

Statistički metod za određivanje ugla između ravni polarizacije polarizatora i ravni polarizacije analizatora

Cilj ovog ekperimenta je ispitivanje metode za određivanje početnog ugla između ravni polarizacije polarizatora i ravni polarizacije analizatora, korišćenjem Malu sovog zakona. Izraziviši nepoznati ugao preko površine elipse koja predstavlja zavisnost intenziteta svetlosti od kvadrata kosinusa ugla analizatora, dobijene su vrednosti sa gereškom od 0.4° . Grešku za površinu elipse odredili smo numerički Monte Karlo simulacijom, u kojoj smo koristili samo pretpostavke o raspodeli grešaka pri merenju ugla i intenziteta. Na taj način smo dobili vrednost greške bez korišćenja eksplicitnih obrazaca.

Uvod

Svetlost je elektromagnetni talas kod koga električno polje osciluje u ravni normalnoj na ravan oscilovanja magnetnog polja. Svetlosni izvor emituje talase koji imaju različite ravni oscilovanja električnih polja, tj. ravni polarizacije i takva svetlost je nepolarizovana svetlost.

Postoje supstance koje iz nepolarizovane svetlosti izdvajaju samo one talase čije su ravni oscilovanja električnog polja međusobno paralelne. Svetlost dobijena na ovaj način naziva se linearno polarizovana svetlost, a takve supstance polarizatori. Analizatorom nazivamo polarizator kroz koji prolazi već polarizovana svetlost.

Svetlosni talas koji prolazi kroz analizator možemo razložiti na dve komponente, jednu E_n duž ravni polarizacije analizatora i drugu E_r koja je normalna na nju (slika 1). Ukoliko je ugao između ravni polarizacije talasa i ravni polarizacije analizatora jednak θ , kroz analizator će proći komponenta $E_n = E \cos \theta$, dok će komponenta $E_r = E \sin \theta$ biti apsorbovana. Kako je energija elektromagnetnog talasa proporcijalna kvadratu amplitude električnog polja, onda će deo energije koja prođe kroz analizator u odnosu na upadnu W biti:

*Ana Kojić (1982),
Bijeljina, Save
Kovačevića 9/11,
učenica 2. razreda
Gimnazije "Filip
Višnjić" u Bijeljini*

*Miloš Brčkalo (1982),
Čačak, Sindelićeva
54/10, učenik 2.
razreda Gimnazije u
Čačku*

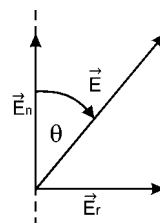
$$\frac{W}{W_0} = \frac{E^2}{E_0^2} = \frac{E_0 \cos^2 \theta}{E_0^2} = \cos^2 \theta,$$

odakle sledi

$$W = W_0 \cos^2 \theta.$$

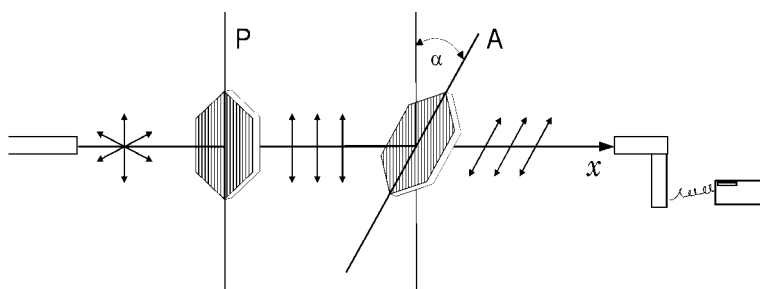
Ova relacija opisuje Malusov zakon koji glasi: Intenzitet svetlosti koju propušta analizador srazmeran je kvadratu kosinusa ugla između ravni polarizacije analizatora i polarizatora.

Kada su ravni polarizacije polarizatora i analizatora paralelne onda je intenzitet svetlosti maksimalan, tj. polarizovana svetlost u potpunosti prolazi kroz analizador, a kada je taj ugao jednak 90° , polarizovana svetlost ne prolazi kroz analizador (slika 2).



Slika 1.
Svetlosni talas razložen na dve komponente (E_n i E_r).

Figure 1.
Light wave divided on two components.



Slika 2.
Šema eksperimentalnog uređaja:
P – polarizator
A – analizador
 α – ugao analizatora

Figure 2.
Experimental setup:
P – polarizer
A – analyzer
 α – angle of analyzer

Ekspерiment

Aparatura

Šema aparature data je na slici 2. Osnovne komponente su:

- laser
- polarizator i analizador (koji se može rotirati)
- merač snage svetlosti (light-power meter)

Kao izvor nepolarizovane svetlosti korišćen je He-Ne laser. Laserski zrak je prolazio kroz polarizator i analizador, a zatim padao na fotočeliju merača snage svetlosti. Polarizator i analizador su postavljeni tako da međusobno budu paralelni dok je pravac prostiranja laserskog snopa normalan na njihove ravni.

Nacrt i ideja eksperimenta

Menjali se ugao analizatora (α), a time i intenzitet svetlosti. Na meraču snageza svaku vrednost ugla α očitava se vrednost snage svetlosti. Predstavljajući zavisnost intenziteta svetlosti od kvadrata kosinusa ugla

α , na grafiku se dobija elipsa čija površina zavisi i početnog ugla između ravni polarizacije polarizatora i ravni polarizacije analizatora (φ) – slika 3.

Pošto je snaga svetlosti jednaka proizvodu maksimalne snage i kvadrata kosinusa ugla između polarizatora i analizatora, a ugao analizatora nam je poznat, uvešćemo smenu u kojoj nam je jedina nepoznata traženi ugao φ . Na taj način dobijamo dve jednačine koje opisuju elipsu u zavisnosti od ugla φ , $y_1(\varphi)$ i $y_2(\varphi)$.

$$W = W_0 \cos^2 \theta$$

$$W = W_0 \cos^2 (\alpha - \varphi)$$

$$x = \cos^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \arccos (\pm \sqrt{x})$$

$$y_1 = W_0 \cos^2 (\arccos \sqrt{x} + \varphi) \quad (1)$$

$$y_1 = W_0 \cos^2 (\arccos (-\sqrt{x}) + \varphi) \quad (2)$$

Površinu elipse izračunavamo po formuli:

$$P = \int_0^1 W_0 \cos^2 (\arccos (-\sqrt{x}) + \varphi) dx - \int_0^1 W_0 \cos^2 (\arccos \sqrt{x} + \varphi) dx$$

$$\Rightarrow P = \frac{\pi}{4} W_0 \sin 2\varphi$$

Iz ovog obrasca se dobija obrazac za ugao φ :

$$\varphi = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{4P}{\pi W_0} \right) \quad (3)$$

Površina elipse jednaka je razlici površina ispod lukova elipse. Te površine su izračunate numerički sabiranjem površina trapeza čije dve susedne tačke pripadaju x-osi, a dve pripadaju luku elipse.

Grešku za površinu elipse odredili smo numerički Monte Karlo simulacijom, u kojoj smo koristili samo pretpostavke o raspodeli grešaka pri merenju ugla i intenziteta. Na taj način smo dobili vrednost greške bez korišćenja eksplicitnih obrazaca. Simulacijom smo varirali položaj svake tačke u okviru intervala njihovih grešaka da bismo videli kako to utiče na površinu elipse.

Napravljen je histogram novodobijenih površina elipse čiji je koeficijent korelacije sa Gausovom raspodelom $r^2 = 0.99$ (slika 5). Greška za površinu elipse jednaka je širini raspodele i iznosi 0.01. Greška pri merenju snage svetlosti dolazi od samog merača svetlosti i iznosi 2% od izmerene snage. Grešku za ugao φ izračunali smo po obrascu:

$$\frac{\Delta \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta W_0}{W_0}$$

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta \sin 2\varphi}{2\sqrt{1 - \sin^2 2\varphi}} \quad (4)$$

Monte Karlo simulacija

```

%x niz x-koordinata, y-niz y koordinata, n-broj
  tacaka,dy-greska za y, dx-greska za x
for i=1:10000
  for j=1:n
    yp(j)=y0(j)+dy*randn;
    xp(j)=x0(j)+dx*randn;
  end;
  yp(n+1)=yp(1);
  xp(n+1)=xp(1);
  p(i)=trapz(xp,yp);
end
hist(p);

```

Rezultati

Rezultati merenja su prikazani u tabeli 1.

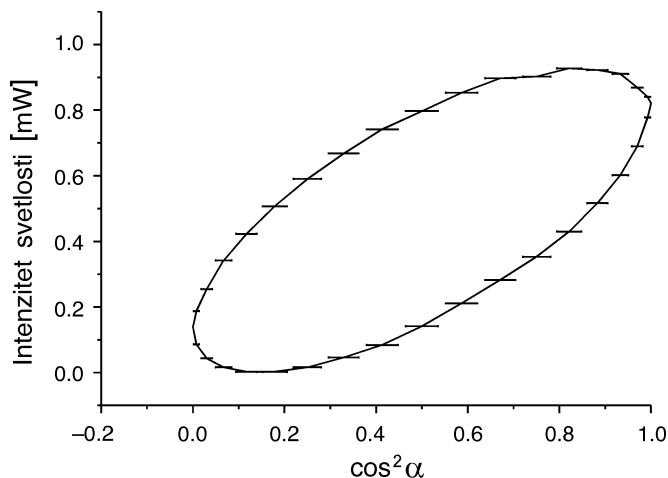
Tabela 1. Vrednosti snage svetlosti W u zavisnosti od ugla φ

α [°]	$\Delta \alpha$ [°]	$\cos^2 \alpha$	$\Delta \cos^2 \alpha$	W [W]
180	1	1	0	821
175	1	0.9924	0.00606	777.5
170	1	0.96985	0.01194	689.5
165	1	0.93301	0.01745	601.5
160	1	0.88302	0.02244	516.5
155	1	0.82139	0.02674	430
150	1	0.75	0.03023	353
145	1	0.67101	0.0328	282
140	1	0.58682	0.03438	211
135	1	0.5	0.03491	141
130	1	0.41318	0.03438	84
125	1	0.32899	0.0328	46
120	1	0.25	0.03023	16
115	1	0.17861	0.02674	2
110	1	0.11698	0.02244	2
105	1	0.06699	0.01745	16
100	1	0.03015	0.01194	43.5
95	1	0.0076	0.00606	86
90	1	0	0	139

Tabela 1 (nastavak)

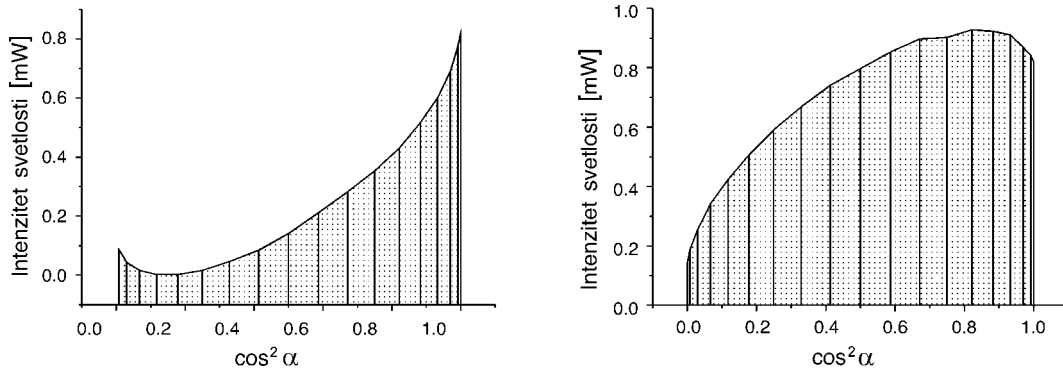
α [°]	$\Delta \alpha$ [°]	$\cos^2 \alpha$	$\Delta \cos^2 \alpha$	W[W]
85	1	0.0076	0.00606	187
80	1	0.03015	0.01194	254.5
75	1	0.06699	0.01745	342
70	1	0.11698	0.02244	422.5
65	1	0.17861	0.02674	506.5
60	1	0.25	0.03023	590.5
55	1	0.32899	0.0328	668
50	1	0.41318	0.03438	741.5
45	1	0.5	0.03491	797.5
40	1	0.58682	0.03438	853
35	1	0.67101	0.0328	897
30	1	0.75	0.03023	902
25	1	0.82139	0.02674	927.5
20	1	0.88302	0.02244	922.5
15	1	0.93301	0.01745	910.5
10	1	0.96985	0.01194	868.5
5	1	0.9924	0.00606	840.5
0	1	1	0	781.5

Zavisnost snage svetlosti od kvadrata kosinusa ugla α predstavljena je na slici 3. Vrednosti površina ispod donje i gornje grane elipse date su na slici 4. Koristeći obrasce (1) i (2) izračunali smo da površina elipse iznosi $P = 0.51 \pm 0.01$, a greška je jednaka širini rapodele mogućih površina elipse (slika 5). Maksimalna snaga svetlosti je $W_0 = 927.5$ W, a greška $W_0 = 19.05$ W.



Slika 3.
Zavisnost snage svetlosti od kvadrata kosinusa ugla α .

Figure 3.
Light intensity vs. $\cos^2 \alpha$.



Koristeći formule (3) i (4) dobili smo da je početni ugao između ravni polarizacije polarizatora i ravni polarizacije analizatora:

$$\varphi_1 = 22.2 \pm 0.4^\circ \text{ ili } \varphi_2 = 157.8 \pm 0.4^\circ.$$

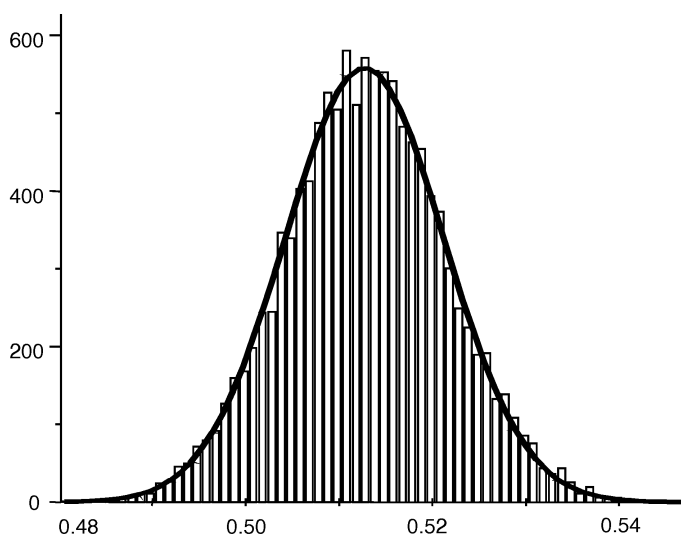
Slika 4.
Površine ispod lukova
elipse: a) $y_1(x)$; b)
 $y_2(x)$.

Diskusija i zaključak

Cilj ovog ekperimenta je provera statističke metode za određivanje početnog ugla (φ) između ravni polarizacije polarizatora i ravni polarizacije analizatora preko površine elipse, koja predstavlja zavisnost snage svetlosti od promene ugla analizatora. Koristili smo Monte Karlo simulaciju za određivanje greške površine elipse. Metoda se pokazala kao dobra, jer daje rešenja sa apsolutnom greškom koja iznosi približno 0.4° .

Greška konačnog rezultata potiče od same metode i da bi se ona smanjila potrebno je računati površinu većeg broja trapeza ispod lukova elipse što se može izvesti povećanjem broja merenja. Udeo imaju i greške samih

Figure 4.
Areas under two
branches of ellipse.



Slika 5.
Histogram raspodele
površina elipse.

Figure 5.
Distribution of ellipse
areas.

instrumenata (merača snage svetlosti i skale na kojoj smo očitavali ugao analizatora), kao i fluktacija snage laserskog snopa. Ove greške možemo smanjiti korišćenjem preciznijih instrumenata i stabilnijeg lasera.

Literatura

Janjić J. i Bikit J. 1987. *Opšti kurs fizike*, (II deo). Beograd: Naučna knjiga

Sears F.W. 1949. *Optics*. London: Addison–Wesley

Ana Kojić and Miloš Brčkalo

Statistical Method for Determination the Angle Between Planes of Polarization of Polarizer and Analyzer

The method for determination the starting angle φ between planes of polarization of polarizer and analyzer, by using dependence of intensity of light from the angle of polarization of analyzer (formulated in the Malus' law) was tested in this project.

By presenting the dependence of intensity of light from the angle (α) of analyzer on the graphic (Figure 3) we got an ellipse. Area of ellipse is equal to the result of subtraction of areas under the arches of the ellipse. Those areas were calculated numerically by addition of areas of trapezes whose two adjoining dots belong to the x-axis and two belong to the arch of the ellipse. An error for the area of ellipse was determined numerically by using a Monte Carlo simulation. In the simulation we used only assumptions about distributions of errors of the measured angle and intensity and this enabled us to overcome the problem of expressing the error (of area of ellipse) by using a formula. The simulation moved the position of every dot in the interval of its error so that we could see how it effects the area of the ellipse. The histogram of possible values of area of ellipse was made and coefficient of it's corelation with Gauss' distribution is 0.99 (Figure 5). Error of area of ellipse is equal to the width of that histogram. We got the angle φ by calculating the area of ellipse and by expressing the angle φ in dependence of area of the ellipse. Error for the angle φ was calculated by formula (4).

The angle between the planes of polarization of polarizer and analyzer is $\varphi_1 = 22.2 \pm 0.4^\circ$ or $\varphi_2 = 157.8 \pm 0.4^\circ$. The error for the angle is approximately equal 0.4° . Thus, we can characterize this method as a good one.

