

## Talasni fenomeni pri kretanju broda po površini vode

---

*Na modelu je proučavan trag koji brod ostavlja za sobom krećući se po mirnoj površini vode. Razmatran je uticaj oblika i brzine broda na izgled "talasne slike". Radi preciznijih podataka tragovi su fotografisani, a fotografije skenirane i računarski obrađene. Urađeni su grafici zavisnosti ugla nastalih frontova od brzine broda i analiza poprečnog preseka talasa po ravni normalnoj na putanju broda.*

---

Svi smo bili u prilici da posmatramo kretanje broda po mirnoj površini vode. Ovaj, na prvi pogled jednostavan fenomen – talasni front prepoznatljivog oblika koji podseća na latinično slovo "V" – predstavlja složenu interferenciju velikog broja emitovanih talasa (Crawford 1984). U ovom eksperimentu naglasak je stavljen na uticaj oblika i brzine broda na navedenu pojavu.

Urađeno je nekoliko aproksimacija, počev od poređenja sa sličnim, ali jednostavnijim pojavama, do idealizovanih matematičkih modela. Pri traženju dobre aproksimacije ovog talasnog kretanja, brod je zamenjivan mlazem kapljica iz šprica i žicom.

### Skica eksperimenta

Posmatranje je vršeno u bazenima kružnog oblika (prečnika 1 m) i pravougaonog oblika dimenzija ( $1.2 \times 0.66 \times 0.1$  m). Fotografije su pravljene za tri različite veličine broda pri istoj brzini i tri različite brzine za istu veličinu broda. Sva tri broda su napravljena od stiropora. Brodove je, preko konca, vukao elektromotor kome je smanjivan napon rednim nadovezivanjem jednog odnosno dva ista otpornika. Da bi se talasi bolje videli na površini, u vodi je rastvaran  $\text{KMnO}_4$  koji vodi daje karakterističnu ljubičastu boju, a za snimke senki talasa na dnu kade korišćen je  $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$  koji daje žutu boju.

Tokom eksperimenta vršena su različita merenja. Prvo merenje je bilo merenje brzine prostiranja kružnih talasa po mirnoj površini vode. Na

---

Žarko Gačević  
(1981), Kragujevac,  
Mičurinova 6, učenik  
3. razreda  
Matematičke  
gimnazije u Beogradu

Miodrag Đukić  
(1982), Novi Sad,  
Narodnog fronta 34,  
učenik 2. razreda  
Gimnazije "Jovan  
Jovanović Zmaj" u  
Novom Sadu

površinu je kanuta kapljica vode. Poremećaj koji pri tom nastaje se u vidu talasa širio po površini vode. Brzina je dobijena kao količnik pređenog puta talasa i proteklog vremena. Zatim su eksperimentalno, merenjem vremena za koje brod pređe neku razdaljinu računate brzine broda.

Radi upoređivanja uzete su i fotografije traga koji iza sebe ostavlja mlaz šprica (koji predstavlja putujući izvor kružnih talasa) i najobičnija žica (koja predstavlja izvor frontalnih talasa). Zatim su sve fotografije skenirane i obrađene u Matlab-u.

## Merenje brzina

### Brzina talasa

Da bi se odredila brzina prostiranja talasa mereno je vreme za koje talas pređe neku razdaljinu na rastojanju od 0.49 i 0.33 metara. Za obe vrednosti pređenog puta napravljeno je osam merenja.

Tabela 1. Podaci dobijeni za određivanje brzine talasa

Pređeni put [m]	Vreme [s]							
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
0.33	1.70	1.60	1.88	1.82	1.80	1.74	2.07	1.81
0.49	2.56	2.84	2.73	2.69	2.84	2.73	2.72	2.62

Brzina je određivana kao količnik pređenog puta i srednjeg vremena. I za jednu i za drugu dužinu dobijena je brzina talasa koja iznosi  $(0.18 \pm 0.01)$  m/s (tabela 1).

### Brzina broda

Merenjem vremena za koje brod pređe određenu razdaljinu određena je brzina broda. Svaka brzina je izračunata na osnovu više merenja. Elektromotoru je ulazni napon menjan uz pomoć redno vezanih otpornika čime su obezbeđivane različite brzine broda. Dobijene su sledeće vrednosti:

$$\begin{array}{lll}
 V_1 = 1.2 \pm 0.2 \text{ m/s} & \delta_{V1} = 16\% & \text{bez otpornika} \\
 V_2 = 0.72 \pm 0.08 \text{ m/s} & \delta_{V2} = 11\% & \text{sa jednim otpornikom} \\
 V_3 = 0.505 \pm 0.05 \text{ m/s} & \delta_{V3} = 10\% & \text{sa dva otpornika}
 \end{array}$$

## Analiza pojave

Mlaz je ostavljao pravilne (skoro pravolinijske) frontove dok je unutrašnjost traga oscilovala velikim amplitudama. Na površini su se uočavali mnogobrojni kružni talasi koji su se međusobno superponirali (slika 1).

Žica je ostavljala još pravilnije frontove dok je unutrašnjost ostajala skoro potpuno mirna. Zadnji front u ovom slučaju nije uočen, verovatno zato što je prečnik žice mali (slika 2).

Talasi koji su nastajali iza broda bili su najstroženiji. Pre svega uočavamo dva talasna fronta čiji se oblici razlikuju kao i priroda i mesto njihovog nastajanja (Slika 3). Prostor između prednjeg i zadnjeg fronta nije pobuđen što ove frontove jasno razdvaja. Zadnji front nastaje na zadnjem delu broda. On je oštiji, evidentno jačeg intenziteta, zakrivljen i isprekidan, a njegova unutrašnjost osciluje malom amplitudom. Prednji front, koji nastaje na pramcu broda, je pravilniji, manjeg ugla, manjeg intenziteta i zaobljeniji pa podseća na slovo "U".

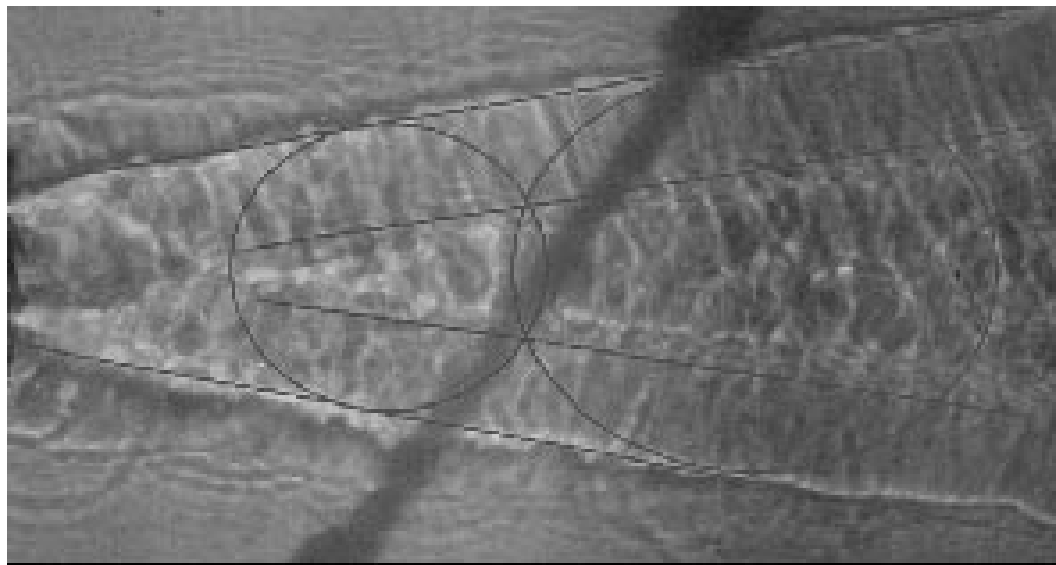
Pri poređenju talasa koje iza sebe ostavlja žica i prednjeg fronta talasa kod broda primećujemo da su vrlo slični. Kod brodova nastaju na prednjem delu i, kao kod žice, pravilni su i unutrašnjost im je potpuno mirna.

Međutim, talasi nastali od mlaza šprica dosta se razlikuju od zadnjeg fronta broda. Frontovi kod šprica su pravilni, dok su kod broda zakrivljeni i isprekidani. Unutrašnjost kod šprica osciluje velikim amplitudama i mogu se videti frontovi kružnih talasa koji nastaju od mlaza. Za razliku od toga unutrašnjost zadnjeg fronta talasa koji nastaju od broda osciluje malim amplitudama i ne mogu se uočiti neki pravilni frontovi, već se mogu videti oblici koji podsećaju na spiralu i predstavljaju vrtloge koji nastaju usled turbulencije i dovode do pojave zadnjeg fronta.

Naime, može se primetiti da zadnji front talasa postoji samo kod većih brzina dok kod malih brzina zadnji front nije prisutan. To se dešava zbog prelaska laminarnog kretanja u turbulentno što direktno zavisi od otpora oblika koji se može opisati Rejnoldsovim brojem. Rejnoldsov broj je bezdimenzionalna veličina koja se definiše jednačinom:

$$\text{Re} = \frac{\rho L_0 V_0}{\mu}$$

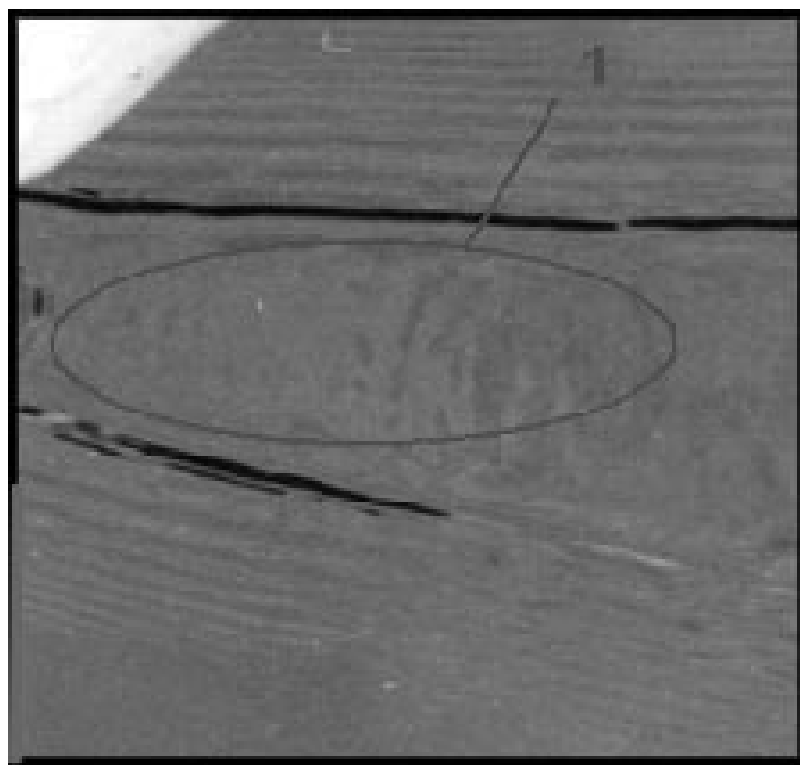
gde je  $\rho$  gustina fluida,  $L_0$  karakteristična dužina (prečnik cevi, dubina vode u kanalu, dužina broda),  $V_0$  srednja brzina fluida u cevi ili u kanalu odnosno brzina tela koje se kreće kroz fluid i  $\mu$  koeficijent viskoznosti. Turbulentno kretanje može se ostvariti samo za dovoljno velike vrednosti Rejnoldsovog broja, što ukazuje da do pojavljivanja zadnjeg fronta u slučaju žice nije došlo zbog malog prečnika. U slučaju da je viskoznost tečnosti mala, za prelazak iz laminarnog kretanja u turbulentno potreban je mali poremećaj, a ako je viskoznost velika potreban je veći poremećaj. Kada kretanje postane turbulentno u jednoj oblasti, poremećaj se širi na susjedne čestice i pojavljuju se vrtlozi koji su približno simetrični u odnosu na putanju broda, ako je ona pravolinijska (Hajdin 1983). Vrtlozi su u početku mali da bi se kasnije širili, zahvatajući okolne čestice i baš ivice tih vrtloga obrazuju zadnji talasni front (slika 4).



*Slika 1 (gore).  
Fotografija talasa  
koje pravi mlaz  
šprica. Slika  
predstavlja  
pomerajući izvor  
kružnih talasa.*

---

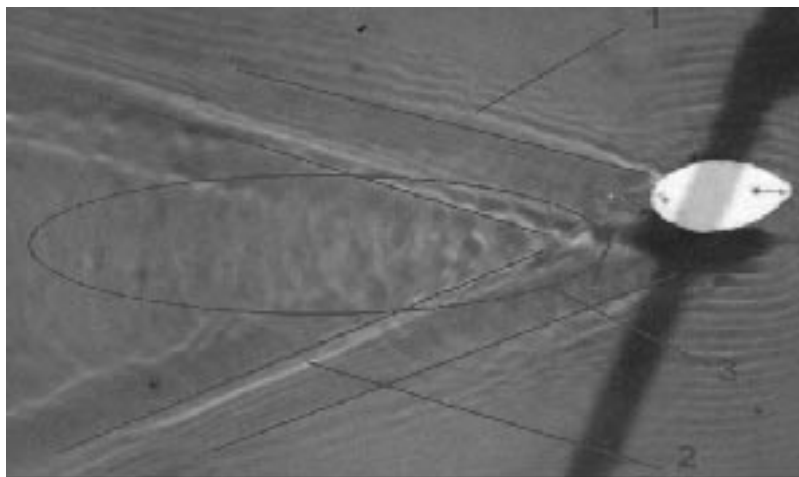
*Figure 1 (above).  
Photo of waves made  
by droplet of water.  
Picture present  
moving source of  
circle waves.*



*Slika 2 (dole).  
Trag iza žice.  
Unutrašnjost koja je  
skoro potpuno mirna  
(1).*

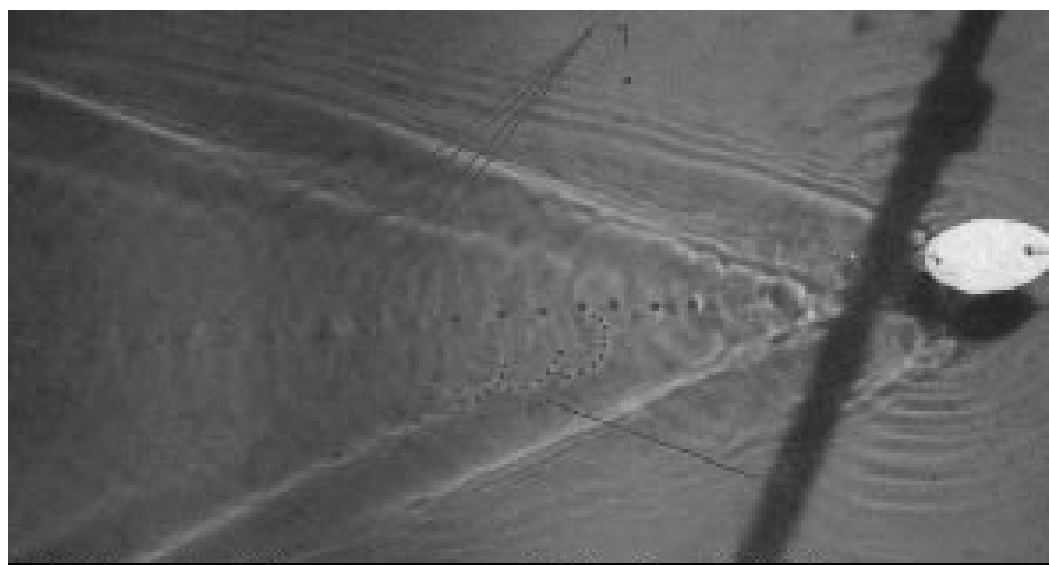
---

*Figure 2 (below).  
The trace behind the  
wire. Inside the  
patern source at  
water is completely  
flat.*



*Slika 3 (gore).  
Trag iza broda: 1 – prednji front talasa,  
2 – zadnji front, 3 – unutrašnjost koja osciluje  
malim amplitudama*

*Figure 3 (above).  
Patern behind the boat: 1 – forward wave  
front, 2 – backward wave front, 3 – the interior  
which oscillates with a small amplitude*



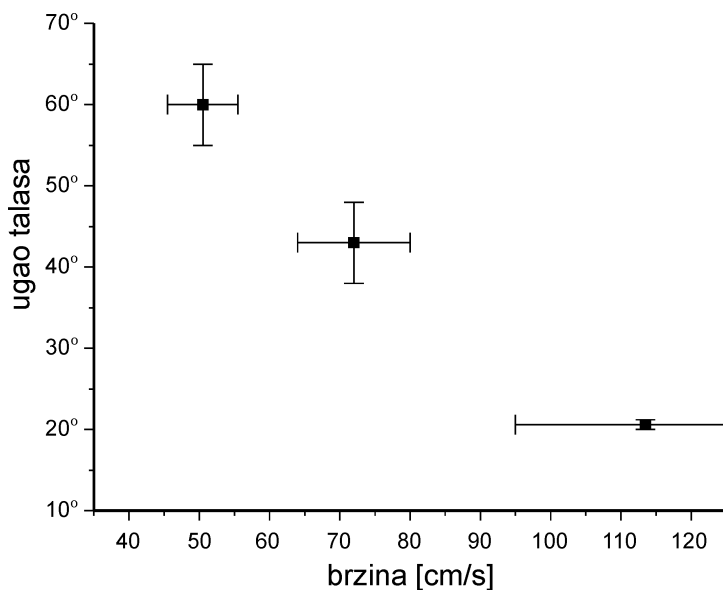
*Slika 4 (dole).  
Talasi iza broda: 1 – mesta gde dolazi do  
interferencije vrtloga, 2 – ivice vrtloga koje čine  
zadnji talasni front*

*Figure 4 (below).  
Waves behind the boat: 1 – vortex interference,  
2 – the edge of vortex which makes the  
backward wave front*

## Analiza uglova talasnih frontova

Za svaku brzinu broda izmereni su uglovi zadnjeg fronta talasa i na osnovu toga je dobijen sledeći grafik na kojem je predstavljena zavisnost ugla zadnjeg talasnog fronta od brzine kojom se brod kreće (slika 5).

Može se primetiti da je grafik približno linearan. Ovo je posledica činjenice da su varirane brzine iz malog opsega (Birkhoff, Zarantello 1957). Međutim, zadnji front talasa zavisi i od oblika broda, a i od trenja, što zavisnost čini nelinearnom. Zato na fotografijama (slike 3 i 4) prednji front ima manji ugao od ugla zadnjeg fronta, jer su u pitanju male brzine. Međutim, iz literature je poznato da i pri nekim većim brzinama zadnji front ima daleko manji ugao (Gilbrech 1966).



Slika 5.  
Zavisnost ugla  
zadnjeg talasnog  
fronta od brzine  
kojom se brod kreće.

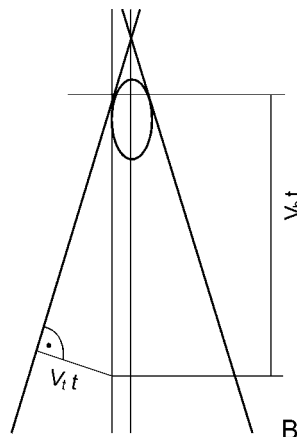
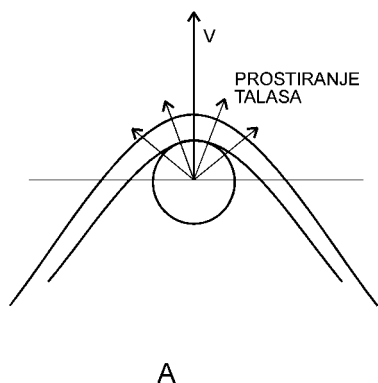
Figure 5.  
Dependence of  
backward angle of  
wave front on boat  
velocity.

Kako je prednji front talasa drugačije prirode nego zadnji, onda i ugao ima drugačiju zavisnost od brzine. Pored toga što je ugao prednjih talasa očevidno manji na ovim malim brzinama, postoji razlika i u mestu nastajanja.

Talasi iste prirode kao prednji front talasa kod broda mogu se dobiti privlačenjem nekog pravougaonog predmeta kroz fluid tako da je vektor brzine normalan na površinu tog pravougaonika. Tada se talasi šire u pravcu i smeru kretanja pravougaonika. Ako uzmemo kružni ili ovalni predmet, kao što je žica, odnosno brodić, talasi se šire kao na slici 6A. Na osnovu toga može se napraviti sledeća aproksimacija (slika 6B). Neka je:

$V_t$  – brzina talasa (koja je već izmerena i iznosi 0.18 m/s)

$V_b$  – brzina broda



Slika 6.  
Prostiranje prednjeg fronta talasa kod ovalnog oblika.

Figure 6.  
Propagation of the forward wave front originated from oval shape boat.

$t$  – proteklo vreme

$\alpha$  – ugao frontalnih talasa

Sa slike 6B se vidi veza:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{V_t \cdot t}{V_b \cdot t} = \frac{V_t}{V_b}$$

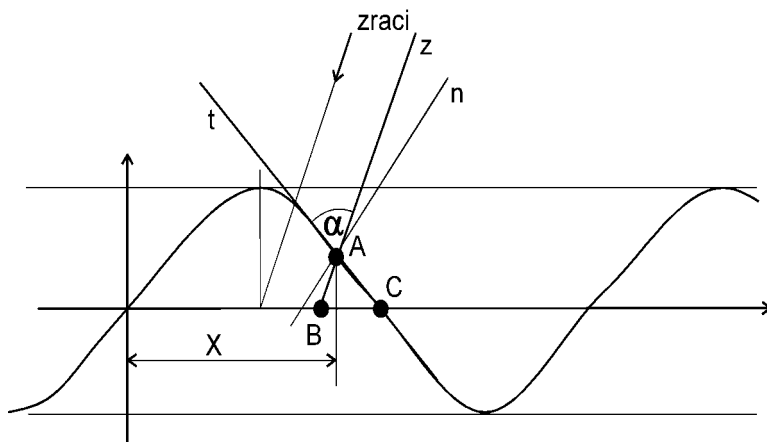
$$\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{V_t}{V_b}\right)$$

## Analiza poprečnog preseka talasa

Skenirane fotografije su obrađene u Matlab-u kako bi se odredila (relativna) visina talasa u tragu, odnosno poprečni presek normalan na putanju kretanja broda. Kako u vreme snimanja sunčevi zraci nisu padali pod pravim uglom, došlo je do dodatnih problema. Da je sunce osvetljavalo pod pravim uglom, dolje i vrhovi talasa bi na slici bili najsvetliji, a između njih bi se osvetljenost smanjivala u zavisnosti od ugla koji površina vode zaklapa sa sunčevim zracima, tako da bi lako mogli dobiti poprečni presek. Kako to nije slučaj bilo je potrebno izvršiti reskalaciju. Pre toga je određen ugao pod kojim su padali sunčevi zraci i on iznosi  $55^\circ$ .

Da bi izvršili reskalaciju razvijen je sledeći model (slika 7). Oblici talasa su aproksimirani sinusoidom. Pretpostavljeno je da je osvetljenost linearno zavisna od upadnog ugla zraka na površini. Najosvetljenijoj tački dodeljuje se vrednost 1.

Neka je  $r$  – osvetljenost,  $\alpha$  – upadni ugao, a  $k$  – konstanta koja povezuje  $r$  i  $\alpha$ . Jednačina harmonijskog oscilovanja je  $y = A \sin(\omega t)$  i neka je  $\omega t = x$ . Neka je, dalje, prava  $t$  tangenta sinusoide u posmatranoj tački



Slika 7.  
Prikaz poprečnog  
preseka talasa.

Figure 7.  
Wave crosssection.

A, a prava  $z$  sunčev zrak koji prolazi kroz tačku A. Presek prave  $z$  i  $x$ -ose označimo sa B, a presek prave  $t$  sa  $x$ -osom označimo sa C. Ugao  $\alpha$  predstavlja ugao pod kojim zraci padaju na površinu talasa u tački A i on je jednak uglu BAC kao svom unakrsnom. Sada iz trougla ABC lako izračunavamo njegovu veličinu:

$$\alpha = 180^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle ACB.$$

U trenutku snimanja ugao ABC iznosio je  $55^\circ$ . Ugao ACB izračunava se primenom osobina izvoda funkcije  $i$  u ovom slučaju je jednak

$$\sphericalangle ACB = -\text{arctg}(\sin'x),$$

jer sam  $\text{arctg}(\sin'x)$ , kao što se vidi na slici, ima negativnu vrednost. Dakle

$$\alpha = 180^\circ - 55^\circ + \text{arctg}(\sin'x) = 125^\circ + \text{arctg}(\sin'x). \quad (1)$$

Međutim, treba primetiti da ova veza važi samo za  $\text{arctg}(\sin'x) - 35^\circ$ . Za slučaj  $\text{arctg}(\sin'x) - 35^\circ$  na sličan način dobijamo

$$\alpha = 55 - \text{arctg}(\sin'x). \quad (2)$$

Dakle, imamo dve mogućnosti:

$$r = k \alpha = k (55^\circ - \text{arctg}(\cos x)) \text{ i}$$

$$r = k \alpha = k (125^\circ + \text{arctg}(\cos x))$$

Kako za  $\alpha = 90^\circ$  važi  $r = 1$ , sledi  $k = 1/90$ .

Dalje je

$$\text{arctg}(\cos x) = 55 - r \cdot 90^\circ,$$

odakle se dobija

$$x = \arccos(\text{tg}(55^\circ - r \cdot 90^\circ)).$$

Kako je jednačina razmatrane krive  $h = \sin x$  dobijamo

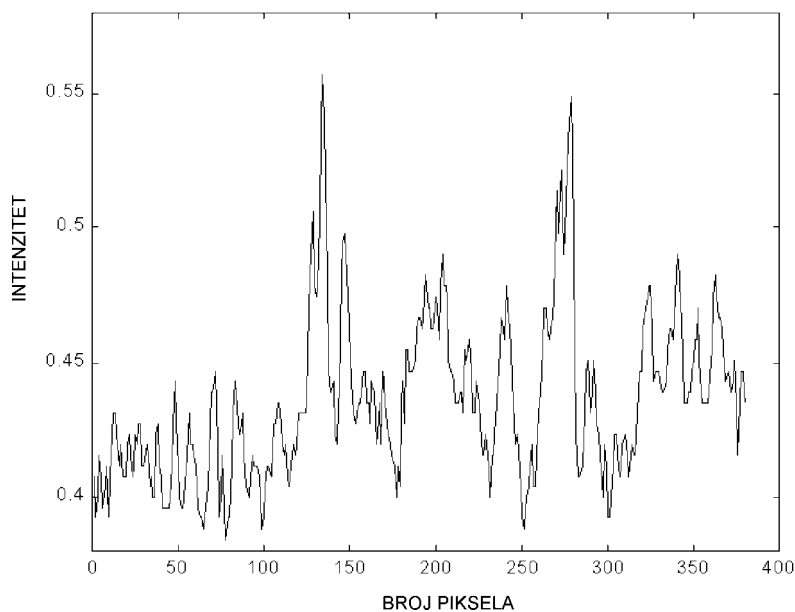
$$h = \sin(\arccos(\text{tg}(55^\circ - r \cdot 90^\circ))).$$

Sličnim transformacijama u drugom slučaju dobijamo

$$h = \sin(\arccos(\text{tg}(r \cdot 90^\circ - 125^\circ))).$$

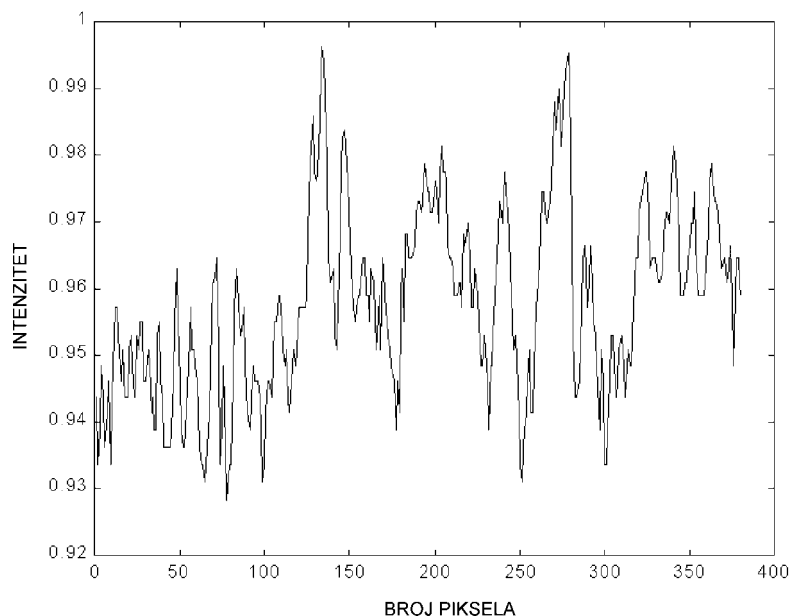


Zavisnosti osvetljenosti piksela od njegovog položaja u koloni data je na slici 8. Ovaj grafik približno prikazuje odnos relativnih visina pojedinih tačaka na površini talasa. Grafik je napravljen za 450-tu kolonu slike dimenzija  $381 \times 618$  piksela. Međutim, zbog već navedenih problema sa određivanjem pikova talasa, urađena je reskalacija. Posle izvršenih transformacija dobijen je grafik dat na slici 9.



Slika 8.  
Grafik zavisnosti osvetljenosti piksela od njegovog položaja u koloni.

Figure 8.  
Pixel number dependence on their intensity.

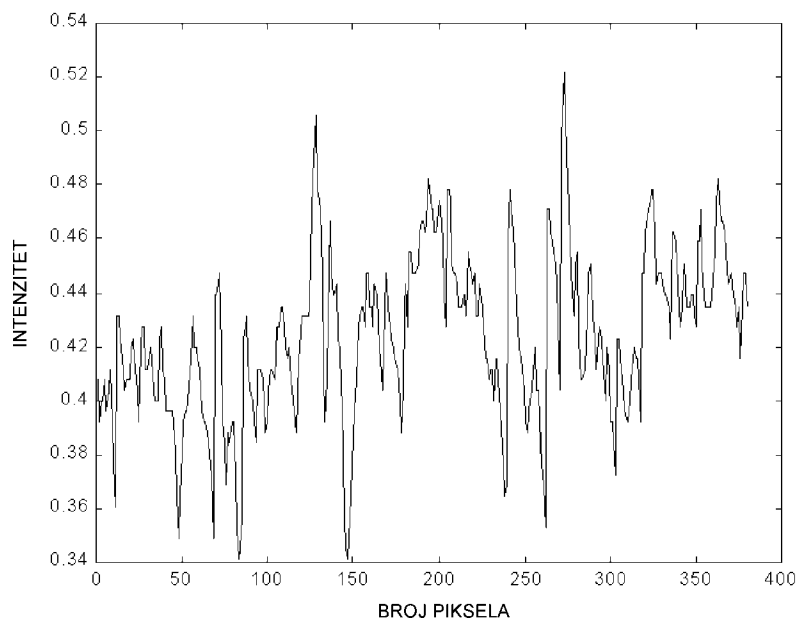


Slika 9  
Grafik zavisnosti osvetljenosti piksela od njegovog položaja u koloni posle primenjenog metoda reskalacije.

Figure 9.  
Pixel number dependence on their intensity after applied mathematical transformation.

Kao što se može videti grafici su dosta slični. Razlika je u intenzitetu (tj. visini) pojedinih talasa, ali nema većih odstupanja među graficima. Trend koji je uočen na prethodnom grafiku sada je smanjen ali i dalje postoji. Na grafiku je očljlivo da postoji približna simetrija po sredini mernog intervala duž  $x$ -ose. Na intervalu od oko 100 početnih i krajnjih piksela nema nekog periodičnog ponavljanja i nekih istaknutih pikova. Ovakav rezultat je i očekivan jer ova površina još i nije pobuđena, što se može uočiti na snimljenim fotografijama. Zatim nailazimo na dva istaknuta gornja pika pa zatim i dva istaknuta donja pika. Ovaj deo grafika upravo i jeste najzanimljiviji jer je ovo oblast najvećeg pobuđenja u oblasti zadnjeg fronta. U samoj sredini grafika uočavamo oblast sličnu oblasti na ivici grafika, što potvrđuje zapažanje da unutrašnjost osciluje vrlo malom amplitudom.

Međutim, postoji još jedan problem, a to je da dve tačke iznad i ispod mirne površine, u kojima sunčevi zraci padaju pod istim uglom, imaju isti intenzitet. Zato je napravljen algoritam koji ispravlja ovu grešku. Potpuno sreden grafik dat je na slici 10.



Slika 10.  
Grafik zavisnosti osvetljenosti piksela od njegovog položaja u koloni posle primene algoritma.

Figure 10.  
The final result of rscalation.

Baš kao i nakon prethodne reskalacije, uočavamo da su se najvažniji detalji očuvali. Intenziteti su se naravno promenili, ali najuočljiviji pikovi su se zadržali kao i približna simetrija po sredini intervala duž  $x$ -ose. Pojavili su se izraženiji pikovi u početnom i krajnjem delu grafika, ali to je zbog složenosti reskalacija koje su u algoritmima pojednostavljene.

## Zaključak

Uočena je velika razlika u izgledu prednjeg i zadnjeg fronta talasa i to u uglu koji grade, u obliku i visini talasa. Pokušaj aproksimacija broda jednostavnijim izvorima talasa je imao nedostataka. Očigledno je da je oscilovanje površine za brodom bilo haotičnije nego za mlazom iz šprica i iza žice.

Naravno, primećena je i sličnost u obliku nastalih frontova. Na zavisnost ugla od brzine čamca se nije moglo adekvatno odgovoriti zbog tehničkih problema pri izvođenju eksperimenta, to jest varirane brzine su bile iz relativno malog opsega i nije izvršen dovoljan broj merenja. Za veličinu modela broda ustanovljeno je da nije naročito važan parametar. Njenim variranjem traženi podaci se nisu menjali. I na kraju, matematički model je dao uglavnom očekivane rezultate. Važno je još napomenuti da, iako su algoritmi za grafike 8, 9 i 10 redom usavršavani, najočekivanije rezultate dao je prvi grafik. Kao što je već rečeno, to je verovatno zbog komplikovanosti reskalacija koje su u algoritmima pojednostavljene.

---

## Literatura

Hajdin G. 1983. *Mehanika fluida*. Beograd: Građevinska Knjiga

Birkhoff G., Zarantello E.H. 1957. *Jets, Wakes, and Cavities*. New York: Academic Press

Gilbrech D.A. 1966. *Fluid Mechanics*. London: Iliffe Books

Crawford F. 1984. *American Journal of Physics*, **52**: 782

---

Žarko Gačević and Miodrag Đukić

## A Wake of a Moving Boat

We are all quite familiar with the wake left behind by a moving object on the sea or any other water surface. The explanation of this phenomenon is rather complicated. The aim of this paper is to try to explain the V-shape of the wake left behind by a boat.

Theoretically, the angle of this wake is almost always about  $39^\circ$  (Crawford 1984), whether the object moving across is a duck or a tanker. We didn't find any proof for this prediction.

In our analysis we assumed that the boat's speed is greater than the speed of waves in water. We made a mathematical model of this phenomenon, using some simple approximations. We obtained that the size of ship is not important for experiments. Results are presented in Figures 8, 9 and 10. We choose one column from pixel intensity matrix. Data from this column represent one typical cross-section from wave pattern.

Using these photos, we derived a mathematical relation between pixel intensities and maxima of the wave front. In Figure 10 is presented the final result of rescaling across the whole cross-section of wave pattern.

