
Igor Stamenov

Određivanje parametara električnog polja proizvoljnih sistema naelektrisanih provodnih tela

Napisana je simulacija koja je koristeći metod relaksacije rešenja računa prostornu raspodelu potencijala proizvoljnog 2D ili 3D sistema naelektrisanih provodnih tela poznatog potencijala. Osim što računa potencijal, simulacija poseduje dodatne opcije za određivanje raspodele naelektrisanja na zadatim telima, kao i električnog polja celog sistema. Simulacija je funkcionisala za sisteme koji se nalaze u ograničenom prostoru; 2D sistemi su smeštani u zatvorene konture, a 3D sistemi u zatvorene kutije. Na taj način bi se multi potencijal iz beskonačnosti pomerao na konačnu udaljenost od tela. Razvijanjem algoritma su proučene njegove prednosti i nedostaci.

Uvod

Problem određivanja jedinstvenog rešenja funkcije raspodele električnog potencijala u proizvoljnom sistemu naelektrisanih tela oduvek je zauzimao važno mesto u elektrostatici. Funkciju raspodele nije lako odrediti analitički ni u jednostavnim sistemima, dok je u složenim to praktično nemoguće. Zato se često pribegava numeričkom rešavanju. Postoji nekoliko metoda koji to omogućavaju: metoda konformnog preslikavanja, disperziona metoda i relaksaciona metoda (Purcell 1988). Cilj ovog rada je da se kreira optimizovan algoritam za izračunavanje potencijala određenih sistema naelektrisanih provodnih tela u vakuumu. Algoritam se temelji na principu relaksacionog metoda.

Za svaku tačku elektrostatičkog polja važi Poissonova jednačina:

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

koja povezuje potencijal električnog polja U u infinitesimalno malom delu prostora sa zapreminskom gustinom naelektrisanja ρ . U svim tačkama

*Igor Stamenov
(1981), Kruševac,
Miodraga Stankovića
47, učenik 2. razreda
Gimnazije u Kruševcu*

prostora gde nema naelektrisanja, ρ je jednako nuli, pa se prethodna jednačina svodi na Laplaceovu jednačinu:

$$\nabla^2 U = 0 \quad (2)$$

Njen oblik u Dekartovim koordinatama glasi:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

a rešenja su joj harmonijske funkcije koje imaju niz korisnih svojstava. Problem pri rešavanju Laplaceove jednačine sastoji se u tome da se nađe funkcija U koja zadovoljava jednačinu (3) i ujedno na površinama tela ispunjava zadate granične uslove. Relaksacioni metod koristi osobine navedenih harmonijskih funkcija. Jedna od tih osobina podrazumeva da je vrednost potencijala u proizvoljnoj tački gde je naelektrisanje jednako nuli jednak srednjoj vrednosti potencijala njene okoline (u ovoj simulaciji tu okolinu u 3D sistemima je predstavljalo šest tačaka, a u 2D sistemima četiri). Električni potencijal se podešava dok u svakoj tački ne zadovolji navedenu osobinu sa unapred zadatom tačnošću. To se postiže tako što se na početku svakoj tački dodeli proizvoljna vrednost potencijala. Potom se iterativnim postupkom njoj dodeljuje srednja vrednost potencijala okoline. Postupak se ponavlja sve dok promena potencijala u svakoj tački rešetke između dve iteracije ne bude manja od zadate tačnosti. Tada možemo smatrati da smo rešili Laplaceovu jednačinu za dati sistem.

Pošto se odredi potencijal u svakoj tački polja moguće je odrediti i električno polje preko gradijenta potencijala:

$$\mathbf{E} = -\nabla U = -\left(\mathbf{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial z}\right) \quad (4)$$

gde su \mathbf{i} , \mathbf{j} , i \mathbf{k} odgovarajući jedinični vektori.

Za određivanje količine naelektrisanja na deliću površine provodnog tela koristi se teorema po kojoj je vrednost električnog polja uz svaki delić površine provodnog tela jednak količniku površinske gustine naelektrisanja σ na tom deliću i permitivnosti vakuuma:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (5)$$

Odredivši σ , lako određuje i količina naelektrisanja po formuli $\Delta q = \sigma \Delta S$ gde je ΔS površina posmatranog delića.

Metod

Prvo je napravljen editor za definisanje geometrije sistema. U 2D slučaju editor omogućava unošenje objekata proizvoljnog položaja i oblika, dok u slučaju 3D objekata nije moguće unošenje tela proizvoljno zakrivljenih površina, već samo onih koji su bili sastavljeni od pravougaonih segmenata proizvoljno raspoređenih u prostoru. Pri zadavanju sistema vodi se računa da dva objekta koja su na različitim potencijalima ne dođu u međusobni kontakt, jer takvo stanje nije elektrostatički stabilno. Budući da je zadati sistem morao biti smešten unutar kutije, odnosno konture, dimenzije sistema bile su potpuno određene. Pri tome je, iz tehničkih razloga, broj tačaka morao biti ograničen. Zato su na početku vršena eksperimentisanja sa brojem tačaka i vremenom rada algoritma. Najveća testirana mreža tačaka za 2D sistem je bila 1000×1000 sa greškom potencijala na šestoj decimali, a simulaciji je trebalo 59 sati da na računaru sa Pentium procesorom na 133 Mhz sa 32 Mb RAM-a odredi potencijal sistema. Naknadnim testiranjima došlo se do zaključka da je optimalna gustina tačaka u 2D sistemima 150×150 , a u 3D sistemima $100 \times 100 \times 100$. Pri toj gustini tačaka algoritam je rešavao svaki 2D sistem za manje od 7 minuta, a 3D sistem između 5 i 20 minuta. U oba slučaja zadata tačnost iznosi 10.

Međutim, pri ovim uslovima se za električno polje ne dobijaju uvek zadovoljavajući rezultati, pošto neki pikovi na grafiku nisu jasno vidljivi. To se dešava na mestima velike koncentracije naelektrisanja, tj. na šiljatim delovima tela. Na tim mestima električno polje se suviše brzo menja, tako da optimalna gustina tačaka ne daje gladak grafik, već samo par tačaka koje sugerišu skokovitu promenu polja (slika 1b). To je predstavljalo problem pri određivanju raspodele naelektrisanja, jer je zadata ('optimalna') gustina tačaka bila nedovoljna za precizno računanje polja kod uglova i vrhova. Zato se u tim oblastima pribeglo lokalnom usitnjavanju mreže: nakon računanja potencijala, polja i raspodele naelektrisanja, algoritam markira oblasti kao preporuku gde bi se za dati sistem vršilo usitnjavanje mreže. Pri tom algoritam vodi računa i o početnoj (proizvoljnoj) dodeli vrednosti potencijala tačkama sistema, jer baš od proizvoljnosti te raspodele u mnogome zavisi vreme relaksacije rešenja. To je postignuto na sledeći način. Testiranjem je utvrđeno da se najbolje rešenje dobija ako su početne vrednosti potencijala (u prostoru između provodnika) nasumično izabrane u intervalu minimalne i maksimalne vrednosti potencijala provodnika. Ako bi, umesto toga, svim tačkama bila dodeljena jedna vrednost potencijala, krajnje rešenje, iako bi zadovoljilo uslov da na kraju ciklusa u svakoj tački razlika potencijala u zadnjoj i predzadnjoj iteraciji bude manja od zadate tačnosti, ne bi bilo rešenje Laplaceove jednačine. To bi se i

videlo na grafiku, jer bi se najveći deo vrednosti nagomilavao u oblasti početne dodeljene vrednosti.

Rezultati

Na slici 1a (tabla u prilogu ovog rada) vidi se grafik električnog potencijala u 2D sistemu sastavljenom od dva koncentrična kvadrata s tim što je potencijal spoljašnjeg 0V, a unutrašnjeg 100 V. Na slici 1b je grafik intenziteta električnog polja istog sistema. Na grafiku električnog polja je uočljivo da se naelektrisanja najviše nagomilavaju u uglovima kvadrata i da u tim oblastima grafik nema dosta tačaka. To je oblast gde treba izvršiti lokalno usitnjavanje mreže. Na slici 1c je preglednije predstavljeno električno polje ovog sistema u vektorskom obliku. Kao potvrda pretpostavke da se u uglovima kvadrata skuplja najviše naelektrisanja, na slici 1d je predstavljen grafik raspodele naelektrisanja u sistemu. Za dužinu, potencijal, jačinu električnog polja i linearnu gustinu naelektrisanja korišćene su relativne jedinice.

Na slikama 2a i 2b su prikazani potencijal i električno polje dve igle koje se seku i koje su naelektrisane do 100 V.

Na slici 3a i 3b zadati sistem unutar kvadrata na 0 V čine dve zatvorene zakrivljene konture na potencijalima od 100 V. Vidljivo je da je potencijal unutar svake konture konstantan, a da je električno polje unutar njih nula.

Zaključak

Uzimajući u obzir sve rezultate testiranja algoritma i uslove primenljivosti metoda može se zaključiti da je simulacija pokazala dobre rezultate za svaki 2D i 3D sistem koji je zadat. Jedino ograničenje metoda je bilo nemogućnost postavljanja nultog potencijala u beskonačnosti. Simulacija je testirana na računaru sa Pentium procesorom na 133 MHz sa 32 MB RAM-a. Takođe je ostvarena dosta dobra veza između tačnosti i vremena računanja. Tome je umnogome pomoglo i lokalno usitnjavanje mreže tačaka. Tačnost rešenja je proveravana uvrštavanjem vrednosti u Laplaceovu jednačinu. Greška određivanja potencijala je bila ispod 1%, a u ekstremnim slučajevima kada je bilo mnogo objekata sa šiljatim delovima je maksimalno dosegala do 3%.

Literatura

- Purcell M. E. 1988. *Elektricitet i magnetizam*. Zagreb: Tehnička knjiga.
Surutka J. 1968. *Elektromagnetika*. Beograd: Elektrotehnički fakultet

Determination of Electric Field Parameters in Systems of Charged Conductors

Simulation which determines potential distribution in 2D or 3D systems of charged conducting objects was done. Simulation is based on relaxation method. Beside that, simulation have options which make possible to calculate intensity of electrical field and charge distribution. Simulation works with closed systems; 2D systems were put in closed contour, but 3D systems were put in closed box. Therefore, zero potential was moved from infinity to final distance. According to test results and applicability conditions, this algorithm gave good results for every tested system. Simulation was tested on computer with Pentium processor on 133 MHz with 32 MB RAM. Also was obtained very good relation between precision and time for calculating.

Local resolution increasing was very important for the precision. That is obvious on figure 1b which represents intensity of electric field in system of two concentric squares. Figure 1d represents charge distribution in that system. On figure 2 is showed potential and electric field in system consisted of two intersecting needles. Obviously greatest part of charge is located in needles' tops. Figure 3 represents potential and electric field of two contours charged to 100 volts. It is obvious that electric field is zero in contours.

Results reliability was checked by putting them in Laplace's equation. Error for potential was lower than 1%, but in extreme cases with many objects with peak-like parts error was maximally 3%.

