

---

Marko Cetina

## Određivanje kapaciteta i raspodele potencijala između elektroda kondenzatora nepravilnog oblika

---

*Simulacija raspodele potencijala u dielektriku upoređena je sa realnim eksperimentom. Kao osnov za simulaciju poslužio je relaksacioni postupak (Popović 1966). Dva postupka su upoređena na modelu kondenzatora sa elektrodama nepravilnog oblika. Eksperimentalno je određen i kapacitet kondenzatora.*

---

### Uvod

Električno polje kondenzatora, funkcija potencijala između elektroda, kao i kapacitet mogu se tačno odrediti samo u malom broju slučajeva. Ukoliko je kondenzator nepravilnog oblika, ove veličine moraju se odrediti numerički ili putem eksperimenta. Cilj ovog rada je poređenje ova dva metoda, njihovih prednosti i mana.

#### *Eksperimentalno mapiranje potencijala između elektroda kondenzatora*

Da bi se korišćenjem voltmetra sa pokretnim kalemom mogao odrediti potencijal u nekoj tački potrebno je da kroz kalem protiče struja. Ova struja može se obezbediti ako se elektrode kondenzatora potope u elektrolit i priključe na spoljašnji izvor napona. Ukoliko se pri merenju koristi jednosmerni napon, dolazi do elektrolize koja ometa merenje potencijala, pa je stoga neophodno elektrode priključiti na izvor naizmjeničnog napona. U literaturi (Surutka 1971) se pokazuje da je tada raspodela efektivnih vrednosti potencijala između elektroda u svakom trenutku ista kao u kondenzatoru ispunjenom dielektrikom.

*Numerički pristup* zasniva se na numeričkom rešavanju Laplaceove jednačine. Ovde je za rešavanje Laplaceove jednačine korišćen relaksacioni postupak, opisan kod Popovića (1966) i Purcell-a (1988)

---

*Marko Cetina (1982),  
Beograd, Bulevar  
JNA 82, učenik 2.  
razreda Matematičke  
gimnazije u Beogradu*

### *Eksperimentalno određivanje kapaciteta kondenzatora*

Na osnovu teorije (Surutka 1971) kapacitet kondenzatora ispunjenog dielektrikom relativne dielektrične propustljivosti  $\epsilon_{rT}$  može se izraziti preko otpora  $R$  ekvivalentnog sistema elektroda potopljenih u elektrolit specifične provodnosti kao:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\sigma R} \quad (1)$$

Dakle, merenjem otpora ekvivalentnog sistema elektroda i specifične provodnosti elektrolita može se odrediti kapacitet kondenzatora.

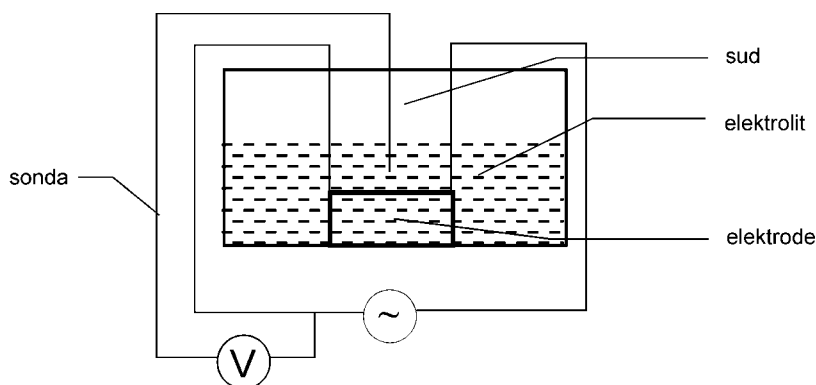
## Eksperiment

### Aparatura

Aparatura za mapiranje elektrolita sastoji se od suda dimenzija  $350 \times 850 \times 500$  mm ispunjenog vodom iz česme koja služi kao elektrolit, elektroda, izvora naizmennog napona frekvencije  $\nu = 500$  Hz, sonde pričvršćene za držač i voltmetra.

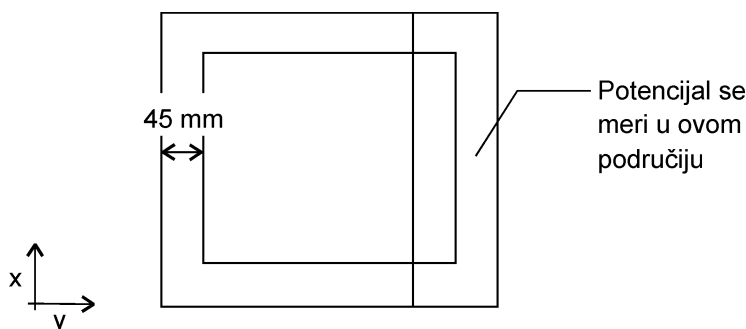
Za merenje je odabrana frekvencija naizmennice struje od 500 Hz jer pokazivanje voltmetra pri nižim frekvencijama nije stabilno, dok pri višim frekvencijama ( $\nu > 10$  kHz) do izražaja dolaze induktivnost i kapacitivnost elektrolita. Merenjem je utvrđeno da pri mernoj frekvenciji ovi efekti ne dolaze do izražaja.

Za određivanje položaja sonde u u X-Y ravni korišćena su dva lenjira od kojih je jedan pričvršćen za najdužu ivicu suda, a drugi slobodno klizi po njemu. Očitavanje položaja sonde u Z-osi vršeno je pomoću lenjira pri-



*Slika 1.  
Šema aparature za  
mapiranje potencijala.*

*Figure 1.  
Experimental setup  
for measuring the  
potentials.*



Slika 2.  
Poprečni presek elektroda.

Figure 2.  
A cross-section of the electrodes.

čvršćenog za sondu. Greška pri očitavanju položaja sonde na sve tri ose iznosi  $\pm 3$  mm.

Elektrode kondenzatora čije su osobine merene su pravougaonog poprečnog preseka i postavljene su na dno suda. Efekat dna suda ogleda se u skretanju strujnica od dna, tako da vrednosti potencijala blizu dna odgovaraju vrednosti funkcije potencijalu između elektroda daleko od njihovih krajeva. Dimenzije poprečnog preseka veće elektrode su  $222 \times 225$  mm, a manje  $132 \times 133$  mm. Visina elektroda iznosi 127 mm. Manja elektroda postavljena je na rastojanju od 45 mm od veće. Apsolutna greška pri merenju dimenzija i rastojanja između elektroda iznosi  $\pm 2$  mm.

Aparatura za određivanje specifičnog otpora elektrolita u sudu sastoji se od dve paralelne ploče dimenzija  $415 \times 349$  mm i  $460 \times 349$  mm pričvršćenih za držače i potopljene u elektrolit do nivoa elektrolita u sudu  $h = 369 \pm 3$  mm. Dimenzije potopljenog dela ploča iznose  $(349 \pm 4) \times (349 \pm 1)$  mm. Ploče se nalaze na rastojanju  $d = 109 \pm 3$  mm, a izlolo-vane su od metalnih držača dvostrano lepljivom trakom. Ploče su povezane sa redno sa izvorom naizmeničnog napona frekvencije  $\nu = 500$  Hz i ampermetrom, dok im je paralelno vezan voltmetar za merenje naizmeničnog napona. Aparatura za merenje otpornosti sredine između elektroda slična je aparaturi za određivanje specifične otpornosti elektrolita, samo su metalne ploče zamenjene elektrodama.

### Mapiranje elektrolita

Rastojanje između dva susedna merenja potencijala po osama X i Y iznosi 5 mm. Merenje je vršeno tako što je lenjirom pričvršćenim za zidove suda i klizačem određivan položaj tačke u X-Y ravni čiji se potencijal meri. Zatim se sonda prinosi tački, a njen položaj na Z osi očitavan je lenjirom pričvršćenim za sondu. Zbog očekivane simetrije potencijala merenje je vršeno samo na jednom delu preseka elektroda (slika 2).

## Određivanje kapaciteta kondenzatora

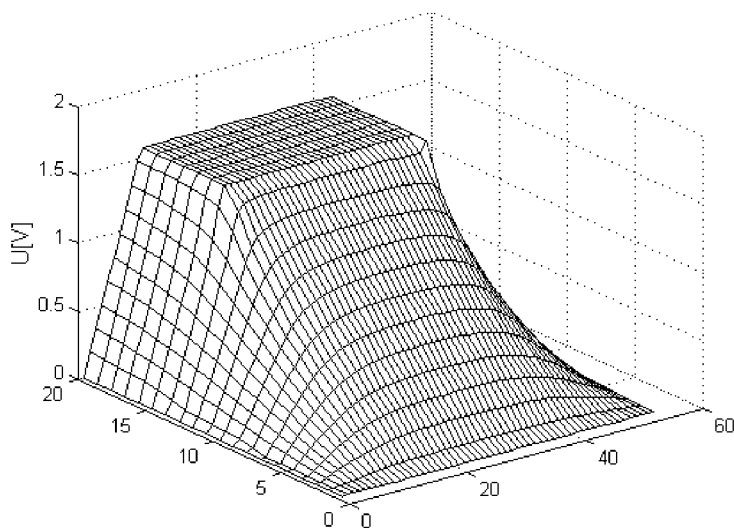
U formuli (1) figurišu otpor kondenzatora potopljenog u elektrolit i specifična provodnost elektrolita. Obe ove veličine neophodno je eksperimentalno utvrditi. Specifična provodnost elektrolita može se na osnovu (1) odrediti ako se kondenzator poznatog kapaciteta potopi u elektrolit, a zatim se izmeri otpor  $R$  tog sistema. U slučaju pločastog kondenzatora imamo:

$$\sigma = \frac{d}{RS}, \quad (2)$$

gde je  $S$  površina ploča potopljena u elektrolit, a  $d$  rastojanje između ploča. Otpor  $R$  odredio sam na osnovu Omovog zakona. Za različite vrednosti amplitude napona između elektroda merio sam struju koja protiče kroz kolo. Sa grafika zavisnosti  $U$  od  $I$  dobijen je otpor  $R$ . Na isti način meren je i otpor sredine između elektroda pravougaonog oblika.

## Rezultati

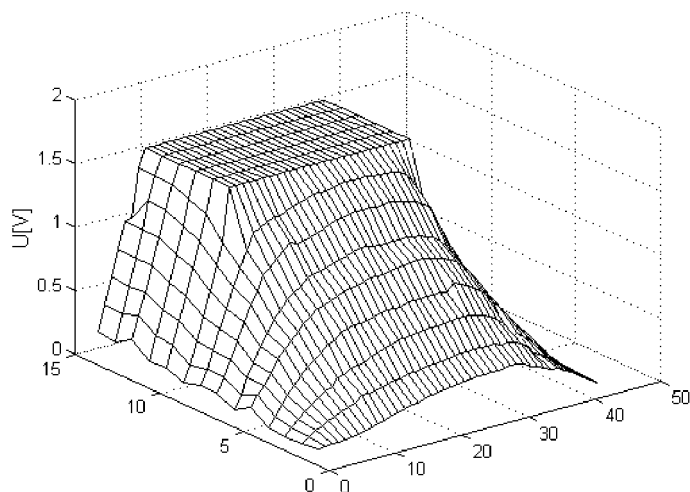
Rezultati simulacije i merenja realne raspodele potencijala između elektroda prikazani su na graficima (slike 3 i 4). Oblik elektroda u simu-



Slika 3.  
Vrednosti potencijala na preseku dve beskonacne pravougaone elektrode dobijene numericki metodom relaksacije.

Figure 3.  
The potential distribution on the cross-section of two infinite rectangular electrodes obtained by the relaxation method.

laciji odgovara realnom modelu. Jedan podeok na X i Y osama kod grafika na slici 4 odgovara rastojanju od 2 mm. Usled nepreciznosti određivanja



Slika 4.  
 Eksperimentalno  
 dobijene vrednosti  
 potencijala između  
 dve pravougaone  
 elektrode ( $35 \pm 3$ ) mm  
 od dna suda.

Figure 4.  
 The potential  
 distribution between  
 two rectangular  
 electrodes ( $35 \pm 3$ ) mm  
 from the bottom of  
 the vessel.

položaja sonde prisutne su nepravilnosti na ovom grafiku, ali i pored toga očigledna je sličnost između rezultata simulacije i eksperimenta.

Grafik na slici 5 prikazuje rezultate eksperimentalnog merenja potencijala blizu ivica elektroda. Na ovom grafiku mogu se primetiti efekti krajeva (smanjen potencijal iznad unutrašnje elektrode) koji se prostiru u 3D. Da bi se Grafik 3 dobio numerički potrebno je vršiti simulaciju u 3D. Međutim, tada bi bilo potrebno izračunati potencijal u mnogo većem broju tačaka.

### Rezultati merenja kapaciteta kondenzatora

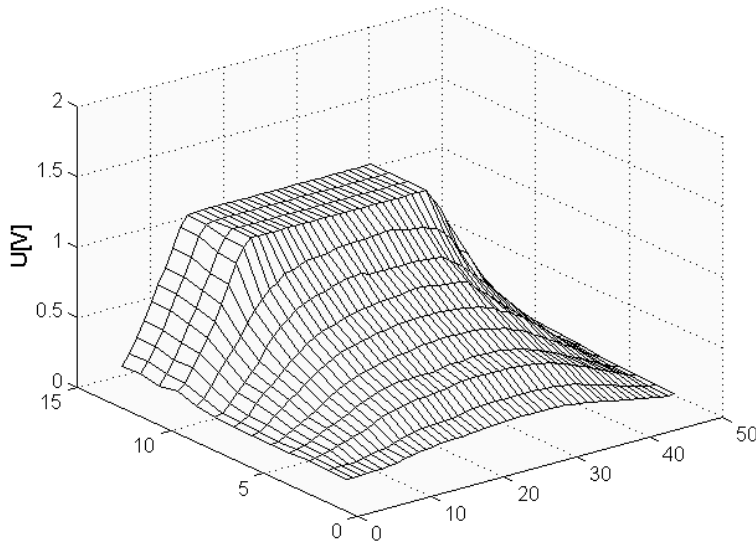
Merenjem je dobijena otpornost sredine između elektroda  $R = (14.91 \pm 0.02) \Omega$ , kao i provodnost elektrolita:  $\sigma = (5 \pm 2) \cdot 10^{-2} \text{ m}/\Omega$ . Iz (1) na osnovu ove dve vrednosti može se izračunati kapacitet kondenzatora u vakuumu ( $\epsilon_r = 1$ ):

$$C = (1.1 \pm 0.4) \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

Usled skretanja strujnica na dnu suda dobijena vrednost kapaciteta odgovara polovini kapaciteta realnog kondenzatora.

### Zaključak

Metoda numeričkog rešavanja Laplaceove jednačine omogućava da precizno odredimo vrednosti funkcije potencijala u dvodimenzionalnim



Slika 5.  
 Eksperimentalno  
 dobijene vrednosti  
 potencijala između dve  
 pravougaone elektrode  
 ( $127 \pm 3$ ) mm od dna  
 suda.

Figure 5.  
 The potential  
 distribution between  
 two rectangular  
 electrodes ( $127 \pm 3$ ) mm  
 from the bottom of the  
 vessel.

sistemima. Međutim, ukoliko želimo da ispitamo trodimenzionalan sistem (efekte krajeva prisutne na Grafiku 3), neophodno je izračunati potencijal u veoma velikom broju tačaka. Za iole veći sistem ovaj zadatak postaje pretežak čak i za današnje računare.

Eksperimentalno određivanje potencijala omogućuje nam da prevaziđemo ovu poteškoću. Međutim, da bi izvršili precizno merenje potencijala neophodno je odrediti položaj merne sonde pri svakom merenju sa velikom tačnošću, za šta je potrebna posebna aparatura. Drugi problem je i sam obim merenja. Da bi stekli iole preciznu sliku o izgledu funkcije potencijala, neophodno je izvršiti veoma veliki broj merenja (broj merenja raste sa trećim stepenom zahtevane tačnosti po X, Y i Z osama). Rešenje ovih problema bio bi automatizovan sistem za merenje koji bi automatski pomerao sondu i slao podatke u računar.

## Literatura

- Popović, B.D. 1966. *Zbornik rešenih problema iz elektromagnetike*. Beograd: Naučna knjiga
- Purcell, E.M. 1988. *Elektricitet i magnetizam*. Zagreb: Tehnička knjiga
- Surutka, J. 1971. *Elektromagnetika*. Beograd: Građevinska knjiga

---

Marko Cetina

## Determination of Capacitance and Potential Distribution Between Electrodes of an Irregularly Shaped Capacitor

A simulation of the potential distribution in a dielectric was compared with a 'real-life' experiment. The simulation, based on the relaxation algorithm described in literature (Popović 1966), was tested on a model irregularly shaped capacitor. For experimentally measuring the potentials the capacitor was submerged in a homogenous electrolyte and connected to an external alternating voltage. A voltmeter was then used to determine the induced potential distribution between the electrodes and at their edges. In spite of the inaccuracy of potential measurements, a good qualitative correspondence between the simulation and the experimental results could be observed (Figures 3 and 4). However, because of the large number of points in which the potential was to be calculated, the relaxation method proved to be effective only in 2D. Because of this, the potentials near the edges of the electrodes (Figure 5) could be measured only experimentally. In the second part of the project, the capacitance of the capacitor was measured by measuring the medium resistance between the submerged electrodes.

