

Samoorganizovana kritičnost u *Game of Life*

Određeni su parametri koji opisuju lavine u igri Life i upoređeni sa parametrima u sistemima koji pokazuju osobine samoorganizovane kritičnosti. Lavine su uzrokovane perturbacijom jedne ćelije u metastabilnom stanju. Eksperiment je po prvi put izveden na personalnom računaru (ranije objavljeni rezultati su dobijani na super-računarima). U eksperimentu su korišćene mreže sa otvorenim granicama, veličine do 250×250. Kritični eksponenti se slažu sa vrednostima koje su dobili Alsrom i Leao (1994).

Uvod

Kod faznih prelaza drugog reda dinamika kritičnog stanja ima oblik $1/f$ ili treperavog šuma. Takav šum je primećen u velikom broju raznih sistema: svetlosti kvazara, protoku reka, protoku struje kroz otpornike, fluktuacijama na berzi akcija, kosmičkim strukturama i turbulenciji. Međutim, upravo zbog široke rasprostranjenosti, nije bilo moguće uočiti nikakav generalni mehanizam koji se nalazi u osnovi takvog ponašanja. Takođe, dinamički sistemi u kritičnoj tački ispoljavaju prostornu i vremensku samosličnost. Termodinamički sistemi mogu dospeti u kritično stanje samo podešavanjem parametra (npr. temperature) i kao takvi se u prirodi javljaju samo slučajno. 1988. god. Bak, Tang i Wiesenfeld uvode termin *samoorganizovana kritičnost* (SOK) da bi opisali sisteme koji bez spoljnog podešavanja parametara sistema evoluiraju u kritično stanje. Rad je imao veliki uticaj na modernu statističku fiziku, jer su pomenute osobine, $1/f$ šum i fraktalna struktura, priznake postojanja SOK-a (Bak *et al.* 1988).

Odlika SOK-a je da perturbacija sistema na lokalnom nivou može dovesti do reakcije po celoj skali, od lokalne do lančane reakcije, koja obuhvata ceo sistem. Sandpile model izložen u Bak *et al.* (op. cit.) je paradigma SOK-a – dodavanje zrna na gomilu peska može prouzrokovati lavinu, ali i ne mora.

Jelena Grujić (1979), Beograd, Nova Skojevska 27/12, učenica 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu.

Milovan Šuvakov (1979), Kula, Maršala Tita 248c/21, učenik 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu.

Analogno lavinama u sandpile modelu dva parametra se najčešće posmatraju u modelima koji opisuju SOK: dužina trajanja lavina t i veličina lavine s . Distribucije tih parametara imaju stepeni zakon $D(t) \propto t^{-b}$ i $D(s) \propto s^{-a}$, gde su b i a kritični eksponenti sa vrednostima približno -1 (Bak *et al.* 1988).

Celularni automat

Celularni automat (CA) se definiše kao skup pravilno raspoređenih ćelija u n -dimenzionalnom prostoru. Diskretna vremenska podela se naziva sekvenca generacija. Svaka ćelija, u datoj generaciji, može imati jedno od konačnog broja stanja. Skup stanja svih ćelija u datoj generaciji naziva se konfiguracija CA.

Susedi su konačan skup ćelija, koji je kod uniformnih automata definisan na isti način za sve ćelije u prostoru. Stanje ćelije zavisi od stanja same ćelije i njenih suseda u prethodnoj generaciji. Zakon po kome se određuje stanje ćelije naziva se prenosna funkcija. Ako su susedi i prenosna funkcija simetrični, tada se kaže da je CA simetričan.

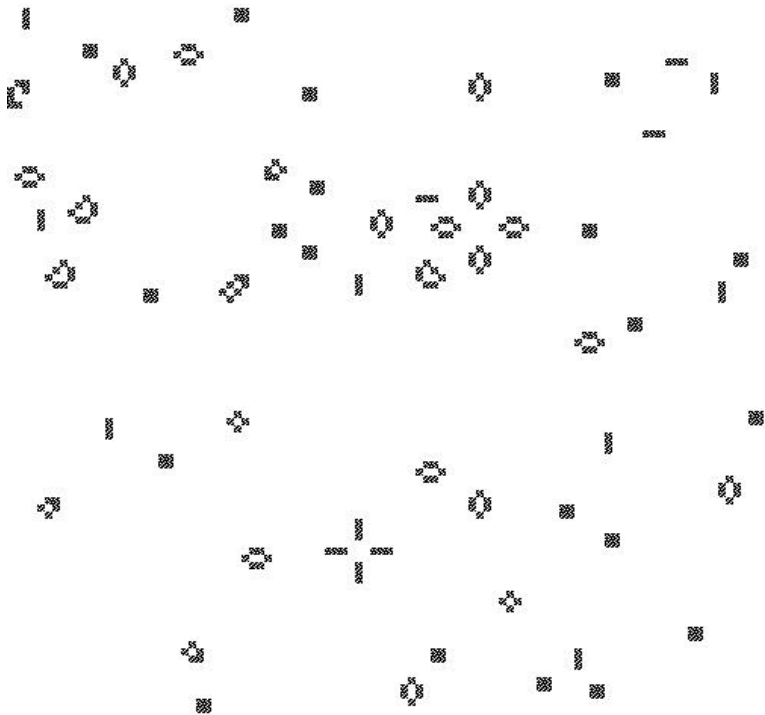
Game of Life

CA *Game of Life* je osmislio John Horton Conway. *Life* je dvodimenzionalni CA definisan u ćelijskom prostoru $Z \times Z$, gde je Z prirodan broj. Svaka ćelija $x = (x_1, x_2) \in Z \times Z$ direktno je povezana sa svojim susedima $\{(x_1 + v_1, x_2 + v_2) : \max\{|v_1|, |v_2|\} \leq 1 \ \& \ (v_2 = 0 \Rightarrow v_1 \neq 0) \ \& \ (v_1 = 0 \Rightarrow v_2 \neq 0)\}$ – Murovo (Moore) susedstvo. Ćelija može imati dva stanja – $q_0 \in \{0, 1\}$. U sledećoj generaciji stanje ćelije je $\sigma(q_0, q_1, \dots, q_8)$, gde su $q_1 - q_8$ stanja njenih suseda, a σ definisano na sledeći način

$$\sigma(q_0, q_1, \dots, q_8) = \begin{cases} 1, & \text{ako} \begin{cases} q_0 = 1 & \text{i} \quad 2 \leq \sum_{j=1}^8 q_j \leq 3 \\ q_0 = 0 & \text{i} \quad \sum_{j=1}^8 q_j = 3 \end{cases} \\ 0, & \text{ostalo} \end{cases}$$

Ovakav celularni automat je uniforman, deterministički (isto se ponavlja u svakoj generaciji) i čuva simetričnost (Demongeot *et al.* 1985).

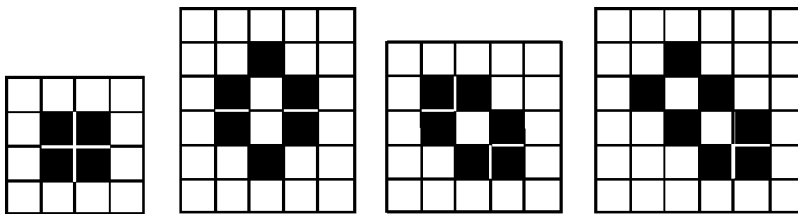
Svaka ćelija može imati dva stanja: 1 (živa) ili 0 (mrtva). Opstanak ćelije zavisi od stanja osam suseda i same ćelije. U slučaju da je ćelija



Slika 1.
Igra Life.

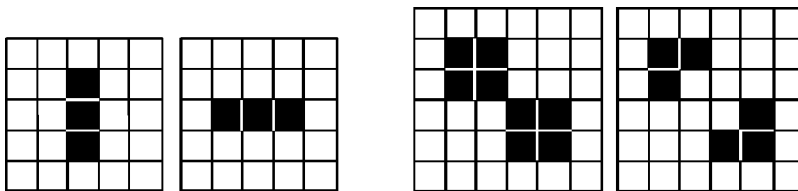
Figure 1.
Game of Life

Živa potrebna su dva ili tri živa suseda da bi preživela, a da bi mrtva ćelija oživela treba joj tačno tri živa suseda. Ono što je interesantno kod *Game of Life* je pojava stabilnih (skup ćelija koje ne menjaju stanje tokom vremena – slika 2), periodičnih (slika 3) i translacionih konfiguracija.



Slika 2.
Primeri stabilnih konfiguracija.

Figure 2.
Examples of stable configurations.

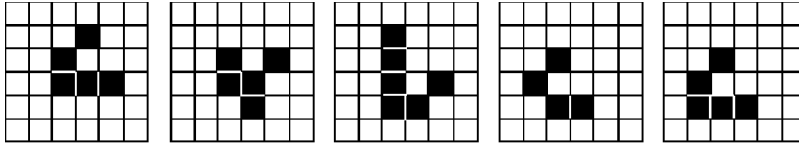


a

b

Slika 3.
Neke periodične strukture.

Figure 3.
Periodical configurations.



Slika 4.
Kretanje glajdera.

Figure 4.
Moving of the glider.

Najpoznatija translaciona konfiguracija je tzv. glajder (slika 4), koji se sa periodom četiri translaciono pomera za vektor $(1, -1)$, povezujući na taj način klastere (izolovane grupe živih ćelija).

Ako sistemu zadamo početnu konfiguraciju i pustimo ga da relaksira, posle dovoljno dugo vremena dolazi do stabilnog stanja, koje se sastoji od isključivo stabilnih i periodičnih konfiguracija.

Life je definisan na konačnoj rešetki i može se pretpostaviti da distribucija trajanja lavina prati skalirajuću formu (Alsrom and Leao 1994):

$$D(t) = t^b f\left(\frac{t}{t_c}\right) \quad (2)$$

gde je f skalirajuća funkcija sa osobinama:

$$x \ll 1 \Rightarrow f(x) \rightarrow 1, \quad (3.1)$$

$$x \gg 1 \Rightarrow f(x) \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

t_c je kritično vreme trajanja lavine i zavisi od veličine sistema L kao $t_c \propto L^z$. Ono predstavlja veličinu iznad koje konačne dimenzije sistema imaju značajan uticaj.

Da bi se eliminisao uticaj šuma u eksperimentu, umesto $D(t)$, koristi se kumulativna raspodela $C(s)$, koja je definisana kao:

$$C(t) = \sum_{t'=1}^{\infty} D(t') \quad (4)$$

Odavde sledi:

$$D(t) = t^{(l+b)} f\left(\frac{-t}{t_c}\right) \quad (5)$$

gde su skalirajuće funkcije f i g povezane relacijom:

$$f(x) \propto (1+b)g(x) + xg(x). \quad (6)$$

Za razliku od peščanika i drugih ranije izučvanih modela koji pokazuju SOK i za koje je karakteristično lokalno održanje, u *Life*-u ne važi lokalni zakon održanja i on predstavlja novu klasu sistema koji pokazuju samoorganizovanu kritičnost. Ovaj rezultat pobija tezu da je samoorganizovana kritičnost posledica lokalnog održanja.

Eksperiment

Napisali smo simulaciju za personalni računar u programskom jeziku C++, sa sledećim algoritmom:

- A) Na početku simulacije se postavi slučajno stanje, sa verovatnoćom od 50% da ćelija bude živa.
- B) Zatim sistem evoluirá po pravilima *Life*-a i pri tome se proverava da li je uspostavljeno stabilno stanje; ukoliko jeste, prelazi se na korak C.
- C) Slučajnim izborom stanje jedne mrtve ćelije se menja i ponavlja se korak B. Ukoliko je ova ćelija sused neke žive ćelije, doći će do poremećaja stabilnosti sistema, tj. početka lavine.

Na kraju koraka B beleži se trajanje lavine, definisano kao broj generacija od perturbacije do uspostavljanja stabilnog stanja. Koraci B i C su ponavljani 50 000 puta u toku jedne simulacije.

U metastabilnom stanju populacija živih ćelija je oko 3%, pa je moguće da slučajno odabrana mrtva ćelija nema živih suseda. Gruba procena verovatnoće za takav događaj je $0.97^9 \approx 0.8$. Ako takvoj ćeliji promenimo stanje, ona će u sledećem koraku umreti ne menjajući ostatak sistema. Zato su birane samo mrtve ćelije iz susedstva živih, čime je značajno smanjeno vreme potrebno za nastanak lavine.

Kriterijum za tačno utvrđivanje metastabilnog stanja bi se sastojao u memorisanju položaja ćelija u određenom broju uzastopnih generacija i pronalaženju identičnih generacija. Lako je videti da je ovaj proces memorijski i vremenski izuzetno zahtevan, zbog čega smo usvojili manje precizan kriterijum – koristili smo činjenicu da se u metastabilnom stanju ukupan broj živih ćelija periodično ponavlja. Tako, umesto cele konfiguracije, memoriše se ukupan broj živih ćelija.

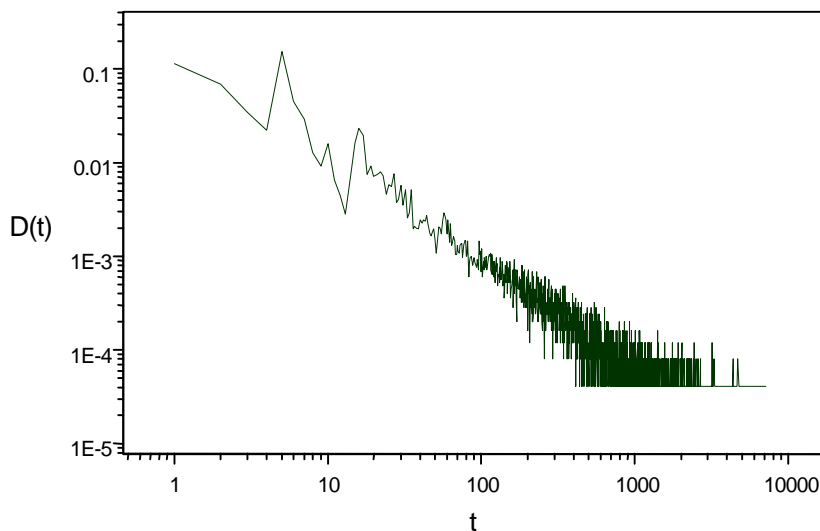
Razlog zbog kojeg u ovom slučaju može doći do greške je mogućnost periodičnog ponavljanja ukupnog broja ćelija, a da nije došlo do stabilnog stanja. Primer takve konfiguracije je glajder. Ovu grešku smo delimično otklonili time što smo kreirali simulaciju tako da pamti ukupan broj živih ćelija svake generacije, u nizu 200 uzastopnih generacija. Pretragom niza za periode manje od 13 proverava se periodičnost, pa do greške može doći i zbog mogućnosti postojanja stabilnih stanja čiji je period ponavljanja ukupnog broja živih ćelija veći od 12. Verovatno su takve konfiguracije izuzetno retke (mi ih nikada nismo uočili), pa smo zbog brzine rada simulacije ograničili period ponavljanja na 12.

Simulirali smo na mreži sa otvorenim granicama u kojoj su granične ćelije uvek mrtve. Veličine korišćenih mreža su bile 50×50, 100×100, 150×150, 200×200, 250×250.

Rezultati i diskusija

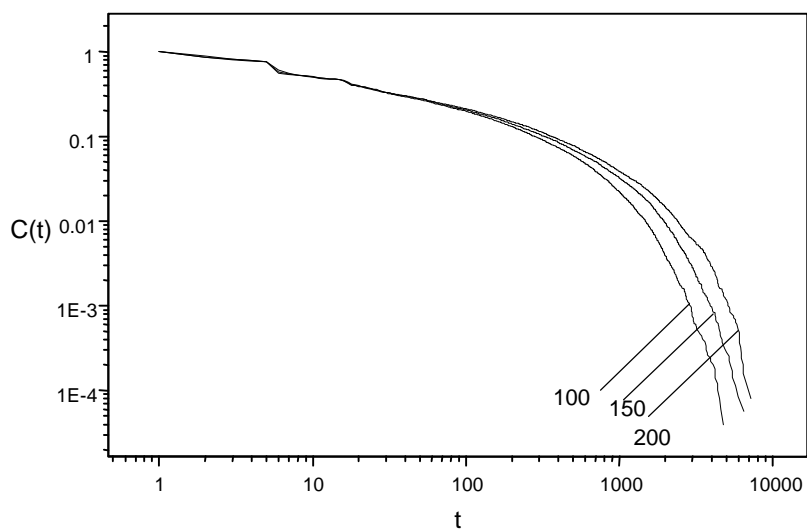
Normalizovana distribucija trajanja lavina, merena na mreži veličine 100×100 prikazana je na grafiku (slika 5). Distribucije za ostale veličine mreža su vizuelno veoma slične.

Zbog velikog šuma u distribuciji, izabrali smo drugačiji način analiziranja, koristeći kumulativnu raspodelu. Kumulativne raspodele veličina lavina za mreže veličina 100×100 , 150×150 , 200×200 prikazane su na grafiku (slika 6).



Slika 5.
Normalizovana
distribucija trajanja
lavina na mreži
 100×100 .

Figure 5.
Normalized
distribution of the
avalanche durations.



Slika 6.
Kumulativne
raspodele veličina
lavina za mreže
veličina 100×100 ,
 150×150 , 200×200

Figure 6.
Cumulative
distributions of
avalanche magnitudes
for lattices of
 100×100 , 150×150
and 200×200 .

Kumulativna raspodela donekle eliminiše beli šum. Prema Demongeot-u (1985) ovi eksperimentalni rezultati se ponašaju po eksponencijalnom zakonu, pa smo ih aproksimirali funkcijom

$$g\left(\frac{t}{t_c}\right) = e^{-t/t_c}. \quad (7)$$

Merene veličine koeficienta opadanja i kritičnih vremena dobijenih kao rezultat fitovanja kumulativne raspodele dati su u tabeli 1.

Veličina mreže (L)	Koef. opadanja (b)	Kritično vreme (t_c)
50×50	-1.47	420
100×100	-1.31	608
150×150	-1.31	737
200×200	-1.31	845
250×250	-1.31	921

Vrednosti kritičnih eksponenata b su u saglasnosti sa vrednostima očekivanim u sistemima sa samoorganizovanom kritičnošću i sa rezultatima u literaturi (Bak *et al.* 1988; Alsrom and Leao 1994). Značajan parametar ovog fenomena je kritično vreme t_c , koje je povezano sa veličinom mreže. Dobijen je očekivani stepeni odnos, a kritični parametar z smo procenili na 0.5. Kritični parametar t_c ne podudara se sa kritičnim parametrima kod Alsroma i Leaoa (Alsrom and Leao 1994), ali se parametar z poklapa. Zavisnost t od L potvrđuje odnos $t_c \propto L^z$ za sve veličine mreže, što povlači da ista zavisnost važi i za veće mreže. Prema tome, kada $L \rightarrow \infty$, tada i $t_c \rightarrow \infty$, što bi značilo da za beskonačne mreže neće postojati karakteristična lavina, što je u saglasnosti sa SOK-om. Svi ovi rezultati su dobijeni na personalnom računaru, sa razumnim korišćenem procesorskog vremena.

Literatura

- Alsrom, P., Leao, J. 1994. Self-organized criticality in the Game of life. *Physical Review E*, **49**.
- Bak, P., Tang, C., Wiesenfeld, K. 1988. Self-organized criticality. *Physical Review A*, **38**: 364.
- Bak, P., Tang, C., Wiesenfeld, K. 1989. Self-organized criticality in the Game of Life. *Nature*, **342**: 780.

Demongeot, J. Goles, E. Tchue, M. 1985. *Dynamical Systems and Cellular*. London: Academic Press.

Grossmann, B., Guo, H., Grant, M. 1990. Monte Carlo Renormalization-Group Study of Self-Organized Criticality. *Physical Review A*, **41**: 4195.

Maksimović, P. 1992. Numerička simulacija samo-organizovanih kritičnih pojava na gasketu Sierpinskog (nepublikovano).

Stauffer, D. 1991. Programming cellular automata. *Computers in Physics*, **1** (1): 82-7.

Jelena Grujić and Milovan Šuvakov

Self-organized Criticality in Game of Life

The Game of Life is 2D cellular automaton defined on cell space $N \times N$, where N is integer. It is uniform, deterministic and keeps symmetry (Demongeot *et al.* 1985). All cells have two states: 1 (live) or 0 (dead). The state of one cell depends on states of eight closest neighbors. If cell is alive, it needs two or three live neighbours to survive. In a case when cell is dead, it needs exactly three alive neighbors to relive. Local configurations in game of life can behave in one of three ways: to remain still, i.e. constant over time, periodical or to have translational configuration. If we let start configuration to relax, the system will end in some metastable state, which consists of stable and periodical configurations only.

There are few other systems, which exhibits self-organized criticality (SOC), sandpile, avalanches, etc., and for all of them exist local laws of conservation. In game of life we don't have such a law. Therefore, we can conclude that game of life represents new type of system with characteristics of SOC.

The game of Life is defined on finite lattice and we can suppose that distribution of avalanche follows scaling law (Alsrom and Leao 1994)

$$D(t) = t^b f(t/t_c)$$

where f represents scaling function with following properties: $x \ll 1, f(x) \rightarrow 1$; $x \gg 1, f(x) \rightarrow 0$; t_c is critical time of avalanche duration and depends on the size of system L as $t_c \propto L^z$. This value is significantly influenced by size of the system.

We made computer simulation, using C++ programming language. The simulation is based on the next algorithm:

A) In the beginning we set cells of the system by random with probability of 50% that cell is alive.

B) In the step two, system begins to evolve, following rules of life.

During this time, we check whether system reaches stable state or not. If it does, algorithm proceeds to the step C.

C) We change state of cell chosen by chance and repeat step B. If the cell is neighbor of some alive cell, stability of system would be violated and we would have beginning of an avalanche.

We have repeated steps B and C for 50 000 time during one simulation. It was noticed that there is 3% of alive cells in metastable state, so it is likely that cell chosen by chance has no alive neighbors. Rough estimation for probability of such event is $0.97^9 \approx 0.8$. If someone change the state, cell will probably die in the next step without global consequences. Reviving one dead from neighborhood of alive cells, we reduced number of guesses for nontrivial avalanches.

Whether system has reached metastable state or not, can be concluded from time series of total number of living cells with high probability. Periodicity of those time series is good criterion for avalanche ending. Exception can be made, for instance, by glider emerging. These structures have number of alive cells that behave in periodical manner, however, they can incite avalanche in some other region of the system and therefore violate stability. We checked series with periods less than 13. It is possible to have greater periods, however, such systems haven't been noticed.

We made simulations on lattices with open boundaries where cells on the edge were always dead. The sizes of used lattices were 50×50 , 100×100 , 150×150 , 200×200 , 250×250 .

Normalized distribution of avalanche duration, measured on lattice of size 100×100 , is given on Figure 5. Distribution for others size of lattices are visually very similar.

In order to decrease noise level, we chose analyze using cumulative distribution. Cumulative distribution of avalanche size for lattices of size 100×100 , 150×150 , 200×200 , is given on graph (Figure 6).

Cumulative distribution particularly eliminates white noise. According to Demongeot (1985), experimental results follow exponential law, so we approximated them by following function:

$$g(t / t_c) = \exp(-t / t_c).$$

The measured values of coefficient of decreasing (b) and critical time (t_c), which are results of cumulative distribution fitting are given in the Table 1 in Serbian version of this article, where with L is denoted size of the lattice.

The values of critical exponent b are in agreement with expected values for systems that exhibit self-organized criticality, and with results given in literature (Bak et al. 1988, Alstrom and Leao 1994). Important parameter of this phenomenon is critical time t_c , which correlates with size of lattice. We have got expected power dependency, also. We estimated critical parameter z by 0.5. Critical parameter t_c is not the same as parameter given in literature (Alstrom and Leao 1994), but the parameter z is the same. Dependence t on L confirms relation $t_c \propto L^z$ for all sizes of lattice, so we can conclude that we have same dependence for bigger lattices. In the case when $L \rightarrow \infty$, then $t_c \rightarrow \infty$. Hence, one can conclude that an infinite lattice does not have characteristic avalanche, which is in agreement with SOC.

