiska koji bi imao stub tečnosti visine jednake visini kapljice, ali sa smanjenjem ugla kvašenja i povećanjem zapremine kapljice teži da se sa njim izjednači. Do ovog zaključka može da se dođe upoređivanjem proračunatih zavisnosti  $z_0$  sa slike 6 i  $z_c$  sa slike 7. Za kapljice veće zapremine i u slučaju manjih uglova kvašenja pritisak kojim kapljica deluje na podlogu je praktično jednak odgovarajućem hidrostatičkom pritisku.

## Zaključak

U ovom radu analiziran je oblik koji kapljica tečnosti zauzima kada se nalazi na ravnoj čvrstoj podlozi. Polazeći od Laplasove formule za razliku pritisaka na graničnoj površini tečnosti i relacije za srednju krivinu krive površine tečnosti, došlo se do diferencijalne jednačine drugog reda koja ne može da se reši analitički. Za rešavanje ove jednačine napravljen je računarski program MarKap u programskom jeziku C++. Koristi metoda Runge-Kutta i dva ugnježdena iterativna postupka. Program računa oblik kapljice u granicama zapremine od 10–500 mm<sup>3</sup> i ugla kvašenja (u granicama od 1–189°), kao i pritisak kojim kapljica deluje na podlogu.

Analizirajući proračunate zavisnosti pritiska od zapremine kapljice i ugla kvašenja došli smo do zaključka da pritisak kojim kapljica deluje na podlogu veći od hidrostatičkog pritiska stuba tečnosti čija je visina jednaka visini kapljice, a da se smanjuje sa smanjenjem ugla kvašenja i sa povećanjem zapremine kapljice.

Takođe, za dati ugao kvašenja i zapreminu kapljice, proračunavan je poluprečnik kruga po kome kapljica dodiruje podlogu i njena visina. Bilo bi interesantno uporediti te zavisnosti sa odgovarajućim eksperimentalnim vrednostima.

---

## Literatura

- Friš S.E., Timorjeva A. V. 1969. *Kurs opšte fizike*. Beograd: Zavod za izdavanje udžbenika
- Kalitkin N. N. 1978. *Chislenye metody*. Moskva: Nauka.
- Landau L.D., Lifšic E.M. 1965. *Mehanika neprekidnih sredina*. Beograd: Građevinska knjiga
- Mihailović D. 1969. *Elementi vektorske analize, diferencijalne geometrije i teorije polja*. Beograd: Zavod za izdavanje udžbenika
- Vučić V., Ivanović D. 1970. *Fizika 1*. Beograd: Naučna knjiga.

## Calculation of the Profile of the Liquid Drop Situated on the Solid Flat Ground

In this paper it is analyzed the drop profile on the solid flat ground. Started from Laplace equation (11) for difference of pressure on the free surface and relation (15) for average curvature of surface, we reduced problem to a second order differential equation (17) which can't be solved analytically. Thereby, we created program MarKap. This program uses method Runge-Kutta, by relations (22) and (23) and two iterative cycles, one inside in the other, for numerical solving differential equation (17). The program input parameters are the drop volume (in the bounds of 10–500 mm<sup>3</sup>) and the drench angle (in the bounds of 1–179°).

The program MarKap is used for computing the water drops on the solid flat ground profile versus to the drench angle and volume. Also, for given drench angle and drop volume it is computed the radius of contact circle between drop and ground and height of drop.

Using program MarKap, we can determine the constant  $z_c$ , therefore, the drop pressure on the ground. Analyzing computed dependencies  $z_c$  versus drop volume and drench angle, we concludes that the drop pressure on the ground is greater than hydrostatic pressure of liquid with height same as height of the drop. This pressure decreases as drench angle decrease and as drop volume increase.

