

Određivanje koeficijenta otpora vazduha pomoću matematičkog klatna

Ovaj rad čine dva dela. Prvi deo je pokušaj da se što preciznije odredi gravitaciono ubrzanje pomoću standardne školske aparature, a u cilju detaljne analize faktora koji utiču na greške merenja. Drugi deo predstavlja određivanje koeficijenta otpora vazduha pomoću klatna dužine 8 metara. Takođe su analizirani faktori koji utiču na grešku.

A. Određivanje gravitacionog ubrzanja Zemlje

Uvod

Matematičko klatno predstavlja materijalnu tačku obešenu pomoću neistegljivog gipkog konca o nepomičnu tačku. Materijalna tačka osciluje u vertikalnoj ravni oko položaja ravnoteže pod dejstvom sile teže (slika 1).

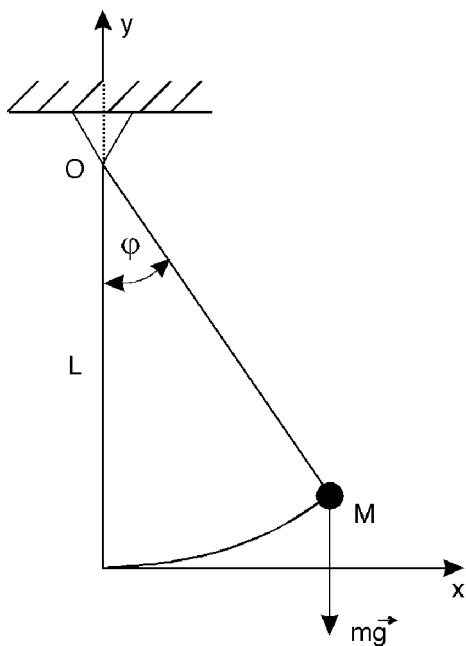
Ako za generalisanu koordinatu izaberemo ugao otklona konca od ravnotežnog položaja φ , potencijalna energija sile teže će biti:

$$E_p = m g l (1 - \cos \varphi),$$

pri čemu smo za nulti nivo potencijalne energije izabrali položaj ravnoteže. Kinetička energija je:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2$$

pa je očigledno da su u slučaju velikih otklona oscilacije klatna nelinearne. Pošto nas interesuju samo male linearne oscilacije oko položaja stabilne ravnoteže, potencijalnu energiju ćemo razviti u stepeni red (do drugog stepena).



Slika 1.
Šema matematičkog
klatna.

Figure 1.
A mathematical
pendulum scheme.

$$E_p = E_p(0) + \left(\frac{dE_p}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} \varphi + \left(\frac{d^2 E_p}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=0} \varphi^2,$$

pri čemu je za mali ugao φ :

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

Diferencijalna jednačina ima sada oblik:

$$\varphi + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

pa je kružna frekvencija oscilovanja:

$$\omega = \sqrt{g/l}$$

a period matematičkog klatna:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \text{t. j. } T = 2\pi \sqrt{l/g}.$$

Aparatura

Klatno promenljive dužine i štoperica.

Metod rada

Merimo štopericom vreme 50 oscilacija matematičkog klatna. To merimo za različitu dužinu matematičkog klatna. A period je $T = \frac{t}{n}$, gde je $n = 50$ oscilacija.

Rezultati merenja

$$\text{Iz jednačine: } g = 4\pi^2 l/T^2$$

$$\Delta g = l g_i - g_{sr} l$$

$$l = 0.001 \text{ m, } t = 0.1 \text{ s, } T = 0.002 \text{ s}$$

Tabela 1. Izmereni izračunati parametri za određivanje g

br.	l [m]	t [s]	T [s]	T^2 [s]	ΔT^2 [s]	g [m/s ²]	Δg [m/s ²]
1	0.75	86.72	1.734	3.008	0.007	9.843	0.04
2	0.70	83.88	1.677	2.814	0.007	9.821	0.04
3	0.65	80.71	1.614	2.606	0.007	9.847	0.04
4	0.60	77.53	1.551	2.404	0.006	9.853	0.04
5	0.55	74.30	1.486	2.208	0.006	9.834	0.04
6	0.50	70.92	1.418	2.012	0.006	9.811	0.05
7	0.45	67.38	1.347	1.816	0.005	9.783	0.05
8	0.40	63.41	1.268	1.608	0.005	9.821	0.06
9	0.35	59.14	1.183	1.399	0.005	9.876	0.06
10	0.30	54.41	1.088	1.184	0.004	10.003	0.07
11	0.25	49.95	0.999	0.998	0.004	9.889	0.08
12	0.20	44.60	0.892	0.796	0.004	9.919	0.09
13	0.15	38.49	0.770	0.593	0.003	9.986	0.12
14	0.10	31.74	0.735	0.403	0.003	9.796	0.16
15	0.09	29.97	0.600	0.359	0.002	9.897	0.29
16	0.08	28.13	0.563	0.316	0.002	9.994	0.32
17	0.07	26.53	0.531	0.282	0.002	9.799	0.35
18	0.06	25.10	0.502	0.252	0.002	9.399	0.39
19	0.05	23.02	0.460	0.212	0.002	9.311	0.45
20	0.04	20.02	0.400	0.160	0.002	9.869	0.59
21	0.03	18.37	0.367	0.135	0.002	8.773	0.68

$$g_{sr} = (9.8 \pm 0.7) \text{ m/s}^2, \quad (\epsilon = 7\%)$$

Zaključak

Za izračunavanje gravitacionog ubrzanja potrebno je znati dužinu i period oscilovanja matematičkog klatna. Ova veličina ne zavisi od amplitude i mase klatna. Rezultati merenja pokazuju da gravitaciono ubrzanje za Zemlju iznosi $9.8 \pm 0.7 \text{ m/s}^2$. Greška se javlja zbog: otpora vazduha, brzine reakcije eksperimentatora, torzionih oscilacija, oscilacija prouzrokovanih istežanjem konca, kao i zbog trenja u tački u kojoj je klatno fiksirano.

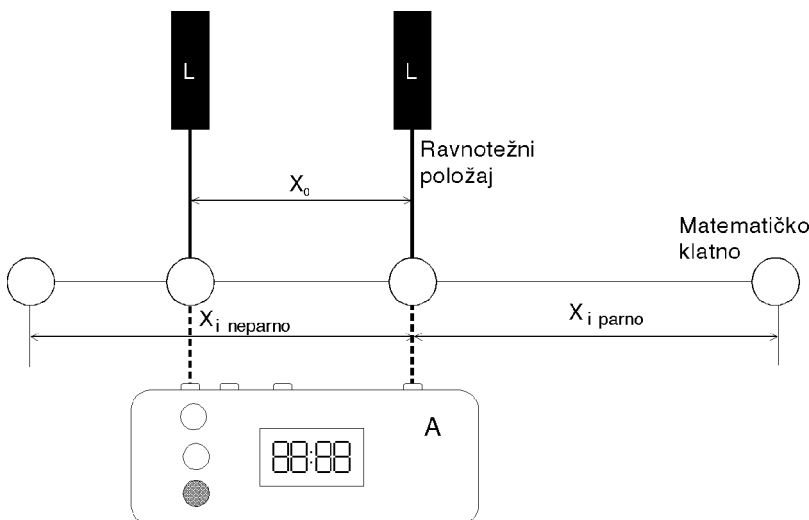
B. Određivanje koeficijenta otpora vazduha

Uvod

Oscilacije matematičkog klatna su pri normalnim uslovima prigušene. To znači da dolazi do smanjenja amplitude. Najveći uticaj na klatno ima *otpor vazduha*. Otpor vazduha je pojava koja se javlja usled viskoznosti samog vazduha i turbulencije koja se javlja pri kretanju nekog tela kroz vazduh. Za opisivanje turbulentnog kretanja je potreban složen matematički aparat. Koeficijent viskoznosti za vazduh se teško meri pa je za merenje koeficijenta otpora vazduha najbolje rešenje eksperiment u kojem ne učestvuju ovi parametri. Mereći smanjenje amplitude matematičkog klatna tokom vremena može se doći do vrednosti otpora vazduha.

Aparatura

- Klatno;
- Dva poluprovodnička lasera;



Slika 2.
Šema aparature.

Figure 2.
Experimental setup.

– Laserski hronometar (sastoji se od dve foto-diode koje uključuju i isključuju štopericu i samim tim omogućuju veoma precizno merenje). Laserski hronometar funkcioniše kao štoperica koja se uključuje prekidanjem laserskog snopa. Zato se dobijaju određene vrednosti vremena (laserski hronometar se ne resetuje posle dva prekida). Da bi se dobile vrednosti prolaska klatna između dva snopa (T_i) mora se od očitano g vremena oduzeti prethodno.

Metod merenja

Klatno se izvede iz ravnotežnog položaja i pusti da osciluje. Kada prođe kroz ravnotežni položaj kuglica prekine laserski snop koji je uperen u jednu foto-diodu laserskog hronometra. Laserski hronometar počne da meri vreme i prestaje sa tim tek kad kuglica prekine i drugi laserski snop uperen u drugu foto-diodu. Isto to se dešava pri povratku klatna. Razmak između dva laserska snopa je konstantan u toku jednog merenja (X_0). Iz geometrije eksperimenta se da izvesti formula po kojoj se računa amplituda klatana:

$$X_i = \frac{x_0}{\sin \frac{2\pi T_i}{T}},$$

gde je T period matematičkog klatna koji iznosi (5.40 ± 0.01) s.

Apsolutna greška amplitude klatna se računa po obrascu:

$$\Delta X_i = \left| \frac{\partial X_i}{\partial T_i} \right| \Delta T_i + \left| \frac{\partial X_i}{\partial X_0} \right| \Delta X_0 + \left| \frac{\partial X_i}{\partial T} \right| \Delta T$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial X_0} = \frac{1}{\sin(2\pi T_i/T)}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial T} = \frac{X_0 \cos(2\pi/T) \cdot 2\pi T_i}{\sin(2\pi T_i/T)^2 \cdot T^2}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial T_i} = \frac{X_0 \cos(2\pi/T) \cdot 2\pi T_i}{\sin(2\pi T_i/T)^2 \cdot T}$$

Pošto zbog geometrije razlikujemo parne i neparne vremenske intervale možemo izvesti formulu za trenutak maksimalne elongacije:

$$t_i = \text{Int}\left(\frac{i-1}{2}\right) \cdot T + \frac{3T}{4} - \text{mod}(i, 2) \cdot \frac{T}{2} + (-1)^i \cdot T_i$$

Koeficijent otpora vazduha zavisi od dužine i trenutka maksimalne elongacije po funkciji:

$$X_i = X_0 \cdot \exp(-\beta T_i)$$

gde je β koeficijent otpora vazduha.

Merenja su vršena u tri serije po pet puta. U svakoj seriji je dužina amplitude konstantna. Svako merenje obuhvata oko 120 vremenskih intervala. Razmatramo samo amplitude sa jedne strane ravnotežnog položaja (sa one strane gde je drugi snop lasera) i delimo ih na parne i neparne odnosno na amplitude kad se klatno kreće u jednom smeru i na amplitude kada se vraća.

Rezultati

Pri statističkoj obradi podataka program ORIGIN daje funkciju po kojoj zavisi amplituda od vremena. Funkcija je eksponencijalna pa je za dalju obradu bio pogodniji onaj oblik u kojem je amplituda logaritmovana (\log_{10}).

Iz $X_i = X_0 \cdot \exp(-\beta t)$ dobija se

$$\log X_i = \log X_0 - \beta t \log e,$$

$$\text{odnosno stavljajući } \beta = \frac{B}{\log e}$$

$$\log X_i = \log X_0 - B t,$$

Za tri serije merenja dobijaju se sledeće vrednosti parametra B, odnosno koeficijenta otpora vazduha β :

X_0 [m]	parne amplitude		neparne amplitude	
	B	β	B	β
0.11	2.33±0.01	0.79±0.03	2.36±0.01	0.86±0.03
0.09	2.10±0.01	0.87±0.03	2.10±0.01	0.77±0.03
0.07	2.09±0.01	0.77±0.03	2.09±0.01	0.77±0.03

$$\bar{\beta} = (0.00081 \pm 0.00006) \text{ s}^{-1}; \varepsilon = 7\%.$$

Zaključak

Na obrazovanje greške uticali su sledeći faktori: otpor vazduha koji je delovao na konac; prpratne oscilacije klatna (torzione i duž konca);

strujanje vazduha na mestu izvođenja eksperimenta; istegljivost konca. Postojali su i drugi faktori koji su verovatno uticali na pojavu greške, ali se njihov uticaj može zanemariti (kašnjenje, kretanje ljudi stepenicama). Pri različitim serijama merenja dobijaju se različite vrednosti za koeficijent otpora vazduha. To potiče otuda što se kuglica kreće po kružnom luku a ne po pravoj. Samim tim ona prekida laserski snop na različite načine. Da bi laserski hronometar počeo da broji potrebno je da se zakloni određena površina laserskog snopa. Put koji pređe kuglica da bi zaklonila tu površinu nije uvek isti (zbog lučne putanje kuglice).

Literatura

- [1] Kojić, M., Mićunović, M. 1988. *Teorija oscilacija*. Beograd: Naučna knjiga
- [2] Detlaf, A.A., Yavorskij, B.M., Milkovskaya, L.B. 1973. *Kurs fiziki 1*. Moskva: Vysshaya shkola

Goran Karapeoski and Ljubomir Samardžić

Air Friction Coefficient Determination Using Simple Pendulum

This paper consists of two parts. In the first part we have tried to determine the value of the gravitational acceleration with a simple pendulum. The aim was in to make an analysis of all factors contributing to the measurement error. In the second part we have determined coefficient of air friction for an 8 meters long pendulum. Causes of measurement errors are described also.

