

Haos pri pobuđenom i prigušenom kretanju fizičkog klatna

U ovom projektu prikazane su neke od osobina haosa i prethaotičnog stanja na primeru fizičkog klatna sačinjenog od metalne šipka zanemarljive mase na čijem je jednom kraju bila kuglica mase m , dok je drugi kraj sinusoidalno oscilovao u nekom pravcu horizontalne ravni. Takođe, izvršena je i procena vrednosti Fajgenbaumove konstante.

Uvod

Proučavanje determinističkog haosa i fizika haosa uopšte spadaju u nove grane fizike. To je zato što se haos javlja jedino kod nelinearnih dinamičkih sistema, čije je detaljnije proučavanje tek odskora postalo moguće. Naime, pre pojave kompjutera, nikako se, ili barem veoma teško, nisu mogli rešavati nelinearne diferencijalne jednačine, zato što ta rešenja i ne postoje u analitičkom obliku, tj. ne mogu se napisati kao kompozicije elementarnih funkcija (stepene, logaritamske, eksponencijalne, trigonometrijske...). Zbog toga su fizičari i pokušavali da svoje teorije grade na linearnim diferencijalnim jednačinama i, na sreću, one su uglavnom davale dobre rezultate (najuspešnije teorije, kao elektrodinamika ili kvantna fizika, bazirane su na linearnim diferencijalnim jednačinama). No, i pored toga postojale su mnoge starije teorije bliže svakodnevnom životu, poput dinamike fluida, koje su bile mnogo manje uspešne, prvenstveno zbog toga što su bazirane na nelinearnoj dinamici.

Pojavom kompjutera mnogo toga se promenilo, pošto je postalo moguće da se sa zadovoljavajućom tačnošću numerički rešavaju i nelinearne diferencijalne jednačine. Međutim, baš zato što je princip rešavanja tih jednačina numerički, tj. manje tačan od analitičkog, često se umesto određivanja kvantitativnih rešenja, više razmatraju kvalitativni aspekti rešenja - stabilnost rešenja, pojava bifurkacija rešenja... Jedan od najinteresantnijih fenomena nelinearnih sistema je mogućnost pojave deterministi-

Stefan Salom (1981), Beograd, Dr Agostina Neta 84, učenik 4. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

čkog haosa. To znači da kretanje sistema opisuje veoma komplikovana neperioidična funkcija vremena, koja se, svakako, ne može analitički izraziti.

Sam termin „deterministički kaos” može delovati veoma zbunjujuće na prvi pogled. Haotično ponašanje, intuitivno, jeste nepredvidivo i na slučajnostima bazirano ponašanje. „Deterministički” je, pak, sama suprotnost tome – ako su poznati početni uslovi i jednačine koje opisuju kretanje sistema, onda je stanje sistema u bilo kom trenutku jednoznačno određeno. Pa kako nešto može biti i haotično i određeno istovremeno? Odgovor na to daje jedna od fundamentalnih osobina determinističkog haosa – velika osetljivost na početne uslove. To znači da ako neka dva sistema vrše haotično kretanje koje opisuju iste jednačine i ako se njihovi početni položaji u faznom prostoru razlikuju proizvoljno malo, ta razlika će, nakon što prepustimo sistem samom sebi, eksponencijalno rasti, da bi kasnije, uz uslov da je fazni prostor ograničen, mogla imati bilo koju vrednost koju veličina faznog prostora dopušta. Otuda i nepredvidljivost ponašanja haotičnih sistema: početni položaj moguće je znati samo do na neku tačnost – u krajnjoj liniji onu tačnost koju dopušta Hajzenbergov princip neodređenosti – i stoga od nekog trenutka daljnje kretanje tog sistema postaje veoma nepredvidivo, iako je zasnovano na determinističkim zakonima. Zbog toga dolazi i do poznatog efekta leptira: „dovoljno je da leptir u Evropi zaleprša svojim krilima i da to kroz tri dana izazove tornado u Severnoj Americi”.

Takođe, do haotičnog kretanja ne dolazi samo u sistemima od reda veličine 10^{23} molekula, pa da su neophodne statističke metode opisivanja, ili kod sistema sa šumom. Naprotiv, do haosa dolazi i kod krajnje jednostavnih mehaničkih sistema sa samo jednim stepenom slobode. Uostalom, i cilj ovog projekta je ilustrovanje nekih osobina haosa na primeru običnog fizičkog klatna, koje se sastoji od šipke zanemarljive mase na čijem kraju je mala kugla mase m , čija tačka vešanja sinusoidalno osciluje u jednom pravcu horizontalne ravni po jednačini $x = A \sin \omega t$.

Jednačine kretanja

Pošto do determinističkog haosa, kao što je već rečeno, dolazi samo kod nelinearnih sistema, umesto klasičnih linearizovanih jednačina kretanja, ovde ćemo analizirati kretanje klatna čiji ugao otklona ne mora biti mali i samim tim nećemo koristiti aproksimacije tipa $\sin \varphi \approx \varphi$. Ako posmatramo klatno iz neinercijalnog sistema vezanog za tačku vešanja klatna, na klatno deluje inercijalna sila $F_i = mA\omega^2 \sin \omega t$, gde je A amplituda tačke vešanja klatna, ω kružna frekvencija oscilovanja, a m masa klatna. Ta sila u odnosu na tačku vešanja ima moment $M_i = mL A \omega^2 \sin \omega t$, pri

čemu je l dužina klatna. Takođe na klatno deluje i sila prigušenja, kao i gravitaciona sila. Nakon sređivanja, jednačina kretanja izgleda ovako:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{A\omega^2 \sin \omega t}{l} \cos \varphi = 0$$

pri čemu je γ koeficijent prigušenja.

Metod rada

U programskom okruženju Delphi 3.0 napisana je simulacija kretanja klatna po već navedenoj jednačini kretanja. Položaj klatna računat je korišćenjem Runge-Kutove metode četvrtog reda, pri čemu je jedinični korak imao vrednost od 10^{-4} . Takođe, napisan program omogućavao je vizuelno praćenje položaja klatna, osciloskopski prikaz zavisnosti ugla ili ugaone brzine od vremena, crtanje položaja klatna u faznom prostoru, kao i menjanje, u bilo kom trenutku, nekog od parametara koji određuju položaj klatna i njegovo kretanje (ugao, ugaona brzina, amplituda, frekvencija i faza pobude...).

Vršene su simulacije za različite vrednosti ulaznog parametara A , dok se ostali parametri nisu menjali. U simulacijama čiji će se rezultati analizirati u ovom radu bili su fiksirani sledeći parametri:

dužina klatna: $l = 1$ m

kružna frekvencija oscilovanja: $\omega = 2\pi \cdot 1.2$ Hz ≈ 7.54 s⁻¹

koeficijent prigušenja: $\gamma = 1$ s⁻¹

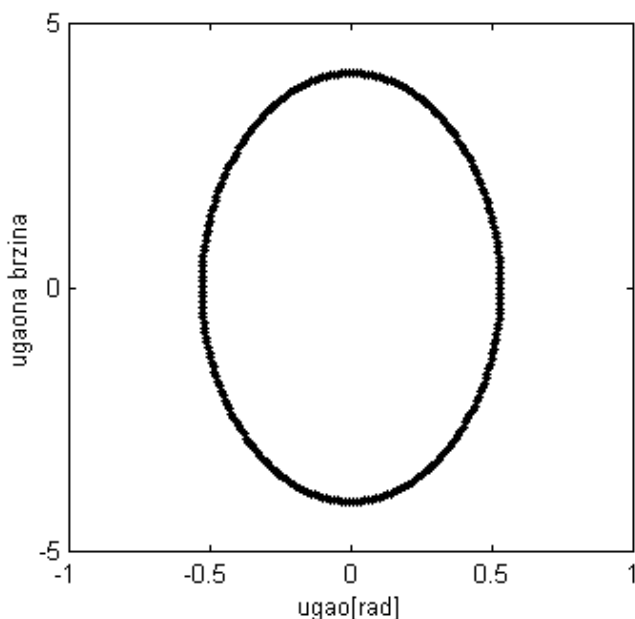
Rezultati

Nehaotični režim kretanja

Iako je neki dinamički sistem nelinearan, to ne znači da se on uvek ponaša haotično. Haotično kretanje počinje (ako uopšte počinje, pošto postoje i neki nelinearni dinamički sistemi koji nikada ne prelaze u kaos) tek kada parametri koji određuju to kretanje pređu neku kritičnu vrednost. U slučaju ovog eksperimenta, pošto su ostali parametri fiksni, do haotičnog kretanja dolazi tek kada A pređe kritičnu vrednost od A_K (dalje ćemo videti koja je to vrednost), dok je kretanje za manje vrednosti A periodično sa više perioda. Ponašanje sistema pri $A < A_K$ i pri $A > A_K$ se veoma razlikuju. Prvo ćemo analizirati šta se dešava ako A još uvek nije prešlo kritičnu vrednost.

Za relativno male vrednosti parametra A , amplituda oscilovanja klatna je dovoljno mala, tako da se klatno ponaša u skladu sa linearizovanim

jednačinama kretanja u okolini tačke $\varphi = 0$, tj. slično onome kako se uči u školi. Nakon početnog perioda relaksacije, klatno osciluje oko tačke $\varphi = 0$ sa frekvencijom koja je jednaka frekvenciji oscilovanja tačke vešanja. U faznom prostoru, kretanje klatna opisuje elipsu, kao što se može videti na slici 1.

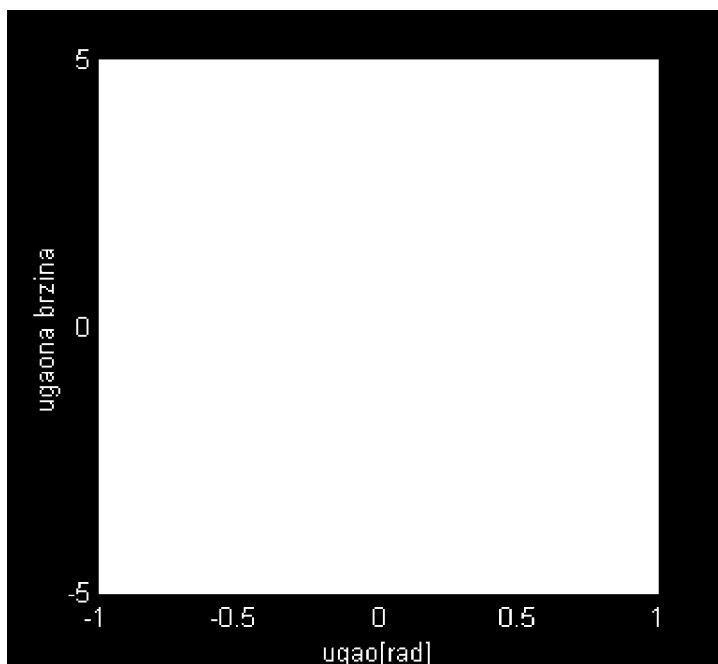


Slika 1.
Izgled faznog prostora za male vrednosti parametra A

Figure 1.
Look of phase space for small values of parameter A .

Sa porastom parametra A , raste i amplituda oscilovanja klatna. Interesantna stvar se dešava kada parametar A pređe vrednost od približno 0.574 m. Klatno i dalje osciluje samo sa jednom periodom s time što više ne osciluje oko tačke $\varphi_0 = 0$, već oko neke druge tačke φ' , $|\varphi'| > 0$. Svakako, za isto A , zbog simetrije, postojaće dve tačke oko kojih klatno može oscilovati: φ'_0 i $-\varphi'_0$. Tako, na primer, za $A = 0.6$ m, klatno može oscilovati u intervalu $\varphi \in (-0.1777, 0.9566)$ i, zbog simetričnosti ova dva slučaja, u intervalu $\varphi \in (-0.9566, 0.177)$. U faznom prostoru kretanje klatna više ne opisuje elipsu, i centar te figure koju klatno opisuje pomeren je ulevo ili udesno (u zavisnosti od toga u kom intervalu osciluje). Na slici 2 vidimo izgled faznog prostora za $A = 0.6$ m.

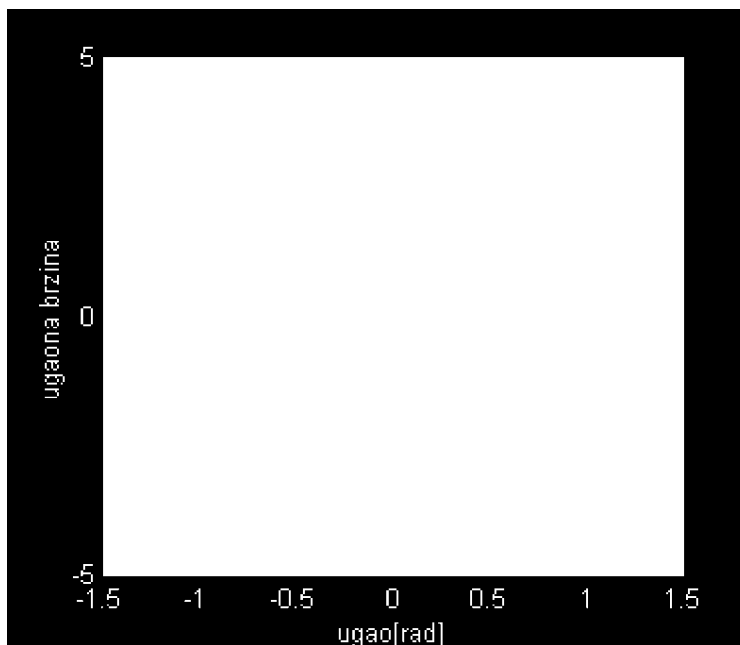
Do još jednog interesantnog fenomena dolazi sa daljim porastom vrednosti parametra A . Naime, za $A = A_1 \approx 0.68685$ dolazi do bifurkacije, odnosno do udvajanja periode. Tačku nazovimo tačkom bifurkacije prvog reda. Od tog trenutka, nakon relaksacije, klatno ne vrši više prosto peri-



Slika 2.
Izgled faznog
prostora za $A = 0.6 \text{ m}$

Figure 2.
Look of phase space
for $A = 0.6 \text{ m}$

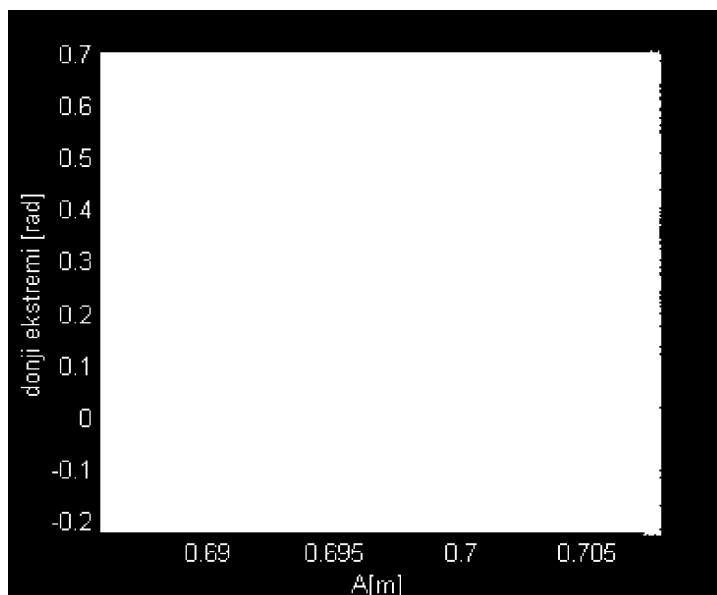
odično oscilovanje, već ima dve periode. Na primer, za $A = 0.688$, ono se pomera od ugla $\varphi_1 \approx 0.2035$ do ugla $\varphi_2 \approx 1.2647$, pa onda do ugla $\varphi_3 \approx 0.32317$, zatim do ugla $\varphi_4 \approx 1.2576$, i onda konačno ponovo do ugla φ_1 , i tako u krug. U faznom prostoru klatno opisuje figuru prikazanu na slici 3.



Slika 3.
Izgled faznog
prostora za
 $A = 0.688 \text{ m}$. Jasno
se vidi bifurkacija.

Figure 3.
Look of phase space
for $A = 0.688 \text{ m}$.
Bifurcation can easily
be seen.

Takođe, ako nastavimo da povećavamo parametar A za neku vrednost A_2 doći će do sledeće bifurkacije i od svake periode dobićemo dve nove, tako da će sistem vršiti oscilacije sa četiri periode, pa ako i dalje povećavamo, sa osam (u nekoj tački A_3), 16 (u tački A_4), 32 (u tački A_5)... sve dok A ne bude veće od A_K , kada sistem prelazi u haos. Zanimljiv je grafik na slici 4 koji predstavlja zavisnost vrednosti donjih ekstrema ugla φ (najniže tačke do kojih klatno stiže u svojim pojedinačnim periodama) od vrednosti parametra A . Taj grafik je dobijen tako što je, za stotinak različitih vrednosti parametra A , sistem pušten da relaksira oko 2700 s (za neke vrednosti i manje), da bi zatim na grafik bile nanete sve dobijene vrednosti za donje ekstreme ugla φ u sledećih nekoliko desetina ili stotina sekundi, u zavisnosti od procenjenog broja perioda za dati parametar A .



Slika 4.
Grafik zavisnosti donjih ekstrema ugla φ od parametra A

Figure 4.
Graph of the dependence of lower extremes of angle φ on parameter A

Primitimo da se na početku grafika jasno vidi jedna linija koje se kasnije udvostručuje (tačka A_1), da bi se u tački A_2 obe linije ponovo udvostručile itd. (ovde se zbog loše rezolucije to se ne vidi dobro, ali ako bi se odgovarajući deo uvećao, nove tačke bifurkacije bi se jasno videle), da bi za neku vrednost A prestale razlike između linija i donji ekstremi bi uzimali razne vrednosti bez periodičnosti – tj. sistem je prešao u haos.

Izračunavanje Fajgenbaumove konstante

Definišimo sledeće vrednost:

$$d_n = A_{n+1} - A_n \quad i$$

$$\delta_n = \frac{d_n}{d_{n+1}}$$

Po teoriji, vrednost $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n$ (u daljem tekstu δ) je konstantna za skoro sve nelinearne sisteme koji mogu preći u kaos, i zove se Fajgenbaumova konstanta. Njena vrednost je $\delta \approx 4.6692016091$ (Belić 1990).

No, pošto su vrednosti koje se dobijaju numeričkim putem samo delimično tačne i pošto se kompjuterskim računom može dobiti samo diskretan, a ne kontinualan grafik, veoma je teško proceniti kada počinje stanje sistema sa 64 periode, a kamoli da se izračuna Fajgenbaumova konstanta. Jedino što može da se uradi jeste da se vrednost δ ograniči i to samo odozgo. Evo kako je to urađeno – dobijene su sledeće vrednosti (tabela 1):

Tabela 1. Vrednosti parametra A za prvih pet bifurkacija

Red bifurkacije (n)	A_n	ΔA_n
1	0.68685	0.00005
2	0.70262	0.000025
3	0.7052	0.00001
4	0.705728	0.000005
5	0.705848	0.000001

Može se poroceniti da kaos počinje za $A = (0.705883 \pm 0.000002)$ m. Osim sa grafika ta se procena može izvršiti na još jedan način. U fajlove se snime svi donji ekstremi ugla φ , počevši od $t_1 = 500$ s (da bi se za to vreme sistem relaksirao), pa sve do t_2 za različite vrednosti parametra A. Zatim se može videti da li sistem vrši periodično kretanje, tako što se za vrednosti broja n , $n \in \{1, 2, \dots, 1500\}$ izvrši sledeća operacija: od poslednjih brojeva se oduzme odgovarajućih pretposlednjih n brojeva, i apsolutne vrednosti dobijenih vrednosti se usrednje. Nazovimo taj rezultat $R(n)$. Pošto je simulacija rađena numerički, mogla su se javiti mala odstupanja od pravih vrednosti. To znači da, iako sistem vrši, na primer, kretanje sa 4 periode, svaki četvrti broj u fajlu ne mora biti isti, već će se razlikovati za neku vrednost, tako da ono n , za koje je najmanja vrednost $R(n)$, ne mora biti broj perioda u tom kretanju, već neki njegov sadržalac. No, posmatranjem na većem broju fajlova gde je periodičnost manje-više evidentna, primećeno je da vrednost $R(n)_{\min}$ spada u interval $[10^{-10}, 10^{-6}]$, dok za $A = 0.705883$ m, $R(n)_{\min}$ naglo raste, i ima vrednost reda veličine 10^{-4} .

Izračunajmo sada prvih nekoliko vrednosti za δ_n . Očigledno je da sa porastom n , vrednost za δ_n opada. Uz pretpostavku da je niz (δ_n) opadajući (što nećemo dokazivati ovde), možemo dokazati da on ima limes, i da taj limes ne može biti veći od 4.7 (to da niz ima limes, sledi iz poznate teoreme da svaki odozdo ograničen i monotono opadajući niz ima limes, a svako δ_n mora biti veće od 1 jer u suprotnom nikada ne bi počeo haos). Primitimo da haos počinje u tački A_K , za koju mora važiti:

$$A_K = A_l + \sum_{i=1}^{\infty} d_i = A_l + \sum_{i=1}^{\infty} d_i.$$

Uz pretpostavku da je niz (δ_n) opadajući očigledno je da:

$$d_{i+1} = \frac{d_i}{\delta_i} < \frac{d_i}{\delta}.$$

Odatle, pak, sledi da je $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$ manja od sume geometrijske progresije čiji je prvi član d_i , a korak $1/\delta$. Sada imamo:

$$A_K = A_l + \sum_{i=1}^{\infty} d_i < A_l + \frac{d_i}{1 - 1/\delta}.$$

Posle sređivanja dobijamo:

$$\delta < \delta_{\max} = \frac{A_K - a_l}{A_K - A_l - d_l} = \frac{A_K - a_l}{A_K - A_{l+1}}.$$

Uzimajući za l vrednosti iz skupa $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, zamenom vrednosti drugih veličina i izračunavanjem greške konačno imamo:

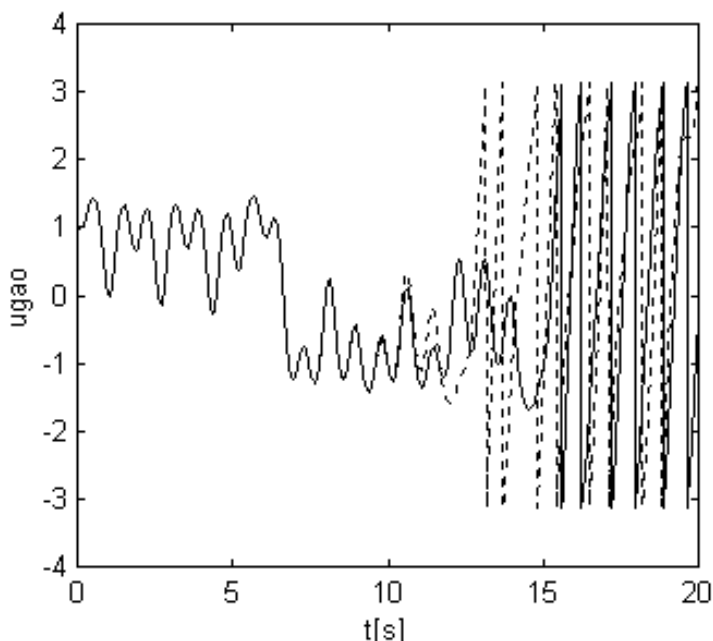
l	δ_{\max}
1	5.83 ± 0.07
2	4.78 ± 0.13
3	4.4 ± 0.3
4	4.4 ± 0.4

Na žalost, ovom metodom nemoguće je ograničiti δ odozdo. Međutim, čak i iz samo ove četiri vrednosti ograničenja očigledno je da

sa porastom l vrednosti δ teži ka nekoj vrednosti u intervalu $[4.0, 4.8]$. Treba primetiti da se ovaj rezultat slaže sa pravom vrednošću Fajgenbaumove konstante (Belić 1990).

Haotični režim kretanja

Do sada smo pokazivali samo osobine sistema za $A < A_K$. Sada ćemo videti šta se dešava kada sistem počne haotično da se ponaša. Radi ilustracije osetljivosti haotičnih sistema na početne uslove, na slici 5 su prikazane zavisnosti ugla otklona (od vertikale) dva različita klatna od vremena. Oba klatna imale su iste početne parametre ($A = 0.74$), s tim što je prvo klatno, čija je trajektorija na grafiku iscrtana punom linijom imalo početni ugao $\varphi_1(0) = 1$ dok je drugo klatno (isprekidana linija) imalo $\varphi_2(0) = 1.0000001$.

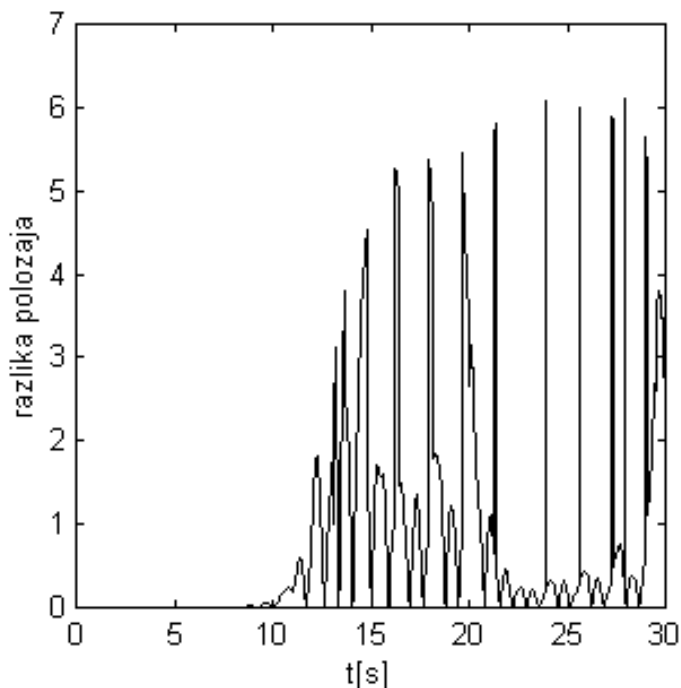


Slika 5.
Grafik zavisnosti ugla otklona dva različita klatna, čiji se početni položaji malo razlikuju, od vremena. Sistem je u haotičnom režimu.

Figure 5.
Graph of dependence of values of angles of two different pendulums which starting positions differ for a small value. System is in chaotic regime.

I pored toga što je razlika iznosila samo $\Delta \varphi = 10^{-7}$, ta razlika je veoma brzo rasla, da bi već oko $t = 11$ s kretanja klatna postala sasvim različita. To se lepo vidi na slici 6 koji prikazuje zavisnost $\Delta \varphi$ od t .

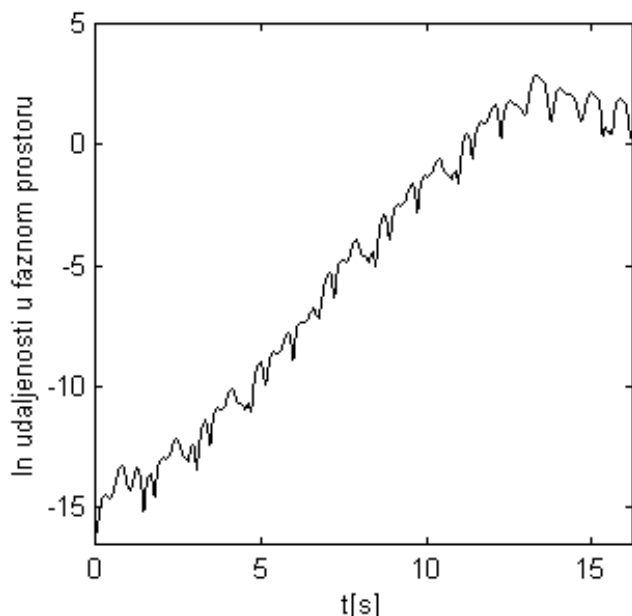
U početku razlika raste eksponencijalnom brzinom, da bi kasnije uzimala sasvim slučajne vrednosti. Nagli padovi na grafiku posledica su mimoilaženja ova dva klatna. Bolju ilustraciju rasta razlike stanja dva klatna dobijamo ako posmatramo zavisnost vrednosti logaritma njihove udaljenost



Slika 6.
Grafik zavisnosti
razlike uglova
otklona dva klatna od
vremena

Slika 6.
Graph of dependence
of difference of
angles of two
pendulums on time

u faznom prostoru (pošto je trenutno stanje određeno i sa $d\Phi / dt$) od vremena, kao što je prikazano na slici 7. Na njemu su nagli padovi vrednosti funkcije mnogo slabije izraženi, a takođe je i uočljivija eksponencijalna priroda rasta te razlike.



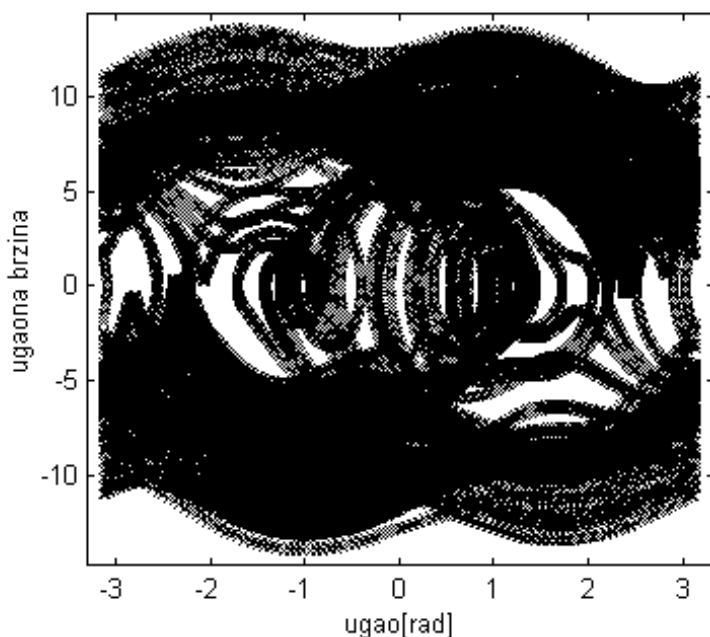
Slika 7.
Grafik zavisnosti
logaritma udaljenosti
dva klatna u faznom
prostoru od vremena.

Figure 7.
Graph of dependece
of logarithm of
distance of two
pendulums in phase
space on tume.

Pokazuje se da je ta razlika srazmerna sa $\exp(\lambda t)$, pri čemu je λ Ljapunovljev eksponent (ovo nije egzaktna definicija Ljapunovljevog eksponenta, već jedna njegova osobina; međutim, ta osobina sledi direktno iz definicije Ljapunovljevog eksponenta, koja je mnogo komplikovanija, a nema je ni potrebe ovde iznositi). Faktički, Ljapunovljev eksponent je mera haotičnosti sistema (što je veći, sistem je haotičniji), tj. brzine kojom se gubi predvidljivost sistema. Takođe, Ljapunovljev eksponent za neki sistem može biti i negativan – to znači da će se i trajektorije koje su na početku bile međusobno udaljene u faznom prostoru, vremenom doći jedna blizu druge. To se, uostalom, dešava i sa našim klatnom kada je parametar dovoljno mali – bez obzira na početne uslove, posle nekog vremena relaksacije klatno će oscilovati na isti način.

Ovde valja primetiti još jednu interesantu stvar. Za $A = 0.7043$, u zavisnosti od početnih uslova, mogu se dobiti dva tipa kretanja koji se ne razlikuju samo po znaku (tj. ukupno četiri tipa kretanja). Tako, na primer, za $\varphi(0) = 0$, dobija se 20-ak donjih ekstrema koji se ne uklapaju u grafik 1.4, dok se za $\varphi(0) = 1$, dobijaju baš 4 donja ekstrema koji dobro odgovaraju ostatku grafika. Ova osobina nije primećena samo za $A = 0.7043$, već, što je i za očekivati, i za druge vrednosti parametra A , i bilo bi više nego interesantno istražiti to ponašanje u nekom drugom projektu.

Dobru ilustraciju haosa daje i prikaz trajektorije klatna u faznom prostoru. Na slici 8 se vidi trajektorija klatna pri $A = 0.74$ (posle nekog

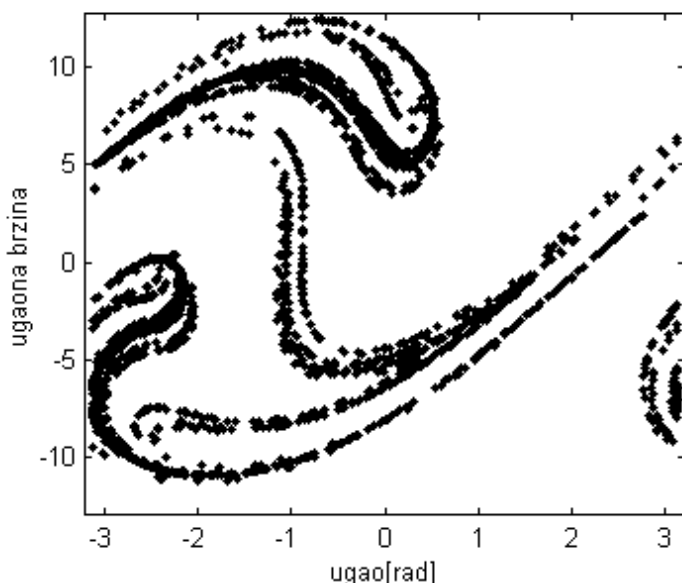


Slika 8.
Trajektorija klatna, koje je u haotičnom režimu, u faznom prostoru.

Figure 8.
Trajectory of pendulum in phase space. Pendulum is in chaotic regime.

perioda relaksacije). Za razliku od putanje klatna u faznom prostoru pri periodičnom kretanju, koje se sastoji od nekoliko zatvorenih krivih (u zavisnosti od broja perioda), u slučaju haotičnog kretanja, klatno opisuje mnogo kompleksnije figure.

Uopšte, izgleda kao da pri haotičnom kretanju ne postoji nikakva predvidljivost i neka opšta zakonitost, bez obzira na početne uslove. Međutim, nije tako. Ako beležimo u faznom prostoru samo one položaje klatna kada je faza pobude jednaka 0, dobićemo interesantnu sliku, koja se vidi na slici 9.



Slika 9.
Izgled Poencareovog
preseka za
 $A = 0.74$ m.

Figure 9.
Look of Poencare
section for
 $A = 0.74$ m.

Dobijena slika zove se Poencareov presek. Međutim prava definicija Poencareovog preseka je mnogo komplikovanija i slučajno u našem

slučaju izgleda kao stroboskopsko posmatranje sa periodom $\tau = \frac{2k\pi}{\omega}$. In-

teresantna osobina Poencareovog preseka je da on veoma slično izgleda bez obzira na početne uslove. U stvari, kada bismo mogli da pustimo klatno da se kreće beskonačno dugo vremena, Poencareovi preseki za različite početne uslove bili bi isti (Belić 1990).

Pri nehaotičnom kretanju na Poencareovom preseku se vidi samo konačan broj tačaka, preciznije, onoliko tačaka koliko ima perioda to kretanje. Međutim, pokazuje se da se u režimu haosa na njemu pojavljuje beskonačno mnogo tačaka i figura koja se dobija ima oblik fraktala. Fraktali su geometrijski oblici koji nemaju ceo broj dimenzija. Svakako, oni imaju veliki broj interesantnih osobina, ali njihovo izučavanje nije tema ovog rada.

Uopšte, u haotičnom režimu kretanja postoji konačno mnogo p -periodičnih prozora, $p = 3, 4, 5, \dots$ u kojima se takođe dešavaju grananja sa udvostručenjem broja perioda: $p, 2p, 2^2p, \dots$ i sa istom vrednosti konstante δ . Moguća su i prozori u kojima se javljaju utrostručenja broja perioda $p \cdot 3^n$, učtverostručenja $p \cdot 4^n$, upetostručenja $p \cdot 5^n$ itd, ali su mnogo manje širine od osnovne serije prozora. I za ove prozore postoji Fajgenbaumova konstanta, ali ona u ovom slučaju ima vrednost $\delta' = 55.247$ (Belić 1990). Ove poslednje tvrdnje je veoma teško numerički prikazati i potreban je mnogo snažniji kompjuter da bi se to ilustrovalo (ako bi se uopšte i tada to moglo učiniti).

Greške simulacije

Greške simulacije su posledica toga što su sva izračunavanja u simulaciji numerička, te samim tim imaju grešku. One su procenjivane tako što je rađena simulacija (pri čemu je na disk zapisivan položaj klatna na svaku stotinku) sa potpuno istim početnim parametrima osim što je jedinični korak varirao, uzimajući vrednosti $\Delta t_1 = 5 \cdot 10^{-4}$, $\Delta t_2 = 10^{-4}$ i $\Delta t_3 = 10^{-5}$. Za one vrednosti parametra A za koje sistem i dalje vrši periodična kretanja za sve tri vrednosti jediničnog koraka vrednosti uglova su i posle veoma približne i razlika je bila reda veličine 10^{-4} . Međutim za one vrednosti parametra A za koje dolazi do haotičnog kretanja, situacija je bila umnogome drugačija – kretanja klatna su izgledala potpuno različito (počevši od nekog trenutka). Naime, pošto je haotično kretanje veoma osetljivo na početne uslove, a numeričko izračunavanje daje samo približno tačna rešenja, već posle prvih 500 mikrosekundi (što je faktički NZS ($\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$)), vrednosti ugla otklona razlikovaće se međusobno u ova tri slučaja. Ta razlika će eksponencijalno rasti (čak i da nema daljnjih numeričkih grešaka pri izračunavanju; njihovo postojanje još više ubrzava rast razlike) i ubrzo ta tri kretanja uopšte više neće ličiti jedno na drugo. Zato su u ovom projektu i proučavane samo kvalitativne, a ne i kvantitativne osobine haotičnog kretanja.

Šta dalje?

Daleko od toga da ovaj projekat treba ovde da se završi. Ostalo je dosta toga što još može da se uradi i analizira, ali, na žalost, zbog nedostatka resursa, pre svega vremena i kompjuterskih performansi, to se sada nije moglo učiniti. Tako bi se, na primer, mogla izračunati fraktalna dimenzija Poenkareovog preseka za razne vrednosti parametra A i možda naći neka zavisnot. Zanimljivo bi bilo i eksperimentalno izračunati vres-

nost konstante δ u osnovnim prozorima, kao i pokušati pronaći prozore za utrostručenjem broja perioda. Takođe, valjalo bi mnogo dublje istražiti zašto se pri $A = 0.7043$ javljaju dve vrste periodičnosti, kao i da li se možda i pri tom, drugom, tipu periodičnosti javljaju bifurkacije. Sve u svemu, iako je ovaj projekat relativno opširan, on zaista otvara prostor za mnoga druga istraživanja.

Literatura

Belić, M.R. 1990. *Deterministički kaos*. Beograd: SFIN, Institut za teorijsku fiziku

Internet:

<http://www.thphys.may.ie/CompPhis/homenjork/third/pend>

<http://www.gerry-leo.demon.co.uk>

<http://www.physik.unibas.ch/~elmer/pendulum/index.html>

Stefan Salom

Chaotic Behavior of A Driven Pendulum

The aim of this project was to illustrate some characteristics of deterministic chaos on the example of a driven pendulum – Lyapunov exponent, bifurcations, sensitivity of the chaotic system on the initial conditions... Also, an estimation of Feigenbaum's constant δ has been done, and the results achieved were in compliance with theoretical expectations. Graphs of figures 1, 2, and 3 show the look of the phase space for some different driving parameters of system, for which it still behaves non-chaotically. The bifurcations of the system can easily be seen on Figure 4, which shows the dependence of the lower extremes of pendulum angle on driving parameters. Sensitivity on the initial conditions is shown on Figure 5, while graphs on figures 6 and 7 illustrate Lyapunov exponent. Figure 8 represent the look of phase space, for a driving parameter, for which system has entered chaos. Figure 9 show the Poencare section of the chaotic pendulum behavior. And, finally, graph on Figure 10 shows the enlarged part of graph on Figure 4, where a non-chaotic window in chaotic neighbourhood can be seen.

