Ivan Riznić, Tijana Kosorić, Mihajlo Vanević

Distribucija lavina u saobraćaju

Na jednostavnom modelu saobraćaja ispitivana je distribucija veličina i trajanja lavina. Model je celularni automat čije je stanje predstavljeno matricom dimenzija 50×50 sa periodičnim graničnim uslovima. Definisana je lavina i kriterijumi za veličinu i trajanje lavine. Na slučajan način birano je početno stanje sistema. Sistem je zatim relaksiran, nakon čega je izvršeno 10 hiljada perturbacija menjanjem smera jednog automobila. Merenja su izvedena za broj automobila od 1000 do 2250. Dobijeno je da su obe distribucije stepene funkcije, a kritični eksponenti su u saglasnosti sa literaturom (Bak et al. 1988).

Uvod

Sistemi kao što su gomila peska, berza, ekosistemi ili saobraćaj sastoje se od velikog broja konstituenata koji međusobno intereaguju. Stanje konstituenata opisuje se skupom parametara. Evolucija stanja konstituenta zavisi od interakcija sa drugim konstituentima. U funkciji od vremena ovakvi sistemi se mogu naći u jednom od tri tipa stanja: pobuđenom, stanju relaksacije i kritičnom stanju. *Pobuđeno stanje* nastaje promenom bar jednog konstituenta pod dejstvom spoljašnjih faktora. Pod *relaksacijom* sistema podrazumeva se niz interakcija konstituenata uzrokovanih pobuđivanjem. Relaksacijom sistem dolazi u *kritično stanje* u kom u daljem toku vremena nema interakcija ili se interakcije periodično ponavljaju. Relaksacija sistema naziva se *lavinom*. *Veličina lavine* je broj konstituenata zahvaćenih procesom relaksacije. *Trajanje lavine* je vreme proteklo od pobuđivanja sistema do uspostavljanja kritičnog stanja.

U slučaju osipanja gomile peska, mereći vreme osipanja (T) i masu osipajućeg peska (S) dobijena je distribucija trajanja i veličine lavina:

$$D(T) \propto T^{\gamma}$$

$$D(S) \propto S^{\tau}$$

gde su γ i τ kritični eksponenti (Bak *et al*. 1988).

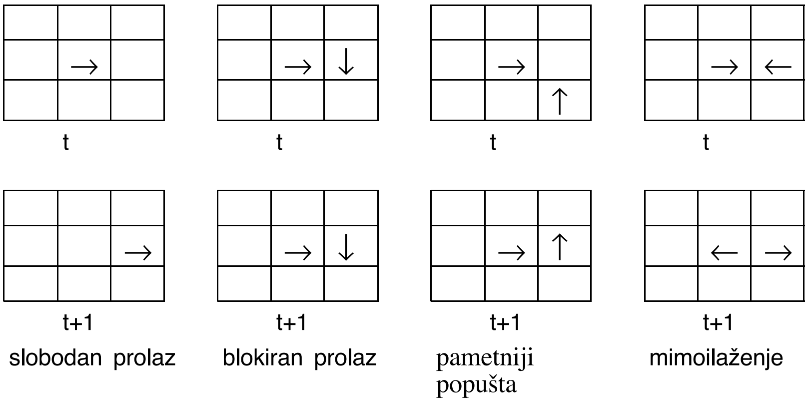
Ivan Riznić (1979), Aranđelovac, I šumadijski odred b.b., učenik 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

Tijana Kosorić (1980), Loznica, Marije Bursać 7, učenica 3. razreda Gimnazije Vuk Karadžić u Loznici

Mihajlo Vanević (1978), Beograd, učenik 4. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

Model saobraćaja

Ispitivanje distribucije lavina u saobraćaju simulirali smo celularnim automatom. Stanje sistema opisano je matricom dimenzija 50×50 sa periodičnim graničnim uslovima. Automobili su ćelije sa nenultim vrednostima. Smer kretanja automobila može biti levo, desno, gore i dole. Svakom smeru pridružena je vrednost 1, 2, 3 ili 4 respektivno. Kretanje automobila (dinamika sistema) se simulira promenom vrednosti elemenata matrice. Položaj automobila u trenutku (iteraciji) $t+1$ u zavisnosti od položaja u trenutku t (pravila kretanja automobila) ilustrovan je na slici 1.



Slika 1. Pravila kretanja automobila (strelice označavaju smer kretanja).

Figure 1. Transition rules (arrows show possible moving directions).

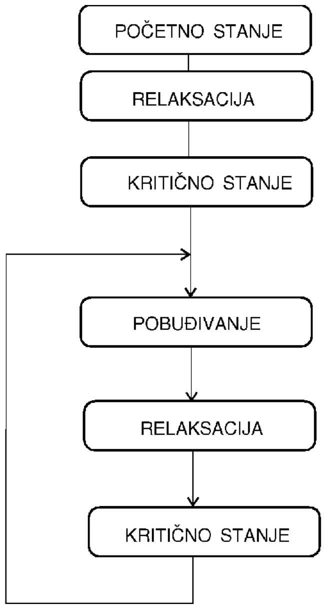
U situaciji *pametniji popušta* na slučajan način se određuje automobil koji propušta drugog, pri čemu je verovatnoća za oba automobila ista.

Za početak lavine uzet je trenutak promene smera jednog od automobila. Kraj lavine je trenutak u kom su svi automobili nepokretni ili se njihovo kretanje periodično ponavlja. Trajanje lavine je vreme (broj iteracija) proteklo od početka do kraja lavine. Veličina lavine je ukupan put (broj promena vrednosti ćelija) koji pređu pokrenuti automobili u toku lavine.

Početno stanje sistema određuje se generisanjem vrednosti (v) svake ćelije zasebno slučajnim brojevima r_1 i r_2 iz uniformne raspodele na intervalu (0, 1):

$$v = \begin{cases} 0, & 0 < r_1 < p \\ 1, & p < r_1 < 1 \ \text{ i } \ 0 < r_2 < 0.25 \\ 2, & p < r_1 < 1 \ \text{ i } \ 0.25 < r_2 < 0.5 \\ 3, & p < r_1 < 1 \ \text{ i } \ 0.5 < r_2 < 0.75 \\ 4, & p < r_1 < 1 \ \text{ i } \ 0.75 < r_2 < 1, \end{cases}$$

pri čemu je p gustina automobila, broj iz intervala (0, 1). Sistem se relaksira po pravilima za kretanje automobila. Periodično kretanje automobila izbegnuto je povećanjem gustine p. Za $p > 0.4$ u simulaciji je sistem uvek relaksirao do kritičnog stanja u kome su svi automobili nepokretni. Iz kritičnog stanja sistem je pobuđivan promenom smera kretanja slučajno odabranog automobila tako što se od preostala tri smera na slučajan način bira novi smer (svaki od smerova ima jednaku verovatnoću). Sistem se zatim relaksira. Veličina (S) i trajanje (T) lavine se upisuju u datoteku. Kada se lavina završi, ponovo se pobuđuje sistem, zatim se relaksira, a novodobijene vrednosti veličine i trajanja lavine se beleže. Isti postupak se ponavlja 10 000 puta. Šema toka simulacije dat je na slici 2.



Slika 2. Tok simulacije.

Figure 2. The simulation algorithm.

Vrednosti kritičnih eksponenata

Simulirali smo opisani celularni automat sa matricom 50×50 za gustine automobila od 0.45 do 0.85. Sistem je pobuđivan 10 000 puta u svakoj simulaciji. Najviši koeficijent korelacije (ρ) je 0.98. Dobija se linearnim fitom *D(S)* za gustinu automobila 0.75 (slika 4) i linearnim fitom *D(T)* za gustinu automobila 0.85 (slika 5). Podaci su obrađeni programskim paketom Origin 4.0. Rezultati merenja dati su u tabeli 1.

Porast vrednosti eksponenata je očekivan jer pri većoj gustini automobila relaksacija sistema manje traje pa lavine malih veličina i kratkog trajanja dominiraju. Veća vrednost eksponenta γ od vrednosti τ može se objasniti algoritmom simulacije. U svakoj iteraciji dužina puta koji su prešli automobili je veća ili jednaka 1. Kako lavina prestaje u iteraciji u kojoj je dužina pređenog puta *0* važi relacija $S \geq T$. Prema tome, broj lavina većih veličina je veći od broja lavina koje duže traju, pa je $\gamma \geq \tau$. Koeficijent korelacije raste sa porastom gustine automobila.

Tabela 1. Zavisnost vrednosti eksponenata od gustine automobila

P	τ	$\rho(\tau)$	γ	$\rho(\gamma)$
0.45	1.64	0.95	2.1	0.89
0.45	1.69	0.95	2.1	0.91
0.45	1.67	0.96	2.1	0.91
0.55	2.00	0.96	2.1	0.96
0.55	1.70	0.95	2.2	0.93
0.55	2.01	0.97	2.7	0.94
0.65	1.86	0.95	2.5	0.94
0.65	1.91	0.97	2.4	0.95
0.65	1.92	0.97	2.5	0.94
0.75	1.94	0.97	2.5	0.96
0.75	2.03	0.98	2.5	0.96
0.75	2.17	0.96	2.1	0.97
0.85	2.10	0.97	2.8	0.96
0.85	2.29	0.96	3.1	0.98

Automobili se u ovom modelu organizuju u *statičke strukture* (slika 3) koje prouzrokuju dolazak sistema u kritično stanje. Red strukture je broj automobila koji je čine. Tokom simulacije konstatovane su strukture reda četiri i šest. Najčešće strukture su reda četiri dok su strukture reda šest retke. Teoretski postoje i strukture reda 8, 10, 12…, ali je verovatnoća da se one jave veoma mala.

→	↓
↑	←

↓	←
→	↑

strukture reda 4

→	→	↓
↑	←	←

↓	←	←
→	→	↑

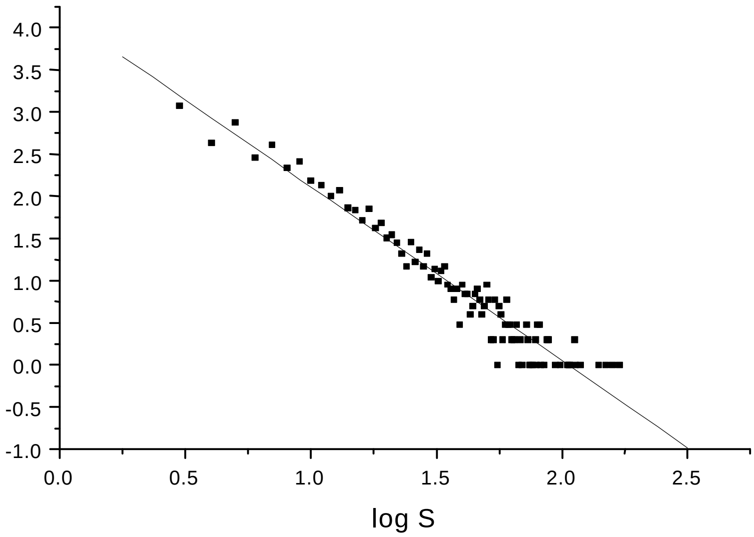
strukture reda 6

Slika 3. Strukture koje najčešće uzrokuju kritičnost sistema.

Figure 3. Situations that commonly cause criticality of the system.

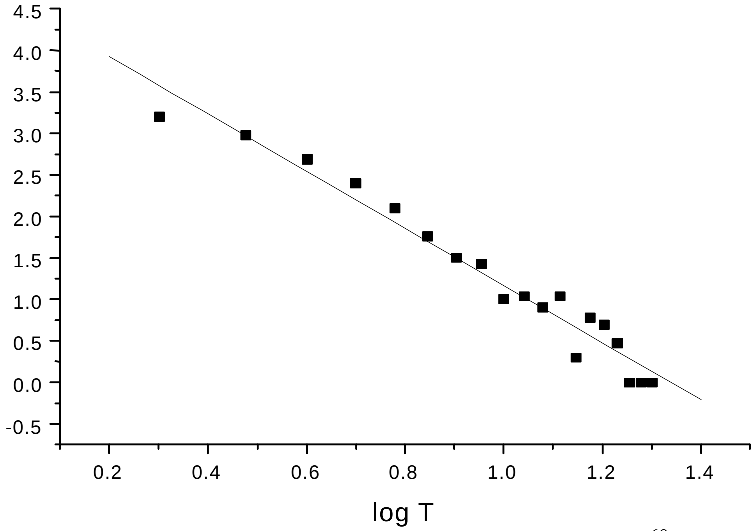
Broj početnih stanja Q za a automobila i matricu dimenzija $m \times n$ je:

$$Q = \binom{mn}{a} \cdot 4^a \ .$$



Slika 4. Distribucija veličine lavina za gustinu automobila p = 0.75 (gore) i distribucija trajanja lavine za gustinu automobila p = 0.85 (dole).

Figure 4. Distribution of avalanche sizes (above) and avalanche lastings (bellow)



Za matricu dimenzija 10×10 i broj automobila 100, Q je reda 10^{60}, odakle sledi da je nemoguće u realnom vremenu izračunati srednju vrednost eksponenata. Zbog toga uzimanjem uzoraka na slučajan način, ocenjujemo srednju vrednost. Što je broj uzoraka veći, to je ocena tačnija.

Zaključak

Dobijeni rezultati pokazuju da su, u razmatranom modelu saobraćaja, distribucije veličina i trajanja lavina opisane stepenim funkcijama. Vrednost kritičnog eksponenta τ je u opsegu od 1.64 do 2.29, a vrednost kritičnog eksponenta γ je između 2.1 i 3.1. Oba eksponenta rastu sa porastom gustine automobila. Koeficijenti korelacije su visoki (u intervalu od 0.89 do 0.98) i rastu sa porastom gustine automobila. Rezultati dobijeni ovom simulacijom su u saglasnosti sa rezultatima u simulaciji *Conway s Game of Life* (Bak *et al*. 1989). U ovom modelu pokazano je postojanje kritičnih fenomena.

I pored visoke korelacije, primećena su odstupanja od idealnog stepenog zakona (slika 4). Pretpostavka je da je to zbog relativno malog broja pobuđivanja sistema i malih dimenzija matrice, usled čega je efekat krajeva više izražen. Energija sistema u modelu saobraćaja (broj automobila) je stalna, dok je u *Life*-u promenljiva (broj živih ćelija nije konstatan), što bi moglo ukazati da distribucija lavina ne zavisi od konzervativnosti sistema. Bilo bi interesantno, dodavanjem pravila za napuštanje saobraćajne mreže i ulazak u saobraćajnu mrežu, napraviti model koji ne bi bio konzervativan, a zatim ispitati postojanje kritičnih fenomena. U daljem radu moglo bi se takođe ispitiati da li se distribucija lavina razlikuje u sistemima sa gustinom automobila manjom od 0.4 u kojima je izraženo periodično ponavljanje stanja sistema.

Literatura

Bak P, Chen K, Creutz M, 1989. Self-organized criticality in the Game of Life . *Nature*, **342**: 780

Bak, P., Chen, K. 1991. Self-organized criticality. *Scientific American,* **264** (1): 26-33.

Bak, P., Tang, C., Wiesenfeld, K. 1988. Self-organized criticality. *Phys. review A*, **38**: 364

Stauffer, D. 1991. Programming cellular automata. *Computers in physics*, **1** (1): 82-7

Ivan Riznić, Tijana Kosorić, Mihajlo Vanević

Avalanches Distributions in a Traffic Model

Avalanches size and duration distributions in a simple traffic model are analyzed. System is approximated by cellular automata, defined by 50×50 matrix with periodical boundary conditions. Cars are represented by cells with non-zero values. Possible moving directions are left, right, up and down. Each of these directions has associated value of 1, 2, 3 or 4 respectively. Car s moving (system dynamics) is simulated by successive iterations of matrix elements. Current position of car at moment $t+1$ de-

pends only on previous position, i.e. position at moment t. Moving rules are illustrated at Figure 1.

In the case where both cars have equal right to pass first, problem is solved by chance. The beginning of an avalanche is defined by instant

$$v = \begin{cases} 0, & 0 < r_1 < p \\ 1, & p < r_1 < 1 \text{ i } 0 < r_2 < 0.25 \\ 2, & p < r_1 < 1 \text{ i } 0.25 < r_2 < 0.5 \\ 3, & p < r_1 < 1 \text{ i } 0.5 < r_2 < 0.75 \\ 4, & p < r_1 < 1 \text{ i } 0.75 < r_2 < 1, \end{cases}$$

changing of direction of any single car in the system. The moment when we have all cars stopped or periodically repeated is termed as the end. An avalanche duration is defined as time between those two moments. The size of an avalanche is total path (numbers of changes of cells values) passed by all cars. Initial state of the system is determined by two pseudo-random generators with uniformly distributed numbers on interval $[0,1)$ where p represents cars density defined on interval $[0, 1)$. System is relaxing by the rules defined for cars moves. Periodical cars moving is avoided by setting cars density to value big enough. For $p > 0.4$ system relaxes into meta-stable state where all cars are still. Static structures are also noticed. They have periods of 4 or 6. Theoretically, there must exist structures with periods of 8, 10, etc., but they have much lower probabilities. Avalanches are incited by changing of randomly chosen car s direction in metastable state. Simulation have been run for different values of p from 0.45 to 0.85 (1000-1250 cars). System was incited 10 000 times for each experiment.

Obtained results show that distributions of sizes and duration s of avalanches follow power law:

$$D(S) = S^{\tau}, \quad D(T) = T^{\gamma}$$

Critical exponent value τ lays between 1.64 and 2.29 and γ between 2.1 and 3.1. Both exponents increase with cars density. Correlation coefficient, usually greater then 0.9, attains highest values for high cars densities. Obviously, traffic model shows characteristics of critical system.

Obtained results are consistent with those for Conway s Game of Life (Bak *et al.* 1989). Systems would be much more alike if we introduce rules that allow variable number of cars, because Life is not a conservative system.